

Городской Конкурс педагогического мастерства – 2016

Номинация

«Лучшая методическая разработка»

Номинация:

«Лучшая методическая разработка»

«Методические рекомендации для учителя

по использованию образовательных технологий в обучении»

Тема:

***«Методические рекомендации по использованию
нестандартных заданий и нестандартных приемов
решения задач в курсе алгебры IX класса»***

Авторы:

Левашова Маргарита Николаевна,
учитель математики

МБОУ города Костромы «Лицей №32»
Сахариленко Анастасия Александровна,
учитель математики

МБОУ города Костромы «Лицей №32»

Кострома 2016

Оглавление

1. Введение.....	2
а) задача как обучающая модель.....	2
б) использование нестандартных приемов решения задач и нестандартных заданий в курсе алгебры IX класса	3
2. Применение свойств квадратичной функции.....	4
а) введение в теорию	4
б) использование нестандартных приемов решения задач на основе дополнительного свойства квадратичной функции.....	6
3. Использование нестандартных приемов при построении графиков квадратичной функции	14
4. Нестандартные задания, предназначенные для отработки навыков построения основных видов графиков функций, изучаемых в IX классе	31
5. Заключение.....	41
6. Список использованной литературы.....	42

1. Введение

а) Задача как обучающая модель

Сейчас уже ни для кого не секрет, что установка традиционной системы образования дать учащимся некоторую сумму знаний не является бесспорной. Главная цель обучения – приобретение обобщающих стратегий. Надо учить учиться.

Для развития творческих способностей учащихся центр тяжести в обучении должен быть перенесен с заучивания и запоминания на развитие пытливости и самостоятельности. Конечно, нельзя впадать в другую крайность – определенный объем знаний придется все-таки заучивать при любом методе обучения. Еще Песталоцци считал, что одной из главных целей обучения является развитие умственных и духовных сил ребенка.

В математике основным средством развития творческих способностей ученика является решение задач, при этом основной целью должно являться не получение решения задачи (в смысле ответа), не получения результата решения, а само решение как метод, как процесс, как совокупность логических шагов, приводящих к получению ответа. При этом важно научить ученика (осознанно или не осознанно) применять известные приемы. При переносе центра тяжести с решения задач на метод большой обучающий эффект дает решение задачи разными способами, а также конструирование новых задач как подтверждение факта полного овладения методом решения не только этой задачи, но и класса таких задач, получаемых из исходной путем трансформации условий.

Следовательно, в план урока необходимо чаще включать решение нестандартных заданий и задач с использованием нестандартных приемов решения.

в) Использование нестандартных приемов решения задач и нестандартных заданий в курсе алгебры IX класса

Использование нестандартных приемов при решении задач в целом направлены на то, чтобы:

- развить интерес школьников к математике,
- познакомить их с новыми идеями и методами,
- расширить представления об изучаемом в основном курсе материале,
- порешать интересные задачи,
- проиллюстрировать применение математики на практике,
- показать связь математики с другими областями знаний,
- познакомить с некоторыми историческими сведениями,
- подчеркнуть эстетические аспекты изучаемых вопросов.

Как правило, эти приемы интересны и доступны учащимся IX классов и требуют знаний только базового курса. Уровень сложности предлагаемых задач таков, что к их рассмотрению можно привлечь значительное количество школьников, а не только наиболее сильных. Для кого-то из школьников, которые пока не проявляют заметной склонности к математике, эти занятия могут стать толчком в развитии интереса к предмету и вызвать желание узнать больше. Главное в подборе таких задач – это учитывать, чтобы они были не большими по объему, интересными для учащихся и соответствовали возможностям класса.

2. Применение свойств квадратичной функции

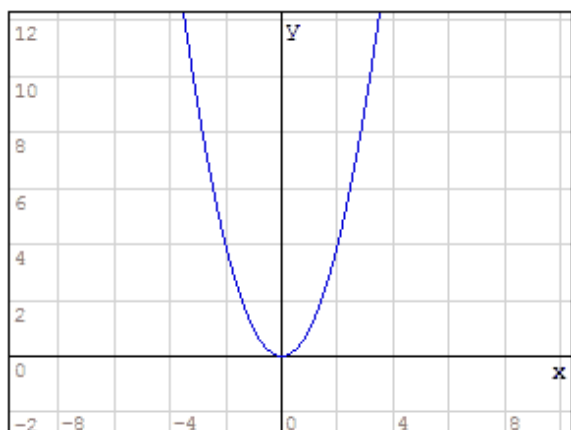
а) Введение в теорию

Основная цель – показать некоторые нестандартные приемы задач на основе свойств квадратичной функции и графических соображений. При решении задач такого рода, которые на первый взгляд кажутся довольно сложными, необходимо напомнить учащимся свойства функции $y = ax^2 + bx + c$ (направление ветвей, пересечение с осью абсцисс в зависимости от числа корней, ось симметрии, возрастание и убывание, знакопостоянство).

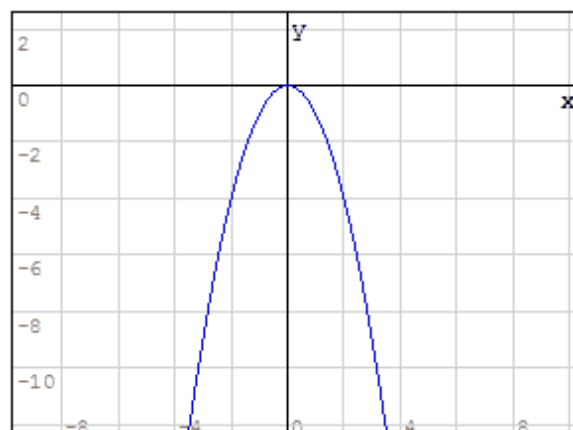
При решении последующих задач соответствующие графические соображения будут активно использоваться. Чтобы прийти к дополнительному свойству квадратичной функции, которое формулируется следующим образом (оно очень очевидно): *«Если квадратный трехчлен имеет два корня, то в промежутке между корнями и в промежутках вне корней он принимает значения разных знаков»*, достаточно выполнить схематично три рисунка, на которых парабола пересекает ось абсцисс в одной точке, в двух точках и не пересекает совсем. Сделать вывод о замене знака трехчлена, опираясь на рисунки.

- Парабола пересекает ось абсцисс в одной точке:

а) $y = x^2$

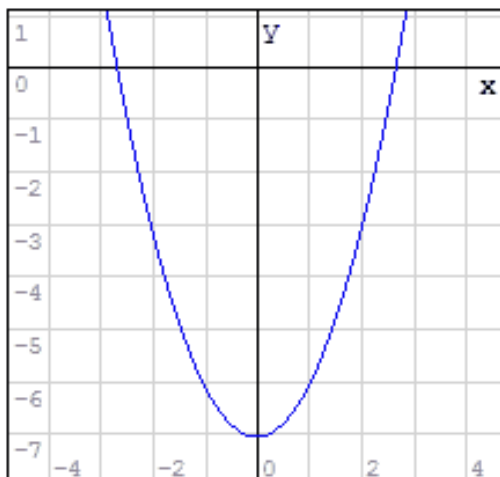


б) $y = -x^2$

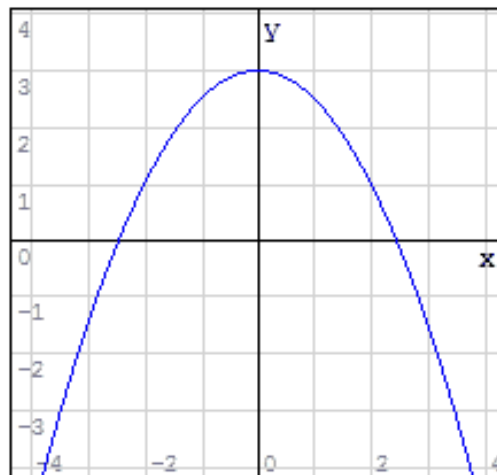


- Парабола пересекает ось абсцисс в двух точках:

а) $y = x^2 - 7$

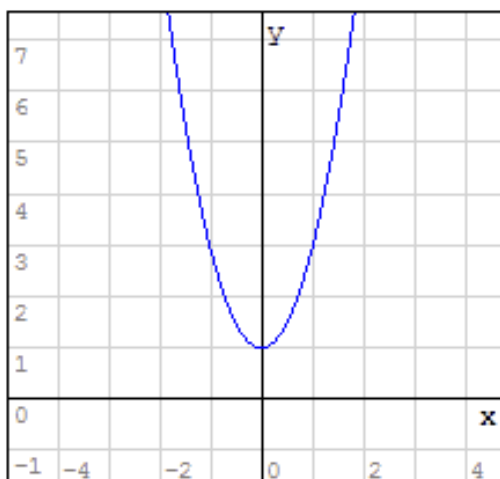


б) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$

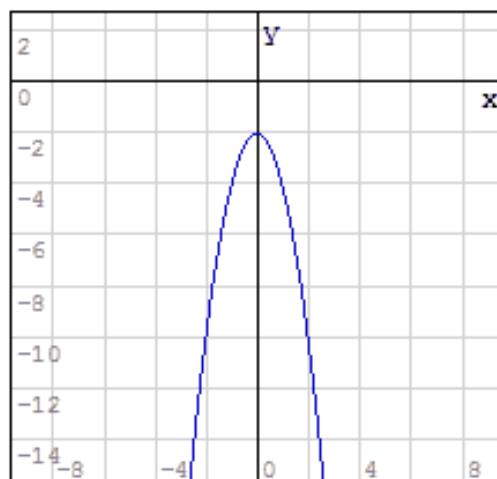


- Парабола не имеет пересечения с осью абсцисс:

а) $y = 2x^2 + 1$



б) $y = -2x^2 - 2$



Затем предложить учащимся несколько задач. Из-за громоздких вычислений их трудно решить «в лоб». Но в каждом случае ответ можно получить практически устно. Цель состоит в том, чтобы ученики поняли идею и оценили изящность приема.

б) Использование нестандартных приемов решения задач на основе дополнительного свойства квадратичной функции.

Задача 1

Имеет ли корни уравнение $1234x^2 - 4231x + 2413 = 0$.

Понятно, что можно ответить на вопрос, вычислив дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в левой части уравнения (или же, применив оценку, определить его знак). Однако такое решение весьма громоздко и некрасиво, в то время как, опираясь на графические представления, задачу можно решить практически устно.

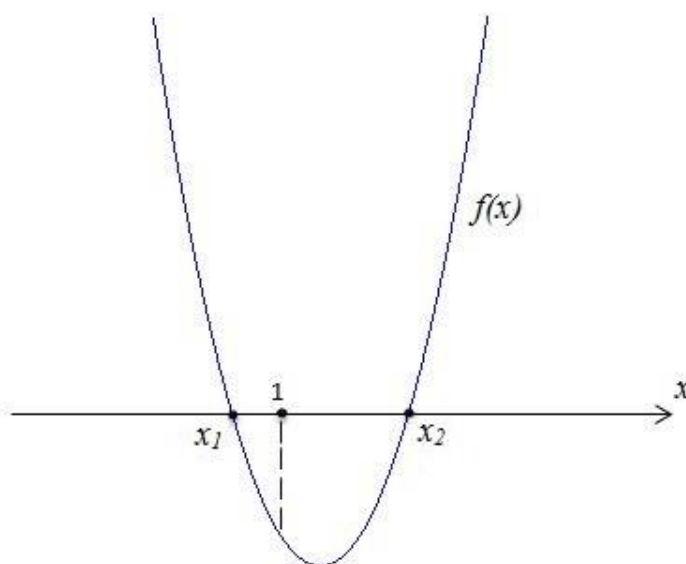
Решение

Рассмотрим функцию $f(x) = 1234x^2 - 4231x + 2413$.

Ее график – парабола, ветви которой направлены вверх. Представим вместо x какое-нибудь «удобное» число, например 1 и сравним результат с нулем.

$$1234 - 4231 + 2413 < 0$$

Итак, функция может принимать отрицательное значение. Это значит, что парабола опускается ниже оси абсцисс и пересекает эту ось в двух точках. Отсюда следует, что данное уравнение имеет два корня.



Задача 2

Сколько корней имеет уравнение

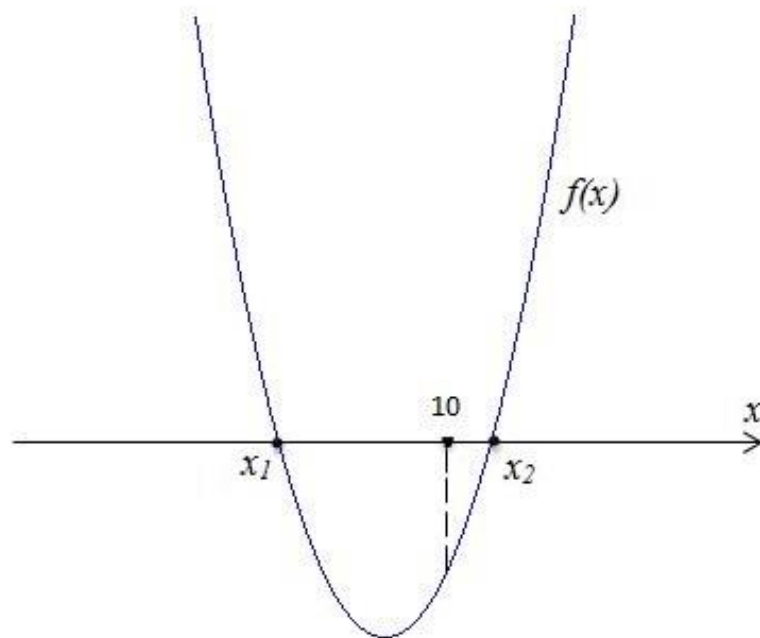
$$(x - 1001)(x - 1003) + (x - 1003)(x - 1005) + (x - 1005)(x - 1001) = 0?$$

Решение

Если мысленно раскрыть скобки, то легко видеть, что после преобразования в левой части уравнения получится квадратный трехчлен, причем коэффициент при x^2 будет положительным. Обозначим этот трехчлен за $f(x)$ и найдем $f(1003)$, подставим $x=1003$ в исходное выражение:

$$f(1003) = 0 + 0 - 4; f(1003) < 0.$$

Ветви параболы – графика нашего квадратного трехчлена – направлены вверх (так как коэффициент при x^2 положителен), при этом трехчлен принимает отрицательные значения. Это значит, что парабола пересекает ось абсцисс в двух точках, уравнение имеет два корня.



Задача 3

Докажите, что один из корней уравнения $5x^2 - 79x - 21 = 0$ меньше, а другой больше 10.

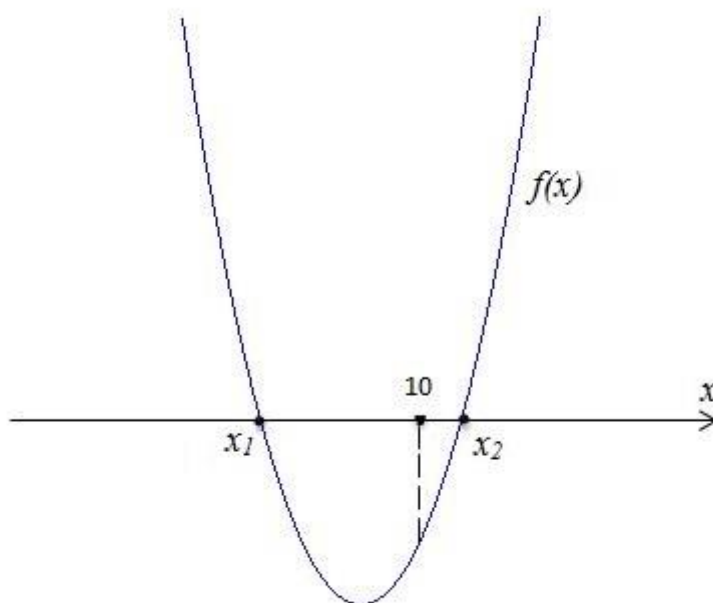
Решение

Переформулируем задачу: докажем, что число 10 лежит между корнями уравнения. Рассмотрим квадратный трехчлен $f(x) = 5x^2 - 79x - 21$.

График этого квадратного трехчлена – парабола, ветви которой направлены вверх. Кроме того, она пересекает ось абсцисс в двух точках. Поэтому, если число 10 лежит между корнями данного квадратного трехчлена, то $f(10)$ должно быть отрицательным числом. Найдем $f(10)$ и убедимся, что это действительно так:

$$f(10) = 500 - 790 - 21; f(10) < 0.$$

Следовательно $x_1 < 10 < x_2$.



Задача 4

Установите, как на координатной оси расположены числа:

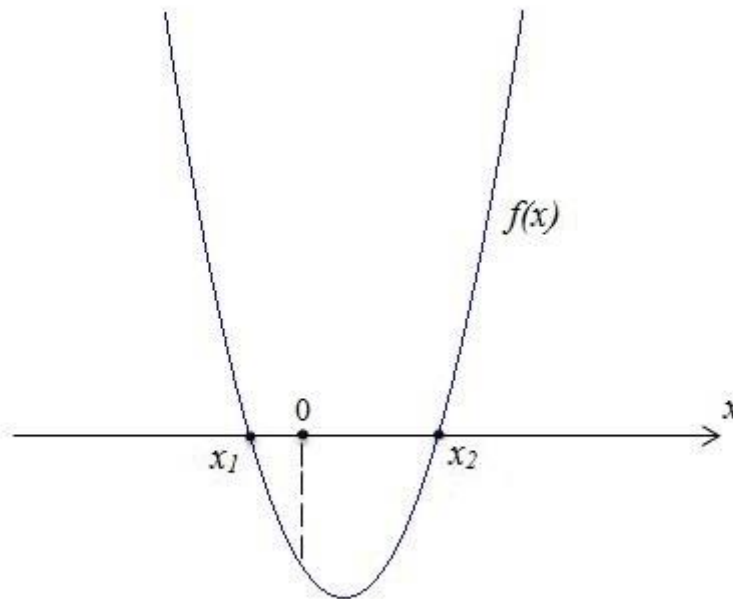
а) $x_1, x_2, 0, 1$, если x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена $f(x) = 10x^2 - 18x - 17$, причем $x_1 < x_2$.

Решение

Рассмотрим квадратный трехчлен $f(x) = 10x^2 - 18x - 17$. Так как $a > 0$, то ветви параболы (графика квадратного трехчлена) направлены вверх. Следовательно, график функции пересекает ось абсцисс в двух точках, так как по условию сказано, что x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена. Посчитаем значение $f(x)$ в точке $x = 0$.

$f(0) = 0 - 0 - 17$; $f(0) < 0$. Значит, парабола опускается ниже оси абсцисс. Аналогичное рассуждение можно провести и при $x = 1$; $f(1) < 0$.

Значит, числа 0 и 1 расположены между корнями квадратного трехчлена. Таким образом: $x_1 < 0 < 1 < x_2$.



б) $x_1, x_2, -10, -1$, если x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена $f(x) = -12x^2 - 23x + 27$, причем $x_1 < x_2$.

Решение

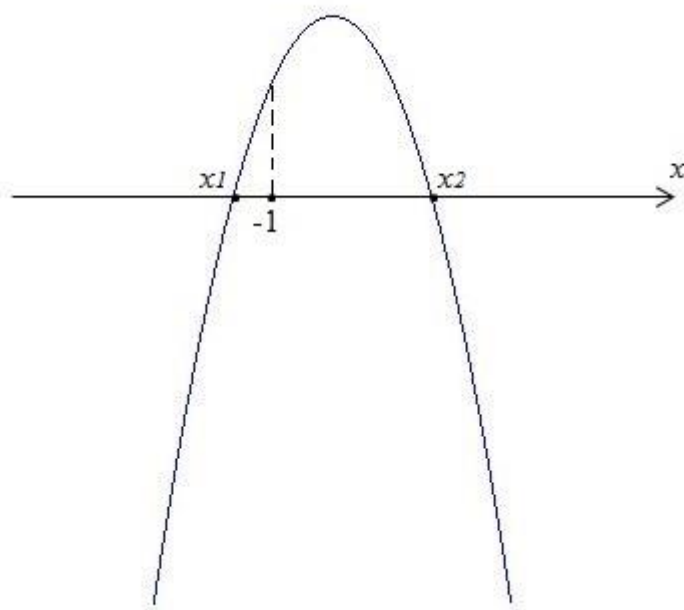
Так как коэффициент при x^2 отрицателен, то ветви параболы (графика квадратного трехчлена) направлены вниз. Парабола пересекает ось абсцисс в двух точках, так как по условию сказано, что x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена. Посчитаем значение $f(x)$ в точке $x = -1$ и $x = -10$.

$f(-10) = -1200 + 230 + 27; f(-10) < 0$, значит, число -10 расположено левее меньшего корня.

$f(-1) = -12 + 23 + 27; f(-1) > 0$. Следовательно, парабола расположена так, что число -1 находится в интервале между корнями.

Значит, ответом к задаче будет следующее расположение чисел:

$$-10 < x_1 < -1 < x_2.$$



Задача 5

Докажите, что:

а) оба корня уравнения $-37x^2 - 53x + 86 = 0$ больше -1 ;

б) оба корня уравнения $39x^2 - 23x - 18 = 0$ меньше 10 .

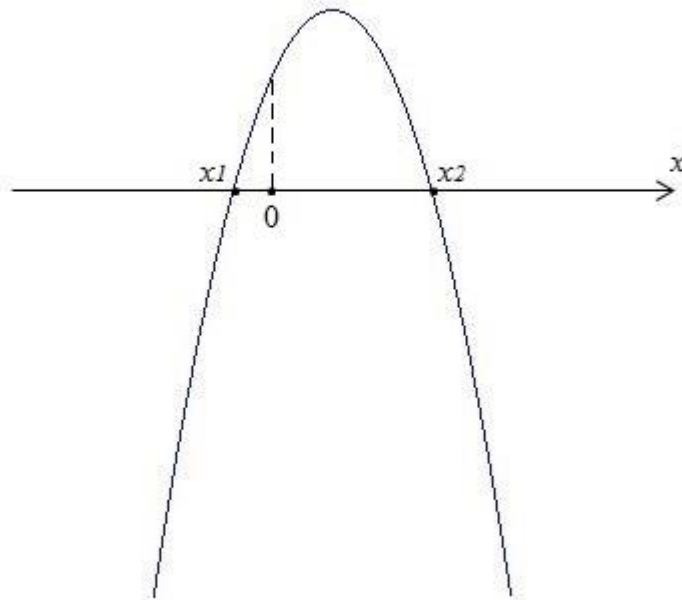
Решение

а) Ветви параболы квадратного трехчлена $-37x^2 - 53x + 86 = 0$ направлены вниз, так как коэффициент при x^2 отрицателен. Парабола пересекает ось абсцисс в двух точках, так как по условию задачи даны два корня.

Посчитаем значение $f(x)$ в точке $x = 0$.

$f(0) = 0 + 0 + 86$; $f(0) > 0$, т.е. число 0 лежит в интервале между корнями.

Посчитаем $f(-1) = -37 - 53 + 86$; $f(-1) < 0$. Значит число -1 лежит в интервале вне корней (в одном из них). Так как $-1 < 0$, то $-1 \in (-\infty; x_1)$. Значит, расположение чисел может быть таким: $-1 < x_1 < 0 < x_2$. Тогда оба корня больше -1 .

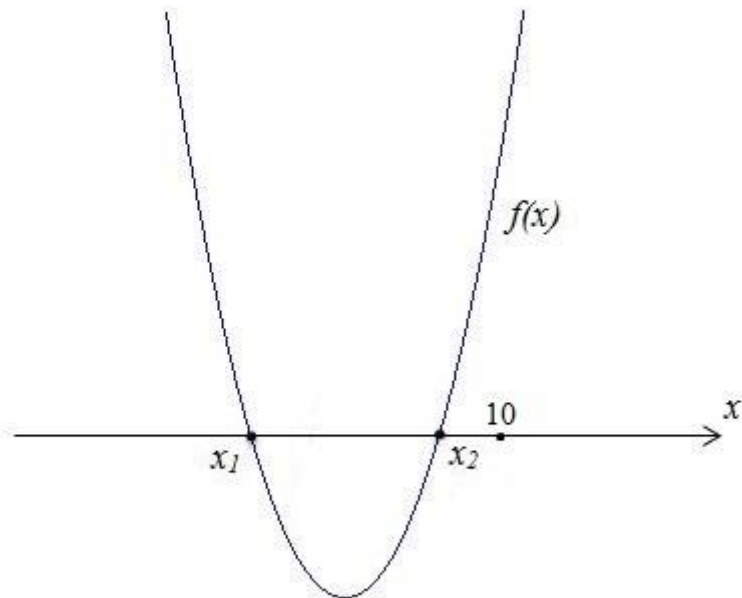


б) Ветви параболы квадратного трехчлена $39x^2 - 23x - 18 = 0$ направлены вверх, так как коэффициент при x^2 положителен. Парабола пересекает ось абсцисс в двух точках, так как по условию задачи даны два корня.

Посчитаем значение $f(x)$ в точке $x = 10$.

$f(10) = 4900 - 230 - 18; f(10) > 0$, т.е. число 10 расположено в одном из промежутков вне корней.

Тогда посчитаем $f(0) = 0 - 0 - 18; f(0) < 0$. Значит, число 0 расположено в промежутке между корнями. Получим вывод, что число 10 лежит правее нуля и большего корня, т.е. расположение чисел таково: $x_1 < 0 < x_2 < 10$. Тогда оба корня меньше 10.



Дополнительные задания:

1) Имеет ли корни уравнение:

а) $243x^2 + 581x + 127 = 0$;

б) $213x^2 - 312x + 32 = 0$.

Ответ:

а) имеет два корня;

б) имеет два корня.

2) Докажите, что уравнение имеет корни:

а) $-87(x - 250)(x - 150) + (x - 200)(x - 100) = 0$;

б) $0,19(x + 250)(x + 150) + (x + 200)(x + 100) = 0$.

3) Докажите, что:

а) один из корней уравнения $94x^2 - 123x + 6 = 0$ меньше 1, а другой больше 1;

б) один из корней уравнения $89x^2 + 198x - 9 = 0$ меньше -1, а другой больше -1.

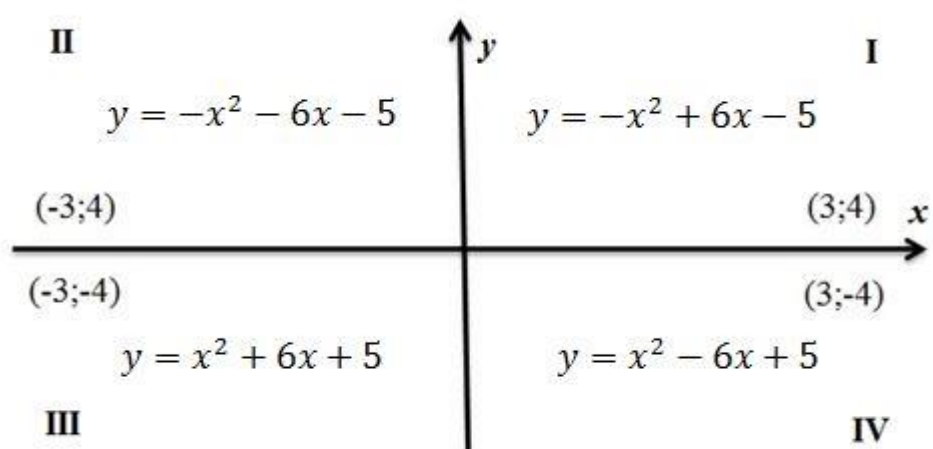
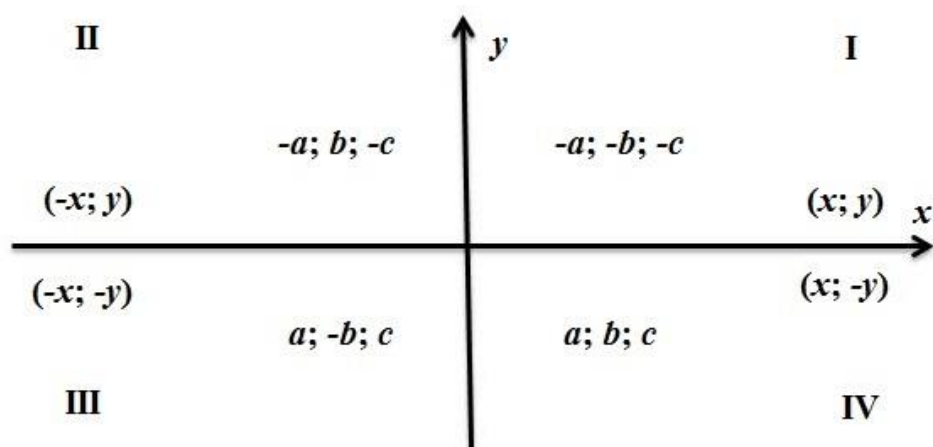
3. Использование нестандартных приемов при построении графиков квадратичной функции

Этот материал представляет собой нестандартный прием для выполнения заданий на построение графиков и исследование квадратичной функции, причем все графики условно названы «хорошими». Так они названы потому что:

- для построения графика достаточно следующей области системы координат: $-12 < x < 12$ и $-12 < y < 12$ (единичный отрезок равен стороне тетрадной клетки;
- вершины параболы имеют целочисленные координаты;
- график пересекает ось абсцисс в точках с целочисленными координатами, ось ординат в большинстве случаев также пересекается графиком в удобных точках;
- все точки пересечения графика с осями находятся в пределах видимости начерченной системы координат.

Приведенные здесь формулы для построения парабол, вершины которых расположены в IV четверти системы координат, позволяют из одной формулы получить еще три. Для этого достаточно изменить коэффициенты квадратного трехчлена по указанному правилу и получить новые графики, симметричные данным относительно осей абсцисс и ординат.

На рисунке показано, как изменяются коэффициенты квадратного трехчлена и координаты вершин параболы.



Рассмотрим на примерах, как можно использовать этот метод в работе.

Дана функция $y_1 = x^2 - 6x + 5$.

Ее вершина находится в IV четверти и имеет координаты $(3; -4)$.

Нули функции: $x^2 - 6x + 5 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 5$.

Теперь используя данное правило, можно получить еще три формулы квадратичной функции.

$$y_2 = x^2 + 6x + 5.$$

Вершина в III четверти $(-3; -4)$. Нули функции $x_1 = -5$, $x_2 = -1$. Графики функций y_1 и y_2 симметричны относительно оси Oy.

$$y_3 = -x^2 - 6x - 5.$$

Вершина в II четверти $(-3; 4)$. Нули функции $x_1 = -5$, $x_2 = -1$. Графики функций y_2 и y_3 симметричны относительно оси Ox .

$$y_4 = -x^2 + 6x - 5.$$

Вершина в I четверти $(3; 4)$. Нули функции $x_1 = 1$, $x_2 = 5$. Графики функций y_3 и y_4 симметричны относительно оси Oy .

Таким образом, учитель, имея перед собой график одной квадратичной функции, может сразу проконтролировать работу по построению графиков у четырех учеников.

Используя квадратный трехчлен квадратичной функции, можно очень быстро составить задания для решения квадратных уравнений и квадратных неравенств, причем все они будут иметь целочисленные корни.

Пусть есть квадратный трехчлен $x^2 - 6x + 5$.

а) Решить квадратные уравнения:

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \text{ (или } -x^2 + 6x - 5 = 0), \text{ корни } x_1 = 1, x_2 = 5.$$

$$x^2 + 6x + 5 = 0 \text{ (или } -x^2 - 6x - 5 = 0), \text{ корни } x_1 = -5, x_2 = -1.$$

б) Можно составить квадратные неравенства.

Вид неравенства	Решение неравенства	Вид неравенства	Решение неравенства
$x^2 - 6x + 5 < 0$ $-x^2 + 6x - 5 > 0$	$x \in (1; 5)$	$x^2 + 6x + 5 < 0$ $-x^2 - 6x - 5 > 0$	$x \in (-5; -1)$
$x^2 - 6x + 5 \leq 0$ $-x^2 + 6x - 5 \geq 0$	$x \in [1; 5]$	$x^2 + 6x + 5 \leq 0$ $-x^2 - 6x - 5 \geq 0$	$x \in [-5; -1]$
$x^2 - 6x + 5 > 0$ $-x^2 + 6x - 5 < 0$	$x \in (-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$	$x^2 + 6x + 5 > 0$ $-x^2 - 6x - 5 < 0$	$x \in (-\infty; -5) \cup (-1; +\infty)$
$x^2 - 6x + 5 \geq 0$ $-x^2 + 6x - 5 \leq 0$	$x \in (-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$	$x^2 + 6x + 5 \geq 0$ $-x^2 - 6x - 5 \leq 0$	$x \in (-\infty; -5] \cup [-1; +\infty)$

Имея одно квадратное неравенство, можно составить еще 15 неравенств, решить которые можно практически устно. Таким образом, учитель может очень быстро контролировать работу большой группы учащихся.

Приведем примеры еще нескольких функций, которые учитель может использовать в своей работе.

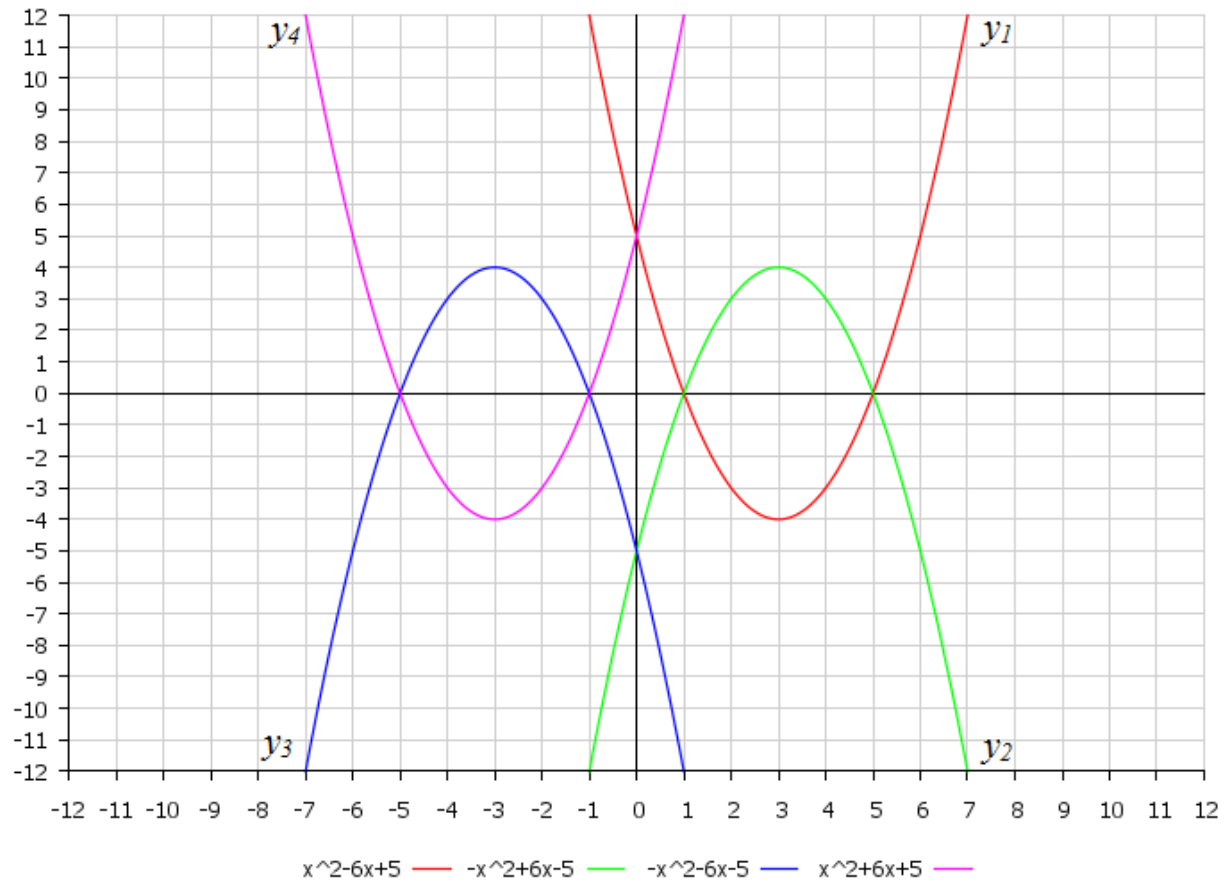
Вид функции	Коорд- ты вершин парабол	Нули функции	Вид уравнения	Вид неравенства	Решение неравенства
IV четверть	x y	x_1 x_2			
$y_1 = x^2 - 6x + 5$	3 -4	5 1	$x^2 - 6x + 5 = 0$	$x^2 - 6x + 5 > 0$ $-x^2 + 6x - 5 < 0$ $x^2 - 6x + 5 \geq 0$ $-x^2 + 6x - 5 \leq 0$	$x \in (-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$ $x \in (-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$
I четверть					
$y_2 = x^2 + 6x + 5$	3 4	1 5	$x^2 + 6x + 5 = 0$	$x^2 - 6x + 5 < 0$ $-x^2 + 6x - 5 > 0$ $x^2 - 6x + 5 \leq 0$ $-x^2 + 6x - 5 \geq 0$	$x \in (1; 5)$ $x \in [1; 5]$
III четверть					
$y_3 = -x^2 - 6x - 5$	-3 -4	-5 -1	$-x^2 - 6x - 5 = 0$	$x^2 + 6x + 5 > 0$ $-x^2 - 6x - 5 < 0$ $x^2 + 6x + 5 \geq 0$ $-x^2 - 6x - 5 \leq 0$	$x \in (-\infty; -5) \cup (-1; +\infty)$ $x \in (-\infty; -5] \cup [-1; +\infty)$
II четверть					
$y_4 = -x^2 + 6x - 5$	-3 4	-5 -1	$-x^2 - 6x - 5 = 0$	$x^2 + 6x + 5 < 0$ $-x^2 - 6x - 5 > 0$ $x^2 + 6x + 5 \leq 0$ $-x^2 - 6x - 5 \geq 0$	$x \in (-5; -1)$ $x \in [-5; -1]$

$$y_1(x) = x^2 - 6x + 5$$

$$y_2(x) = -x^2 + 6x - 5$$

$$y_3(x) = -x^2 - 6x - 5$$

$$y_4(x) = x^2 + 6x + 5$$



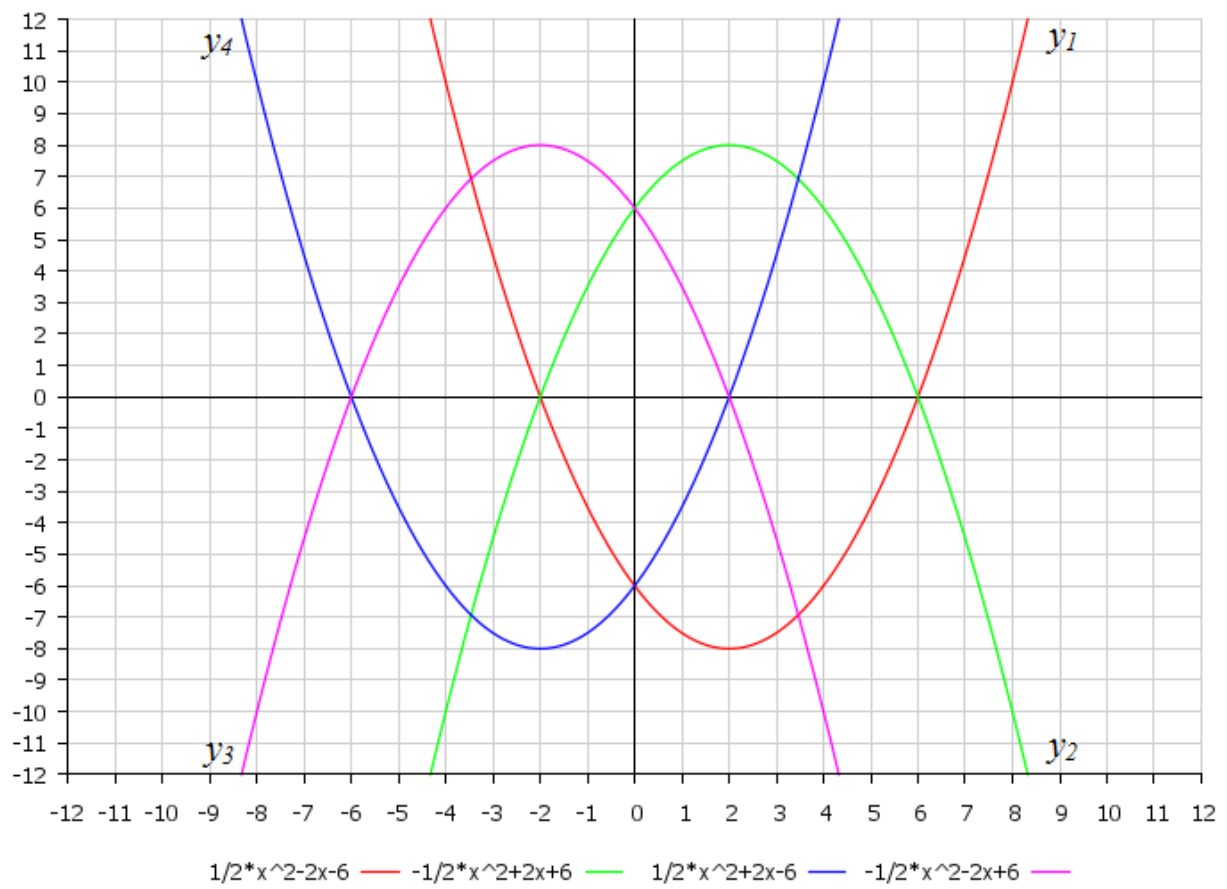
Вид функции	Координаты вершин парабол	Нули функции	Вид уравнения	Вид неравенства	Решение неравенства
IV четверть	x y	x_1 x_2			
$y_1 = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6$	2 -8	-2 6	$\frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 = 0$	$\frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 > 0$ $-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 < 0$ $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 \geq 0$ $-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 \leq 0$	$x \in (-\infty; -2) \cup (6; +\infty)$ $x \in (-\infty; -2] \cup [6; +\infty)$
I четверть					
$y_2 = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$	2 8	-2 6	$-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 = 0$	$\frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 < 0$ $-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 > 0$ $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 \leq 0$ $-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 \geq 0$	$x \in (-2; 6)$ $x \in [-2; 6]$
III четверть					
$y_3 = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$	-2 -8	-6 2	$\frac{1}{2}x^2 + 2x - 6 = 0$	$\frac{1}{2}x^2 + 2x - 6 > 0$ $-\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6 < 0$ $\frac{1}{2}x^2 + 2x - 6 \geq 0$ $-\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6 \leq 0$	$x \in (-\infty; -6) \cup (2; +\infty)$ $x \in (-\infty; -6] \cup [2; +\infty)$
II четверть					
$y_4 = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$	-2 8	-6 2	$-\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6 = 0$	$\frac{1}{2}x^2 + 2x - 6 < 0$ $-\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6 > 0$ $\frac{1}{2}x^2 + 2x - 6 \leq 0$ $-\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6 \geq 0$	$x \in (-6; 2)$ $x \in [-6; 2]$

$$y_1 = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$$

$$y_3 = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$$

$$y_4 = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$$



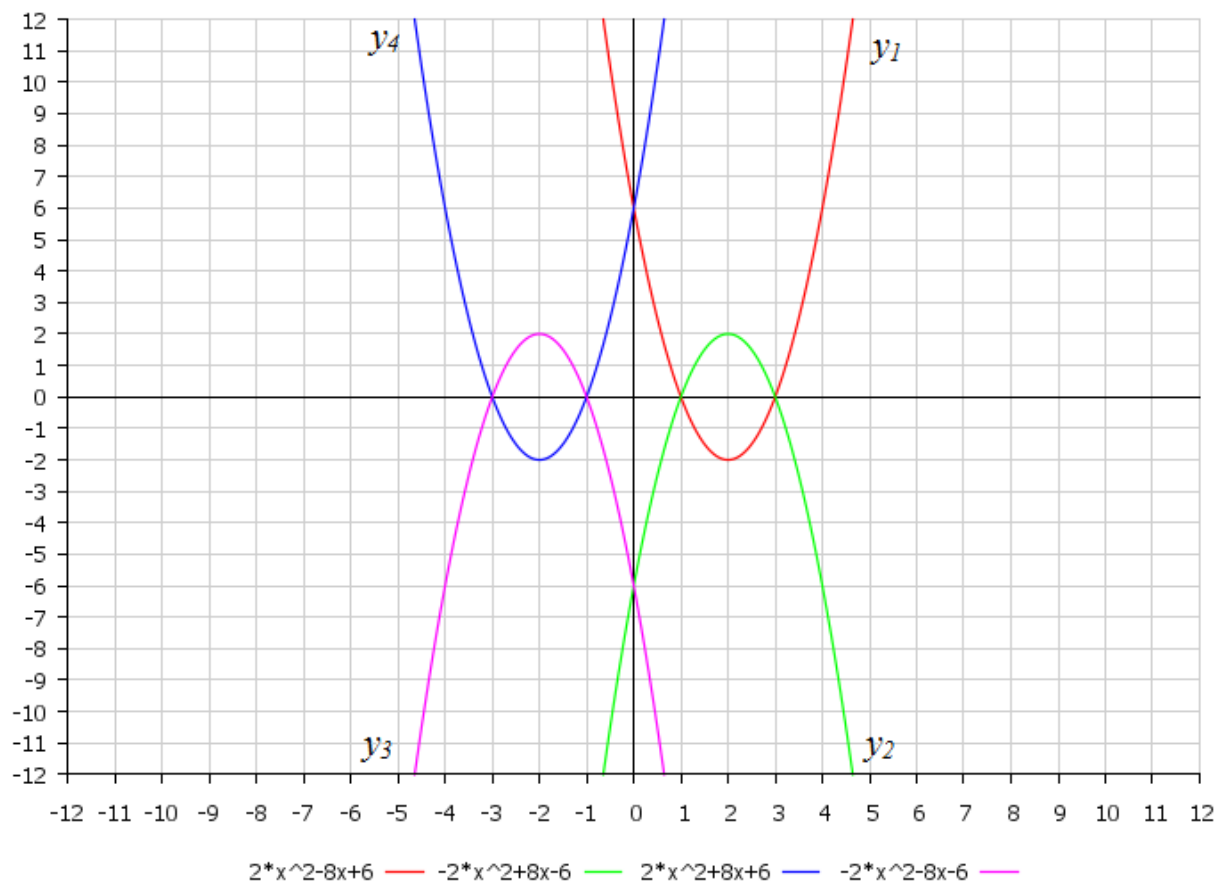
Вид функции	Коорд- ты вершин парабол	Нули функции	Вид уравнения	Вид неравенства	Решение неравенства
IV четверть	x y	x_1 x_2			
$y_1 = 2x^2 - 8x + 6$	2 -2	1 3	$2x^2 - 8x + 6 = 0$	$2x^2 - 8x + 6 > 0$ $-2x^2 + 8x - 6 < 0$ $2x^2 - 8x + 6 \geq 0$ $-2x^2 + 8x - 6 \leq 0$	$x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$ $x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$
I четверть					
$y_2 = -2x^2 + 8x - 6$	2 2	1 3	$-2x^2 + 8x - 6 = 0$	$2x^2 - 8x + 6 < 0$ $-2x^2 + 8x - 6 > 0$ $2x^2 - 8x + 6 \leq 0$ $-2x^2 + 8x - 6 \geq 0$	$x \in (1; 3)$ $x \in [1; 3]$
III четверть					
$y_3 = 2x^2 + 8x + 6$	-2 -2	-3 -1	$2x^2 + 8x + 6 = 0$	$2x^2 + 8x + 6 > 0$ $-2x^2 - 8x - 6 < 0$ $2x^2 + 8x + 6 \geq 0$ $-2x^2 - 8x - 6 \leq 0$	$x \in (-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$ $x \in (-\infty; -3] \cup [-1; +\infty)$
II четверть					
$y_4 = -2x^2 - 8x - 6$	-2 2	-3 -1	$-2x^2 - 8x - 6 = 0$	$2x^2 + 8x + 6 < 0$ $-2x^2 - 8x - 6 > 0$ $2x^2 + 8x + 6 \leq 0$ $-2x^2 - 8x - 6 \geq 0$	$x \in (-3; -1)$ $x \in [-3; -1]$

$$y_1 = 2x^2 - 8x + 6$$

$$y_2 = -2x^2 + 8x - 6$$

$$y_3 = 2x^2 + 8x + 6$$

$$y_4 = -2x^2 - 8x - 6$$



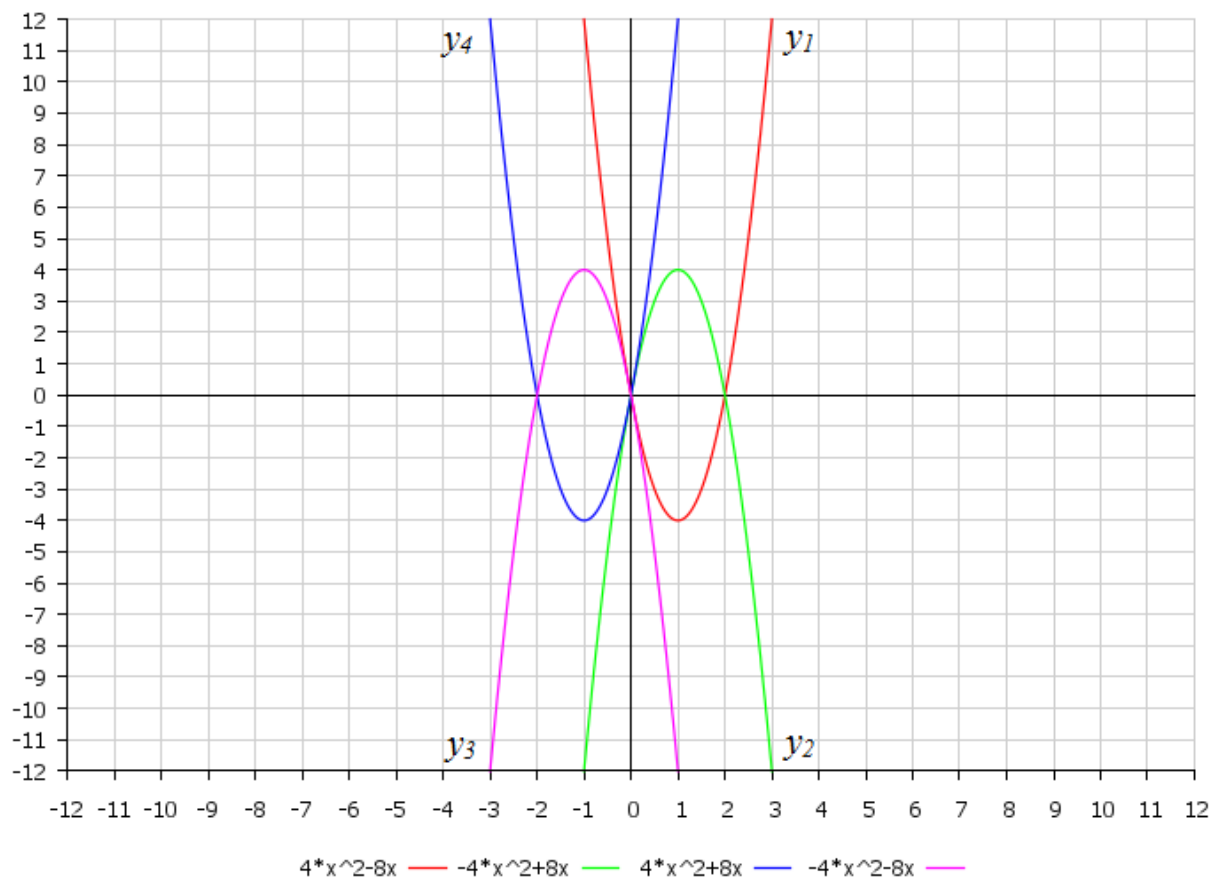
Вид функции	Коорд- ты вершин парабол	Нули функции	Вид уравнения	Вид неравенства	Решение неравенства
IV четверть	x y	x_1 x_2			
$y_1 = 4x^2 - 8x$	1 -4	0 2	$4x^2 - 8x = 0$	$4x^2 - 8x > 0$ $-4x^2 + 8x < 0$ $4x^2 - 8x \geq 0$ $-4x^2 + 8x \leq 0$	$x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ $x \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$
I четверть					
$y_2 = -4x^2 + 8x$	1 4	0 2	$-4x^2 + 8x = 0$	$4x^2 - 8x < 0$ $-4x^2 + 8x > 0$ $4x^2 - 8x \leq 0$ $-4x^2 + 8x \geq 0$	$x \in (0; 2)$ $x \in [0; 2]$
III четверть					
$y_3 = 4x^2 + 8x$	-1 -4	0 -2	$4x^2 + 8x = 0$	$4x^2 + 8x > 0$ $-4x^2 - 8x < 0$ $4x^2 + 8x \geq 0$ $-4x^2 - 8x \leq 0$	$x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$ $x \in (-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$
II четверть					
$y_4 = -4x^2 - 8x$	-1 4	0 -2	$-4x^2 - 8x = 0$	$4x^2 + 8x < 0$ $-4x^2 - 8x > 0$ $4x^2 + 8x \leq 0$ $-4x^2 - 8x \geq 0$	$x \in (-2; 0)$ $x \in [-2; 0]$

$$y_1 = 4x^2 - 8x$$

$$y_2 = -4x^2 + 8x$$

$$y_3 = 4x^2 + 8x$$

$$y_4 = -4x^2 - 8x$$



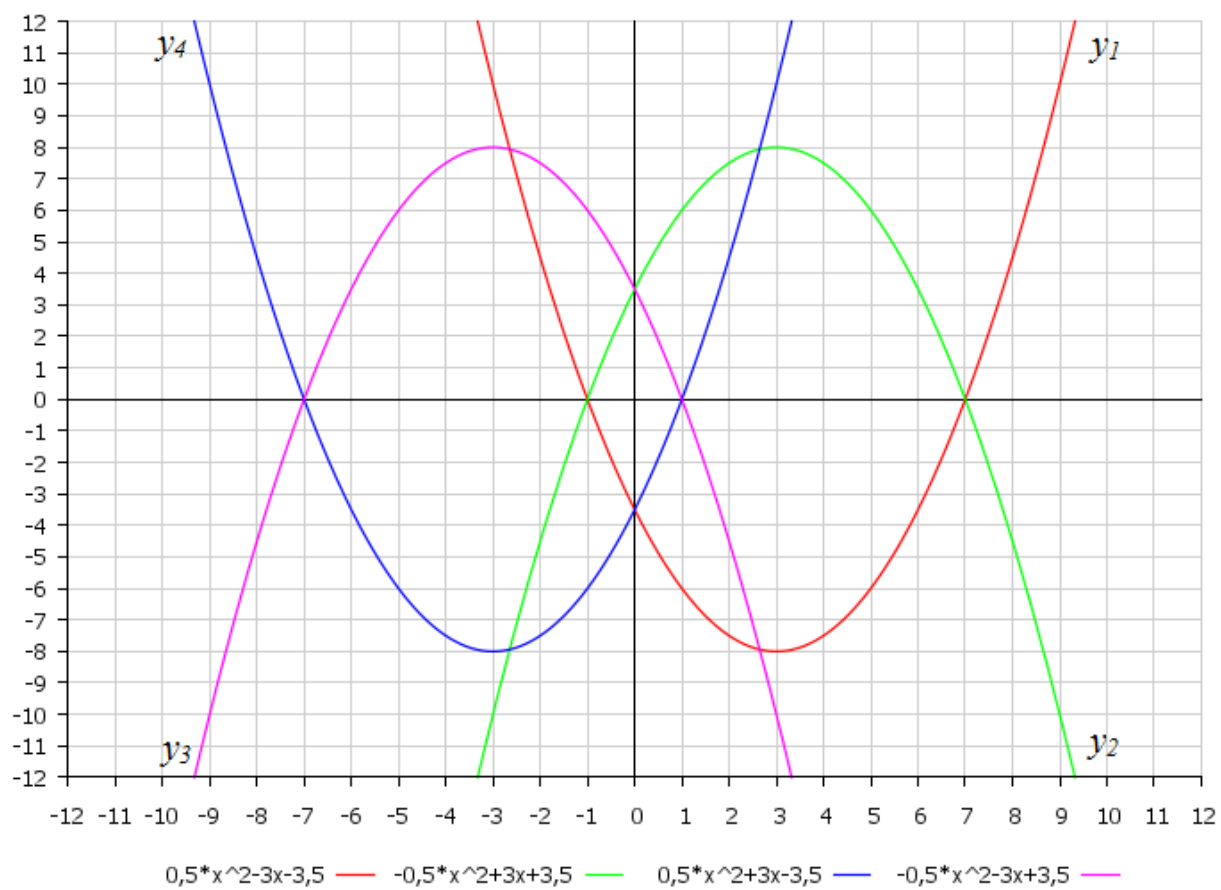
Вид функции	Коорд- ты вершин парабол	Нули функции	Вид уравнения	Вид неравенства	Решение неравенства
	x y	x_1 x_2			
IV четверть					
$y_1 = 0,5x^2 - 3x - 3,5$	3 -8	-1 7	$0,5x^2 - 3x - 3,5 = 0$	$0,5x^2 - 3x - 3,5 > 0$ $-0,5x^2 + 3x + 3,5 < 0$ $0,5x^2 - 3x - 3,5 \geq 0$ $-0,5x^2 + 3x + 3,5 \leq 0$	$x \in (-\infty; -1) \cup (7; +\infty)$ $x \in (-\infty; -1] \cup [7; +\infty)$
I четверть					
$y_2 = -0,5x^2 + 3x + 3,5$	3 8	-1 7	$-0,5x^2 + 3x + 3,5 = 0$	$0,5x^2 - 3x - 3,5 < 0$ $-0,5x^2 + 3x + 3,5 > 0$ $0,5x^2 - 3x - 3,5 \leq 0$ $-0,5x^2 + 3x + 3,5 \geq 0$	$x \in (-1; 7)$ $x \in [-1; 7]$
III четверть					
$y_3 = 0,5x^2 + 3x - 3,5$	-3 -8	-7 1	$0,5x^2 + 3x - 3,5 = 0$	$0,5x^2 + 3x - 3,5 > 0$ $-0,5x^2 - 3x + 3,5 < 0$ $0,5x^2 + 3x - 3,5 \geq 0$ $-0,5x^2 - 3x + 3,5 \leq 0$	$x \in (-\infty; -7) \cup (1; +\infty)$ $x \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$
II четверть					
$y_4 = -0,5x^2 - 3x + 3,5$	-3 8	-7 1	$-0,5x^2 - 3x + 3,5 = 0$	$0,5x^2 + 3x - 3,5 < 0$ $-0,5x^2 - 3x + 3,5 > 0$ $0,5x^2 + 3x - 3,5 \leq 0$ $-0,5x^2 - 3x + 3,5 \geq 0$	$x \in (-7; 1)$ $x \in [-7; 1]$

$$y_1 = 0,5x^2 - 3x - 3,5$$

$$y_2 = -0,5x^2 + 3x + 3,5$$

$$y_3 = 0,5x^2 + 3x - 3,5$$

$$y_4 = -0,5x^2 - 3x + 3,5$$

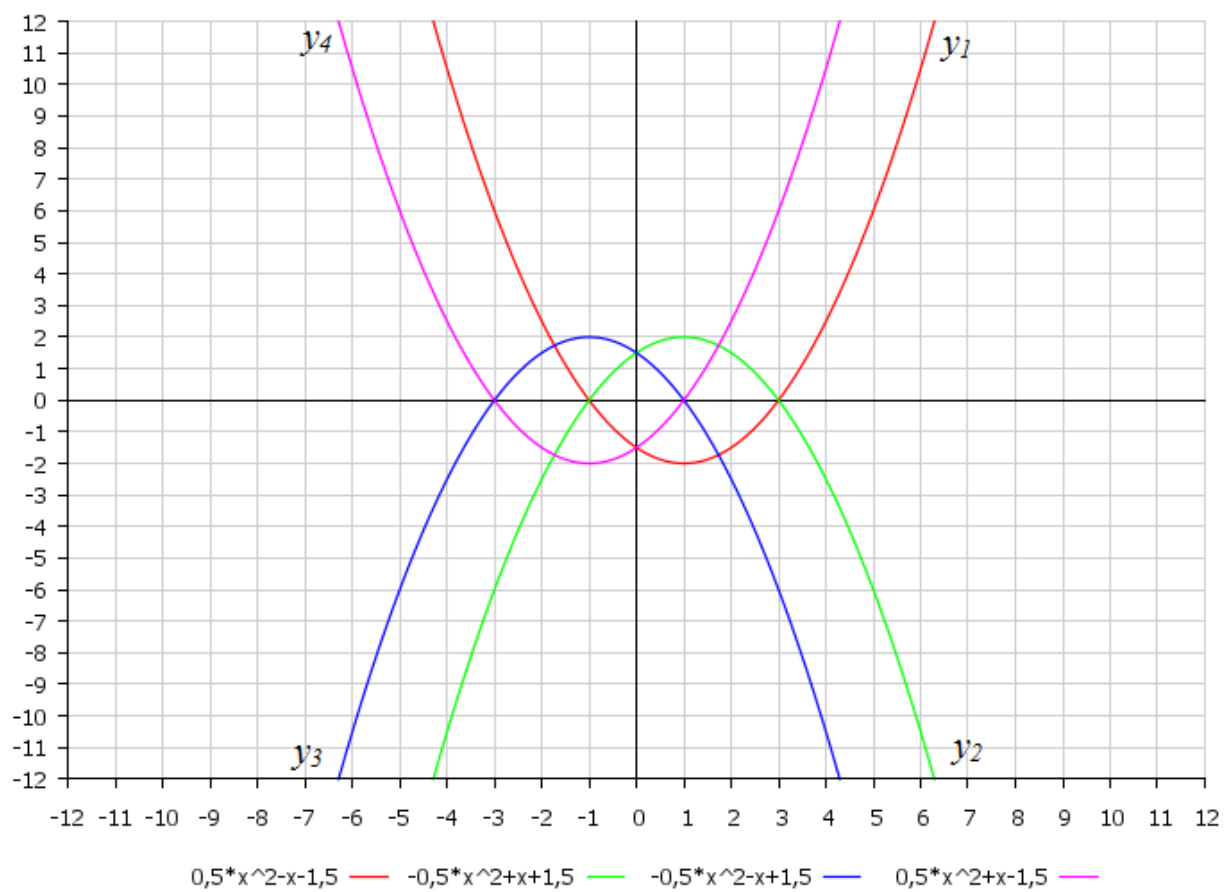


$$y_1 = 0,5x^2 - x - 1,5$$

$$y_2 = -0,5x^2 + x + 1,5$$

$$y_3 = -0,5x^2 - x + 1,5$$

$$y_4 = 0,5x^2 + x - 1,5$$

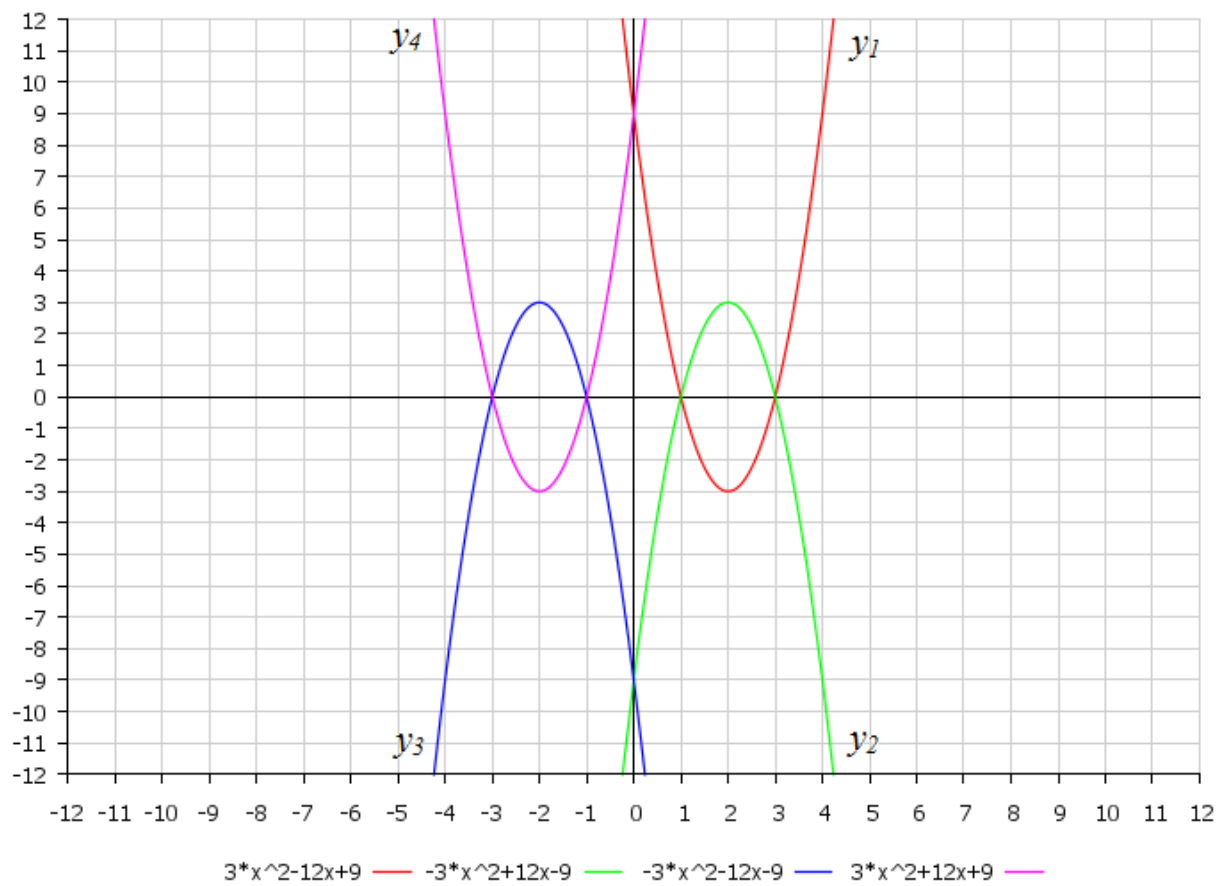


$$y_1 = 3x^2 - 12x + 9$$

$$y_2 = -3x^2 + 12x - 9$$

$$y_3 = -3x^2 - 12x - 9$$

$$y_4 = 3x^2 + 12x + 9$$

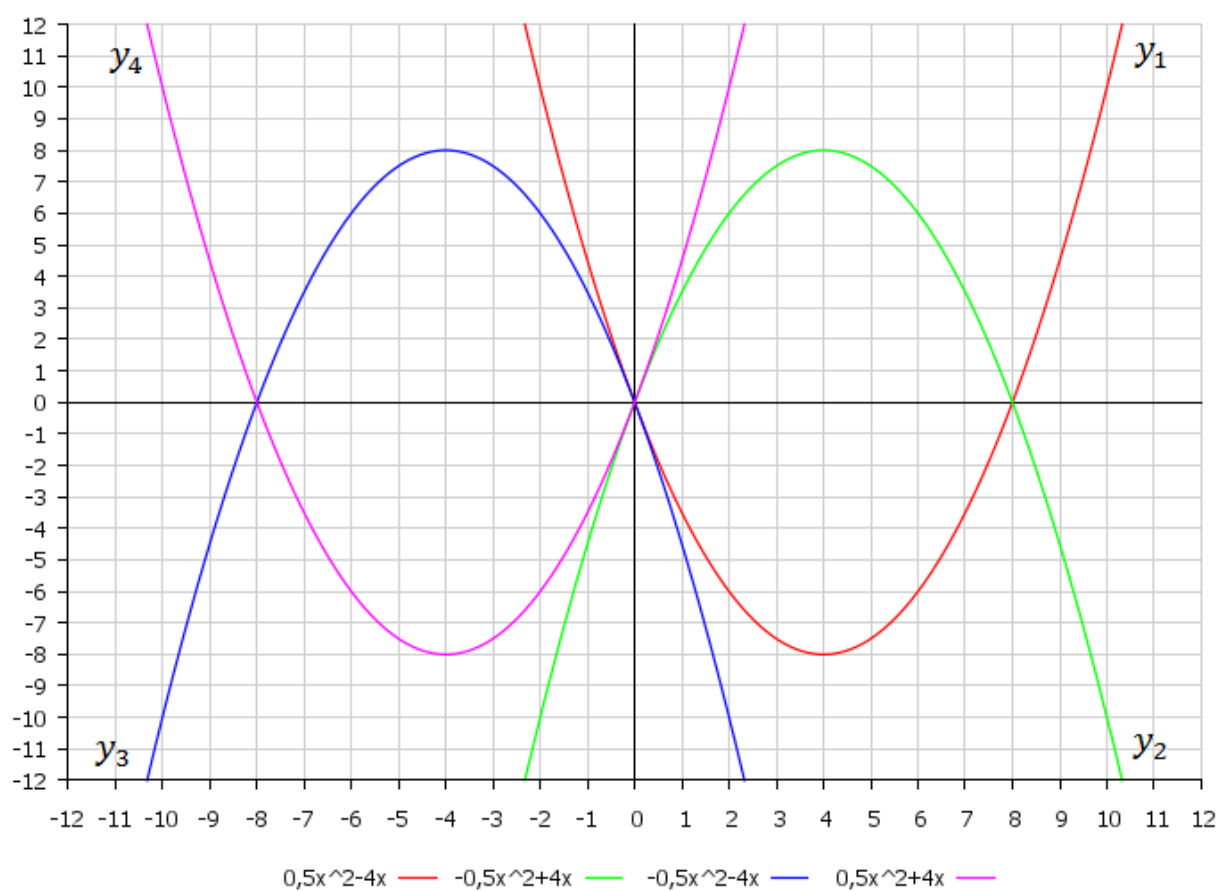


$$y_1 = 0,5x^2 - 4x$$

$$y_2 = -0,5x^2 + 4x$$

$$y_3 = -0,5x^2 - 4x$$

$$y_4 = 0,5x^2 + 4x$$



4. Построение некоторых графиков функций

Предлагаемые нестандартные задания предназначены для отработки и построения основных видов графиков функций, изучаемых в 7-9 классах, нахождения области определения функций, а также активного осмысления понятия модуля.

Задание 1

Построить график функции $y = x + 0 \cdot \sqrt{x + 2}$.

Пусть $f_1(x) = x + 2$,

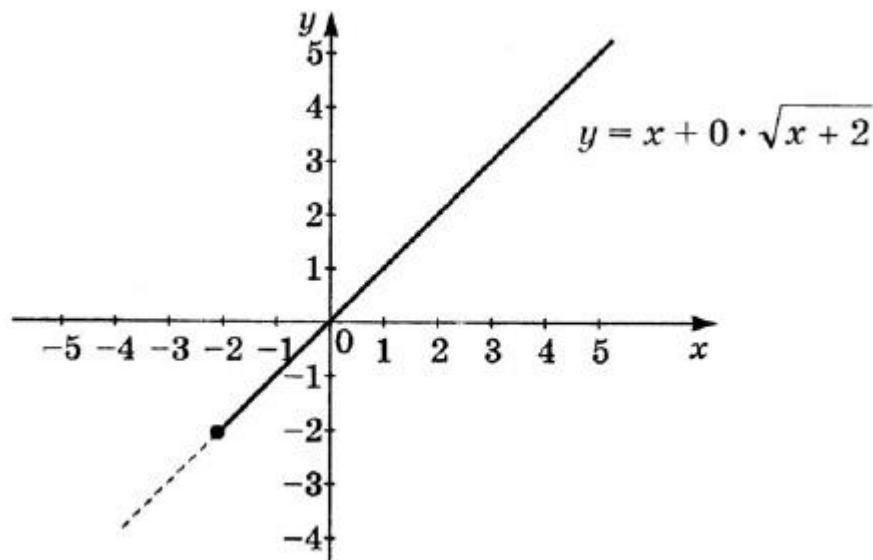
$$f_1(x) \geq 0,$$

$$x + 2 \geq 0,$$

$$x \geq -2,$$

$$f_2(x) = x, x \in (-\infty; +\infty).$$

Значит область определения заданной функции: $x \geq -2$.



Задание 2

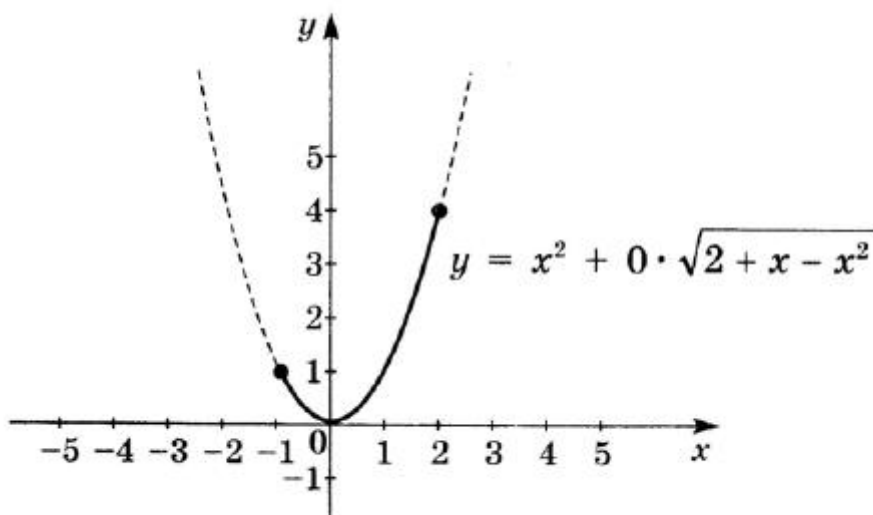
Построить график функции $y = x^2 + 0 \cdot \sqrt{2 + x - x^2}$.

Нули функции: $x^2 - x - 2 = 0, x_1 = 2, x_2 = -1$.

Пусть $f_2(x) = x^2$,

$$x \in (-\infty; +\infty).$$

Значит область определения заданной функции: $-1 \leq x \leq 2$.



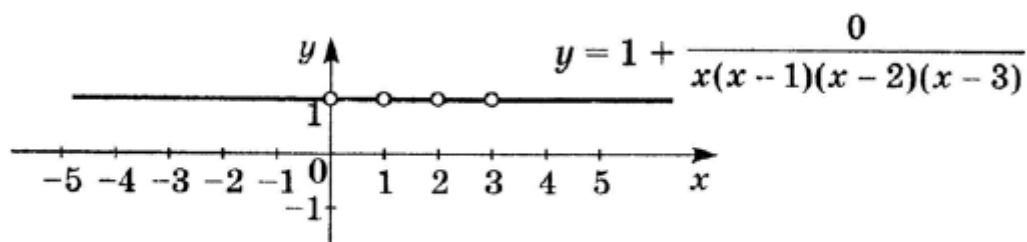
Задание 3

Построить график функции $y = 1 + \frac{0}{x(x-1)(x-2)(x-3)}$.

Пусть $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$,

$x \neq 0; 1; 2; 3$.

Значит область определения заданной функции: x — любое число, кроме чисел $0; 1; 2; 3$.



Задание 4

Построить график функции $y = \frac{2}{x} + \frac{0}{\sqrt{16-x^2}}$.

Пусть $f_1(x) = 16 - x^2$,

$$f_1(x) > 0,$$

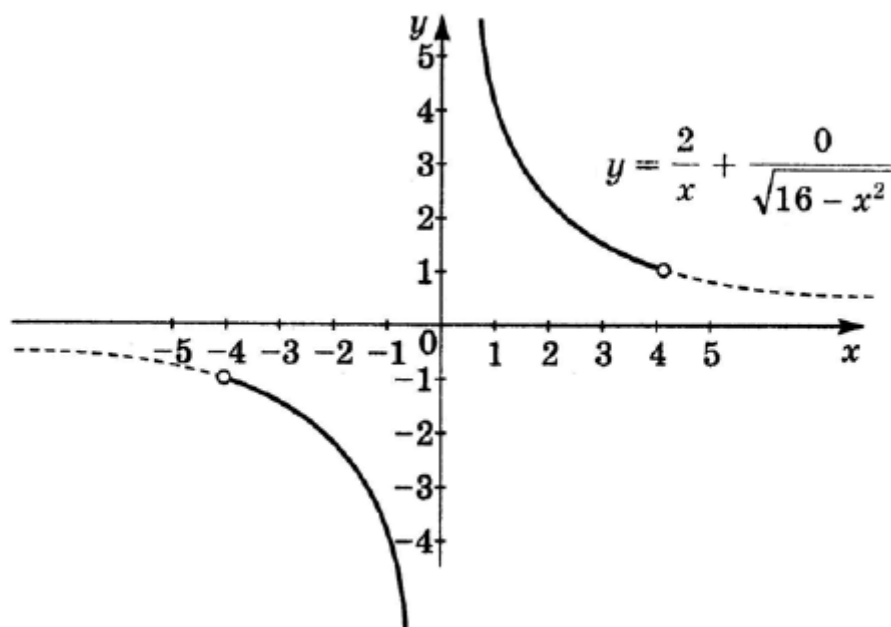
$$16 - x^2 > 0$$

$$(x - 4)(x + 4) < 0$$

$$f_1(x) > 0, \text{ если } -4 < x < 4.$$

Пусть $f_2(x) = \frac{2}{x}, x \neq 0$.

Значит область определения заданной функции: $-4 < x < 4, x \neq 0$.



Задание 5

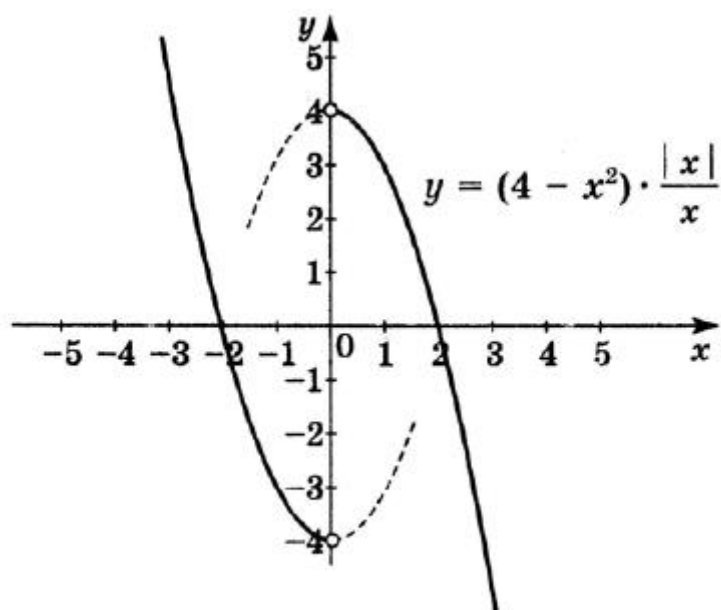
Построить график функции $y = (4 - x^2) \cdot \frac{|x|}{x}$.

Область определения функции: $x \neq 0$.

Чтобы построить график заданной функции, рассмотрим $\frac{|x|}{x}$:

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0 \\ -1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Значит } y = \begin{cases} 4 - x^2, & \text{если } x > 0 \\ x^2 - 4, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$



Задание 6

Построить график функции $y = 4x - x^2 + \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x(x-1)(x-4)}}$.

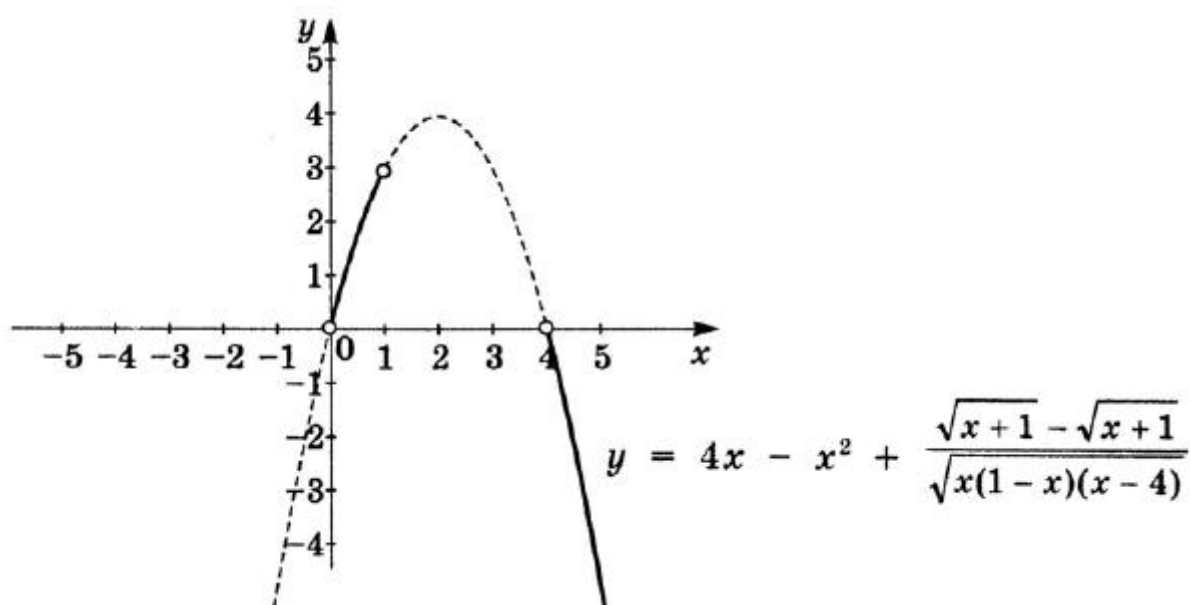
Пусть $f_1(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x(x-1)(x-4)}}$.

Область определения этой функции:

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x(x-1)(x-4) > 0 \end{cases}$$

$y = 4x - x^2$ при $0 < x < 1$ и $x > 4$.

Значит область определения заданной функции: $0 < x < 1$ и $x > 4$.



Задание 7

Построить график функции $y = \sqrt{x+9} \cdot \frac{x-|x|}{2x}$.

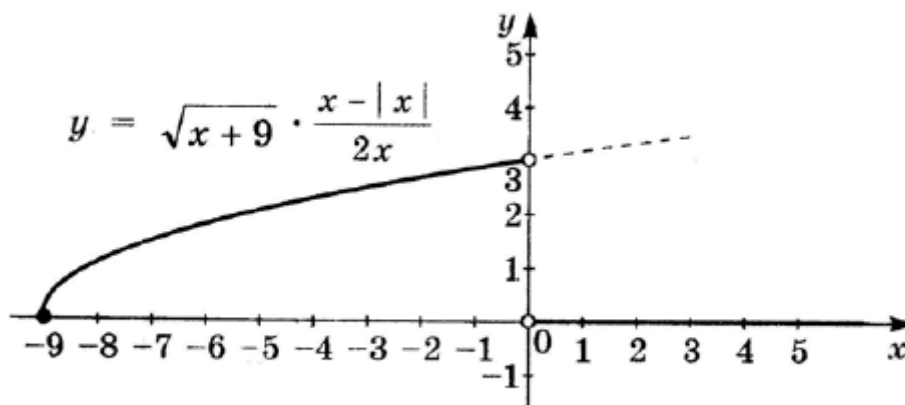
Область определения функции: $x \geq -9$, кроме $x = 0$.

Рассмотрим сомножитель, содержащий модуль числа:

$$\frac{x-|x|}{2x} = \begin{cases} 0, & \text{если } x > 0 \\ \sqrt{x+9}, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Значит, заданная функция принимает вид:

$$y = \begin{cases} 0, & \text{если } x > 0 \\ \sqrt{x+9}, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$



Задание 8

Построить график функции $y = \left(x + \frac{|x|}{x} - 1\right)^2$.

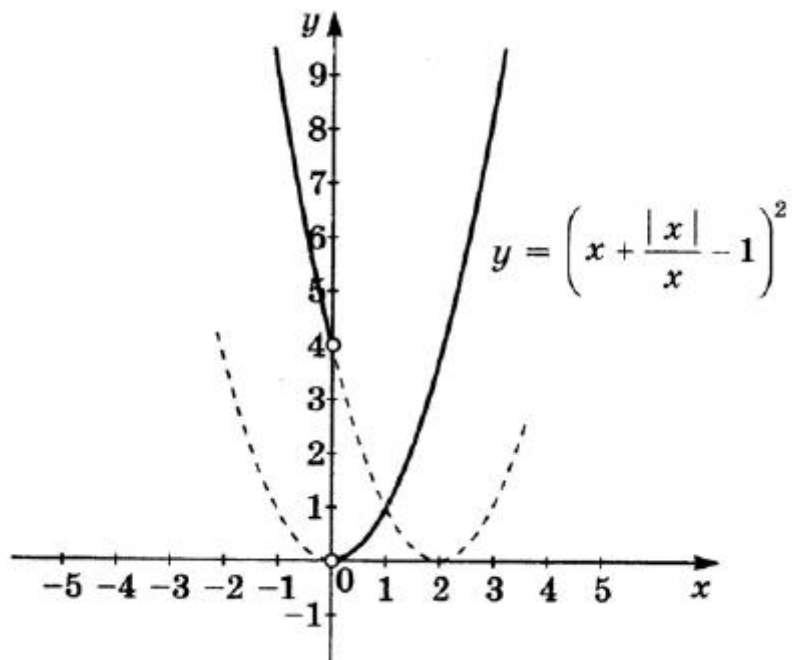
Область определения функции: x – любое число, кроме 0.

Рассмотрим слагаемое $\frac{|x|}{x}$:

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0 \\ -1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Значит, заданная функция принимает вид:

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x > 0 \\ (x - 2)^2, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$



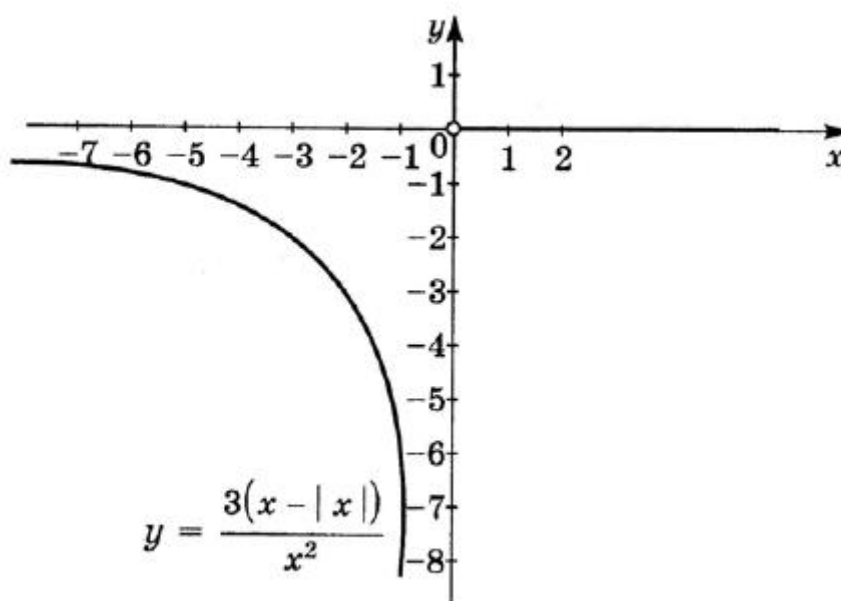
Задание 9

Построить график функции $y = \frac{3(x-|x|)}{x^2}$.

Область определения функции: x – любое число, кроме 0.

Значит, заданная функция имеет вид:

$$y = \begin{cases} 0, & \text{если } x > 0 \\ \frac{6}{x}, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$



Задание 10

Построить график функции:

$$y = (x^2 - 2) \left(\frac{1}{2} - \frac{|x^2 - 4|}{2(x^2 - 4)} \right) + 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{|x^2 - 4|}{2(x^2 - 4)} \right).$$

Область определения функции: x – любое число, кроме $x = \pm 2$.

Посчитаем значение функции для:

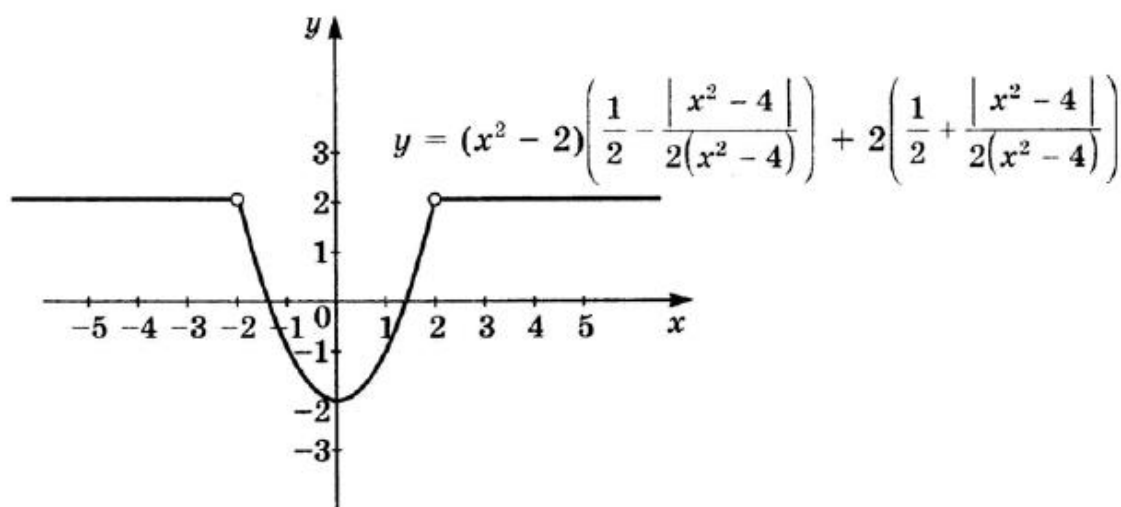
$$x \in (2; +\infty): y = (x^2 - 2) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right), y = 2.$$

$$x \in (-\infty; -2): y = (x^2 - 2) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right), y = 2.$$

$$x \in (-2; 2): y = (x^2 - 2) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right), y = x^2 - 2.$$

Значит, заданная функция имеет вид:

$$y = \begin{cases} 2, & \text{если } x < -2 \text{ или } x > 2 \\ x^2 - 2, & \text{если } -2 < x < 2 \end{cases}.$$



5. Заключение

Решение нестандартных задач является обязательным для учащихся 9 классов.

Систематическая работа по решению задач способствует расширению умений, навыков, подготовке учащихся к обучению в старших классах, глубокому знакомству с нестандартными приемами решения более сложных задач, успешно развивает логическое мышление, умение найти оптимальный способ решения, удобный для учащегося.

В процессе решения нестандартных задач вырабатываются навыки самостоятельной работы, умения работать с учебной книгой и справочной литературой, способствует успешной подготовке учащихся к олимпиадам, конкурсам и является пропедевтикой в старших классах физико-математического и химического профилей.

6. Литература

1. Программа основного общего образования «Математика». 2002 г.
2. Проект федерального компонента государственного стандарта общего образования и федерального базисного учебного плана для образовательных учреждений РФ, реализующих программу общего образования. Приказ Минобразования России и РАО от 29 января 2004 г. №315/2.
3. Бартенев Ф. А. Нестандартные задания по алгебре. – М.: Наука, 1989 г.
4. Кострикина Н. П. Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 7-9 класса. – М.: Просвещение, 1989 г.
5. Кривоногов В. В. Нестандартные задания по математике: 5-11 классы. – М.: Первое сентября, 2003 г.
6. Макарычев Ю.Н. Алгебра 9 класс. Учебник для образовательных учреждений. – М.: Просвещение, 1997 г.
7. Журнал «Математика» – Москва: Первое сентября, №30, 36, 2003 г.
8. Журнал «Математика в школе», №10, 2003 г.