

Параметры

Омелькова М. С., методист ОГБОУ ДПО «КОИРО»



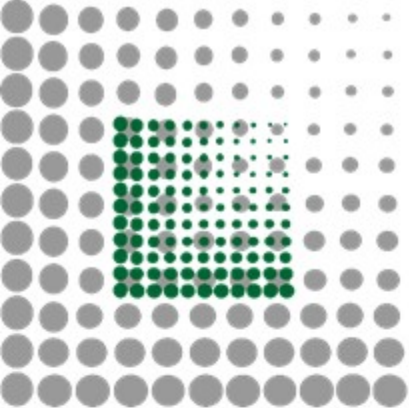
Введение

Известно, что в программах по математике в неспециализированных классах задачам с параметрами отводится незначительное место. С параметрами учащиеся встречаются при введении линейной функции $y = kx + b$, уравнения первой степени $ax + b = 0$ и квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Понятие параметра позволяет решать поставленные задачи не в частном, а в общем виде. Позволяет посмотреть на проблему более широко.

Владение приемами решения задач с параметрами можно считать критерием знаний основных разделов школьной математики, уровня математического и логического мышления.

Задачи с параметрами дают прекрасный материал для настоящей учебно-исследовательской работы.



Особенности заданий с параметрами

В самом начале знакомства с параметрами у учеников возникает психологический барьер, который обусловлен противоречивыми характеристиками параметра. С одной стороны, параметр следует считать величиной известной, а с другой — конкретное значение параметра не дано. С одной стороны, параметр является величиной постоянной, а с другой — может принимать различные значения.

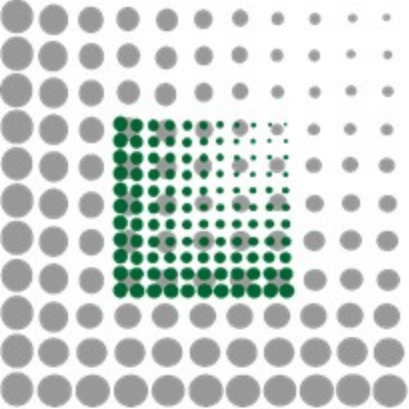
Получается, что параметр в условии — это «неизвестная величина», «переменная постоянная». Этот «каламбур» довольно точно отражает суть тех сложностей, которые нужно преодолеть ученикам.

К задачам с параметрами, рассматриваемым в школьном курсе, можно отнести, например, поиск решений линейных и квадратных уравнений в общем виде, исследование количества их корней в зависимости от значений параметров.

Такой небольшой класс задач многим не позволяет усвоить главное: параметр, будучи фиксированным, но неизвестным числом, имеет как бы двойственную природу. Во-первых, предполагаемая известность позволяет «общаться» с параметром как с числом, а во-вторых, - степень свободы общения ограничивается его неизвестностью.

Основное, что нужно усвоить при работе с параметром, - необходимость осторожного обращения с фиксированным, но неизвестным числом.

Рассмотрим решение некоторых задач с параметрами на уроках повторения, обобщения и систематизации знаний.



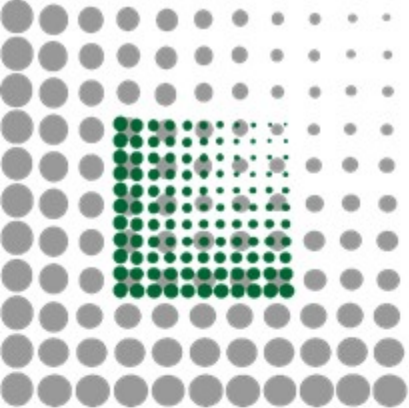
Вводная информация

Главное, что должен усвоить школьник это то, что параметр – это число, хоть и неизвестное, но фиксированное, имеющее двойственную природу.

После этих вступительных слов можно спросить у школьников встречались ли они с параметрами.

Это линейная функция $y=kx+b$, где x и y – переменные, k и b – параметры; квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$, где x - переменная a, b, c , - параметры.

Задачи надо начинать решать с очень простых, постепенно усложняя их.

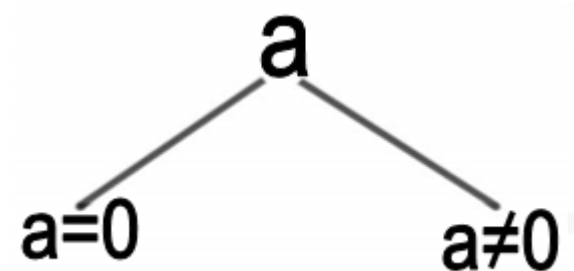


Решить уравнение $ax=2$

1) если $a=0$, то $0 \cdot x = 2$, решений нет

2) если $a \neq 0$, то $x = \frac{2}{a}$

Ответ: если $a=0$, то решений нет, если $a \neq 0$, то $x = \frac{2}{a}$





Решить уравнение $(a^2-9)x=a+3$

Решение:

1) если $a = 3$, то $0 \cdot x = 6$, решений нет

2) если $a = -3$, то $0 \cdot x = 0$, $x \in \mathbb{R}$

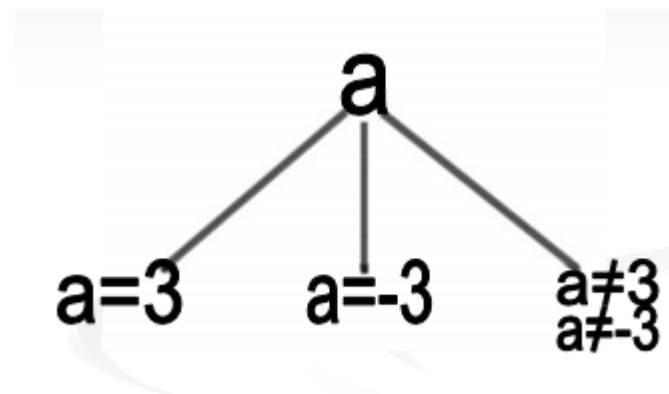
3) если $a \neq \pm 3$, то $a^2 - 9 \neq 0$, $x = \frac{a+3}{a^2-9}$;

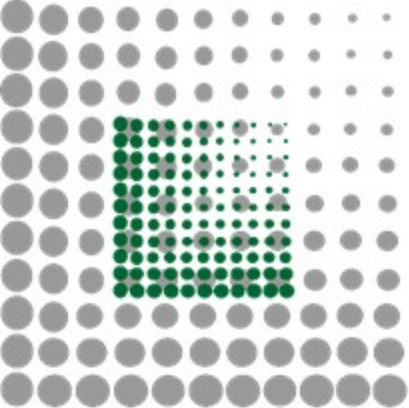
$$x = \frac{1}{a-3}$$

Ответ: если $a=3$, то решений нет

если $a=-3$, то $x \in \mathbb{R}$

если $a \neq \pm 3$, то $x = \frac{1}{a-3}$





Решить уравнение $\frac{x-a}{x+3} = 0$

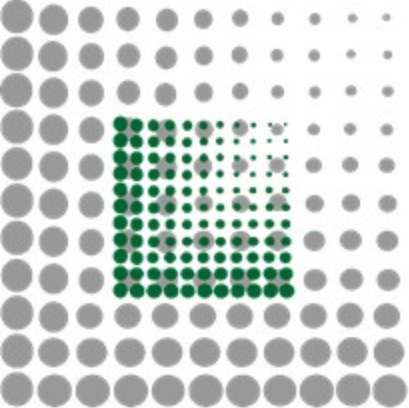
Решение: $\frac{x-a}{x+3} = 0$

$$\begin{cases} x - a = 0 \\ x + 3 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a \\ x \neq -3 \end{cases}$$

Ответ: если $a = -3$, то решений нет

если $a \neq -3$, то $x = a$.



При каких a уравнение
имеет единственное решение?
 $(a - 2)x^2 + (4 - 2a)x + 3 = 0$

Решение:

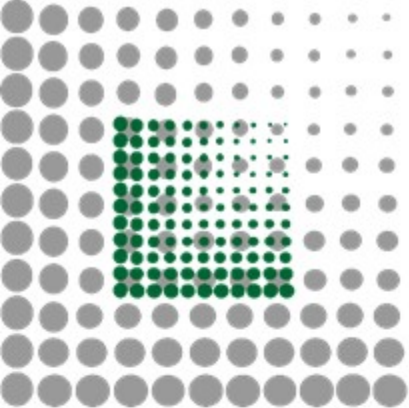
1) если $a=2$, то решений нет

2) если $a \neq 2$, то уравнение имеет единственное решение при $D=0$

$$\frac{D}{4} = (2 - a)^2 - (a - 2)3 = a^2 - 7a + 10$$

$$\frac{D}{4} = 0 \Leftrightarrow a^2 - 7a + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ a = 2 \end{cases}$$

Ответ: при $a=5$



Выяснить, при каких значениях параметра a уравнение $5(4 - a)x^2 - 10x - a = 0$ имеет:

- 1) два различных корня;
- 2) не более одного корня;
- 3) два корня различных знаков;
- 4) два положительных корня.

а) $4 - a = 0$

$$a = 4 \quad 0 \cdot x^2 - 10 \cdot x - 4 = 0 \quad x = -0,4 - \text{один корень}$$

б) $a \neq -4$ уравнение квадратное

$$D = 100 + 4 \cdot a \cdot 5 \cdot (4 - a) = -20a^2 + 80a + 100 = -20(a + 1)(a - 5)$$



$5(4 - a)x^2 - 10x - a = 0$
не более одного корня

два различных корня,

Два различных корня

$$\begin{cases} D > 0 \\ a \neq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -20(a + 1)(a - 5) > 0 \\ a \neq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a + 1)(a - 5) < 0 \\ a \neq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 < a < 5 \\ a \neq 4 \end{cases}$$

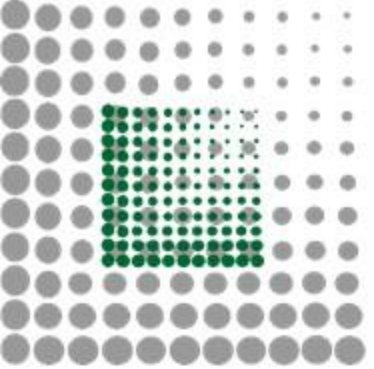
$$a \in (-1; 4) \cup (4; 5)$$

Не более одного корня

$$\begin{cases} D \leq 0 \\ a = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \in (-\infty; -1] \cup [5; +\infty) \\ a = 4 \end{cases}$$

$$a \in (-\infty; -1] \cup \{4\} \cup [5; +\infty)$$



Выяснить, при каких значениях параметра a уравнение $5(4-a)x^2 - 10x - a = 0$ имеет:

два корня различных знаков

уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня различных

знаков тогда и только тогда, когда $\frac{c}{a} < 0$ значит

$$\frac{-a}{5(4-a)} < 0 \Leftrightarrow a \in (0;4)$$

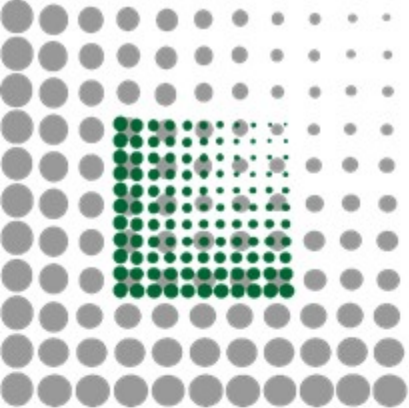
два положительных корня

$$\begin{cases} D > 0, \\ 4 - a \neq 0, \\ \frac{c}{a} > 0, \\ \frac{b}{a} < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 - a \neq 0, \\ a^2 - 4a - 5 < 0, \\ \frac{-a}{5(4-a)} > 0, \\ \frac{-10}{5(4-a)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-1;5), \\ a \neq 4, \\ a \in (-\infty;0) \cup (4;\infty), \\ a < 4 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-1;0)$$



ОГРАНИЧЕНИЕ НА РАСПОЛОЖЕНИЕ КОРНЕЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ $f(x) = x^2 + px + q$	ЭСКИЗ ГРАФИКА КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ $f(x) = x^2 + px + q$	НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ДЛЯ ПРИВЕДЕННОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ГРАФИКА
1. Оба корня больше заданного числа A		$\begin{cases} D \geq 0, \\ f(A) > 0, \\ x_0 > A. \end{cases}$
2. Оба корня меньше заданного числа B		$\begin{cases} D \geq 0, \\ f(B) > 0, \\ x_0 < B. \end{cases}$
3. Оба корня лежат в интервале $(A; B)$		$\begin{cases} D \geq 0, \\ f(A) > 0, \\ f(B) > 0, \\ A < x_0 < B. \end{cases}$
4. Отрезок $[A; B]$ лежит между корнями		$\begin{cases} f(A) < 0, \\ f(B) < 0. \end{cases}$
5. Заданное число A лежит между корнями		$f(A) < 0.$
6. Только меньший корень входит в интервал $(A; B)$		$\begin{cases} f(A) > 0, \\ f(B) < 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(A) > 0, \\ f(B) = 0, \\ x_0 < B. \end{cases}$
7. Только больший корень входит в интервал $(A; B)$		$\begin{cases} f(A) < 0, \\ f(B) > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(B) > 0, \\ f(A) = 0, \\ x_0 > A. \end{cases}$



Задачи, сводящиеся к исследованию квадратного трёхчлена

Задачу можно сформулировать так: найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\frac{z^2 - 2az + a}{1 - 2z} = 3$ имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию $0 < z \leq 1$.

Перейдем к системе:

$$\begin{cases} z^2 - 2az + a = -6z + 3, \\ z \neq 0,5, \\ 0 < z \leq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 - 2(a-3)z + a - 3 = 0, \\ z \neq 0,5, \\ 0 < z \leq 1. \end{cases}$$

Заметим, что ни при одном значении a число $z = 0,5$ не является корнем уравнения.

Рассмотрим функцию $f(z) = z^2 - 2(a-3)z + a-3$. Её график — парабола, ветви которой направлены вверх. Следовательно, условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда выполняется одно из трех условий:

1) Трёхчлен имеет два различных корня, и только больший из них лежит на промежутке $(0; 1]$ (см.рис. 1), то

есть
$$\begin{cases} f(0) < 0, \\ f(1) \geq 0. \end{cases}$$

2) Трёхчлен имеет два различных корня, и только меньший из них лежит на промежутке $(0; 1]$ (см.рис. 2),

то есть
$$\begin{cases} f(0) > 0, \\ f(1) \leq 0. \end{cases}$$

3) Трёхчлен имеет два корня, возможно, совпадающих, и оба лежат на промежутке $(0; 1]$ (см.рис. 3), то есть

$$\begin{cases} f(0) > 0, \\ f(1) \geq 0, \\ f(z_0) \leq 0, \end{cases} \quad \text{где } z_0 \text{ — абсцисса вершины параболы.}$$

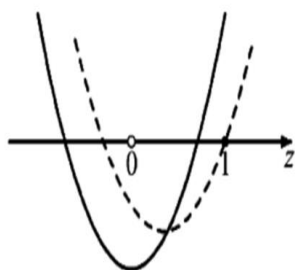


Рис. 1

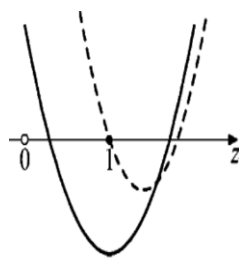


Рис. 2

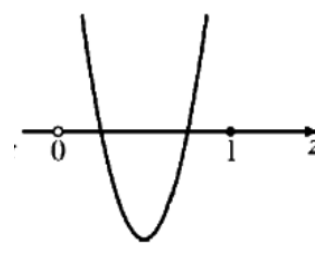


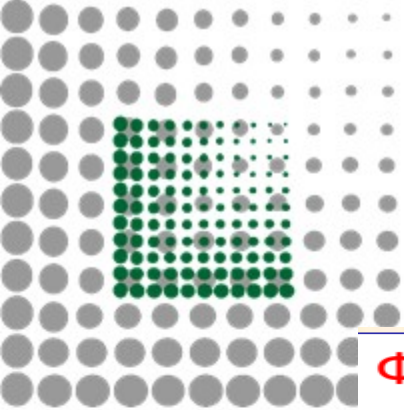
Рис. 3

Решим систему:
$$\begin{cases} a-3 < 0, \\ 1-a+3 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 3, \\ a \leq 4; \end{cases} \Leftrightarrow a < 3.$$

Решим систему:
$$\begin{cases} a-3 > 0, \\ 1-a+3 \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 3, \\ a \geq 4; \end{cases} \Leftrightarrow a \geq 4.$$

Решим систему:
$$\begin{cases} a-3 > 0, \\ 1-2(a-3)+a-3 \geq 0, \\ (a-3)^2 - 2(a-3)^2 + a-3 \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 3, \\ a \leq 4, \\ a \geq 4, \end{cases} \text{откуда } a = 4.$$

Ответ: $a < 3, a \geq 4$.



Функциональный метод

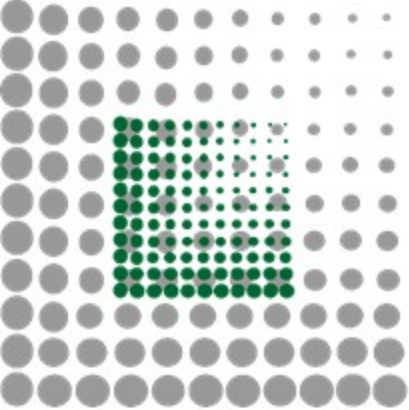
Функциональный метод решения уравнений и неравенств (в том числе и с параметрами) является составной частью и естественным развитием функциональной линии обучения математике.

Рассмотрение функционального метода в программе средней школы на базовом уровне носит эпизодический характер.

Наиболее часто используются следующие свойства функций:

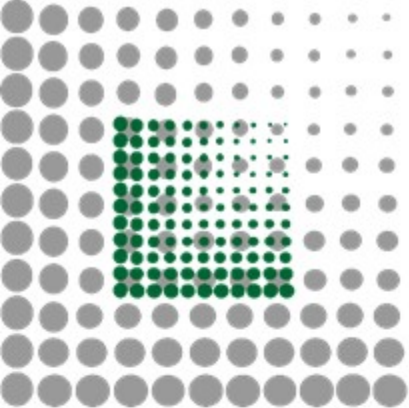
- свойства ограниченности области определения или области значения функции (в частности, *методы оценки и минимакса*);
- свойства четности и нечетности входящих в уравнение или неравенство функций;
- кусочная монотонность большинства алгебраических и элементарных трансцендентных функций входящих в уравнение или неравенство (в частности, на этом основан *метод рационализации*);
- периодичность функций и др..

В отличие от графического метода, знание этих свойств функций позволяет находить точные корни уравнения без построения графиков функций.



Классификация задач, решаемых функциональными методами

1. Исследование свойств функции $y = f(x; a)$ в зависимости от значения параметра a
2. Формулировки свойств функции позволяют рассматривать параметр не только в формуле, но и при задании области существования функции.
3. Постановка дополнительных условий на свойства функции (количество нулей функции, ограничение на наибольшее значение функции и др.)



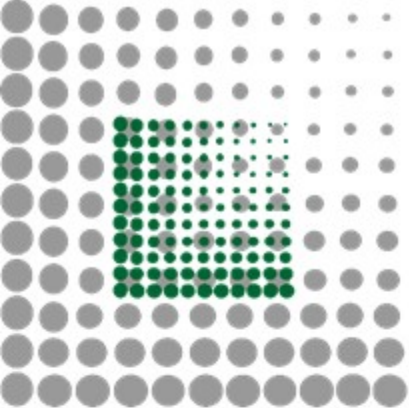
Метод оценки (минимакса)

Пусть для функций $f(x)$ и $g(x)$ на $D(f) \cap D(g)$ выполняются неравенства $f(x) \geq A$, $g(x) \leq A$ и требуется решить уравнение $f(x) = g(x)$. Тогда

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A \end{cases}$$

Наиболее часто этот метод применяется в случаях, когда функции, стоящие в левой и правой частях уравнения – разного типа

Решить уравнение $2^{|x-a|} = \cos^2 x$



МОНОТОННОСТЬ ФУНКЦИИ

Найдите все значения параметра a , при котором уравнение

$$\sin^{14} x + (a - 3 \sin x)^7 + \sin^2 x + a = 3 \sin x$$

имеет хотя бы одно решение.

Запишем уравнение в виде:

$$\sin^{14} x + \sin^2 x = (3 \sin x - a)^7 + (3 \sin x - a).$$

Рассмотрим функцию $f(t) = t^7 + t$. Она возрастает на всей области определения.

Исходное уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда $f(\sin^2 x) = f(3 \sin x -$



Функционально- графический метод

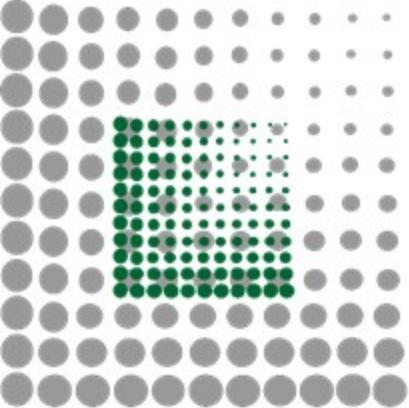
В задачах (уравнение, неравенство, система уравнений или неравенств)

вида $F(x, a) \vee 0$ или $f(x, a) \vee g(x, a)$ или
$$\begin{cases} F_1(x, y, a) \vee 0, \\ F_2(x, y, a) \vee 0, \end{cases} \quad (1)$$

где символ $\vee$ заменяет один из знаков $=, >, <, \geq, \leq$, часто ставится вопрос исследовать (1) на: – наличие решений или их отсутствие, – единственность решения или наличие определенного количества решений, – наличие решений определенного типа и т.д.

Для решения подобных задачи можно применять графический метод решения (*метод наглядной графической интерпретации*), основанный на использовании графических образов, входящих в (1) выражений.

Графиком функции $y = f(x)$, $x \in D(f)$ называется множество всех точек координатной плоскости Oxy вида $(x, f(x))$, где $x \in D(f)$.



Функционально- графический метод

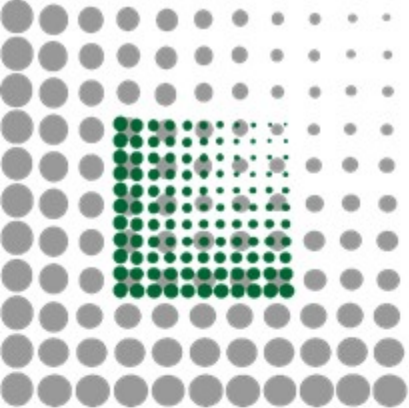
Рассмотрим часто встречающиеся в подобных задачах семейства функций $y_a(x) = g(x, a)$ или уравнения $G(x, y, a) = 0$ и их графики.

1. Семейство линейных функций $g(x, a) = a(x - x_0) + y_0$, графики которых - прямые, проходящие через точку (x_0, y_0) и имеющие угловой коэффициент, равный a («**пучок прямых**» – так обычно называют это семейство графиков).

2. Семейство функций $g(x, a) = k |x - x_0(a)| + y_0(a)$, графики которых получаются из графика $y = k |x|$ параллельным переносом на вектор $\{x_0(a), y_0(a)\}$ (семейство «**уголков**»).

3. **Семейство окружностей** $(x - x_0(a))^2 + (y - y_0(a))^2 = (r(a))^2$ с центром в точке $(x_0(a), y_0(a))$, радиуса $|r(a)|$.

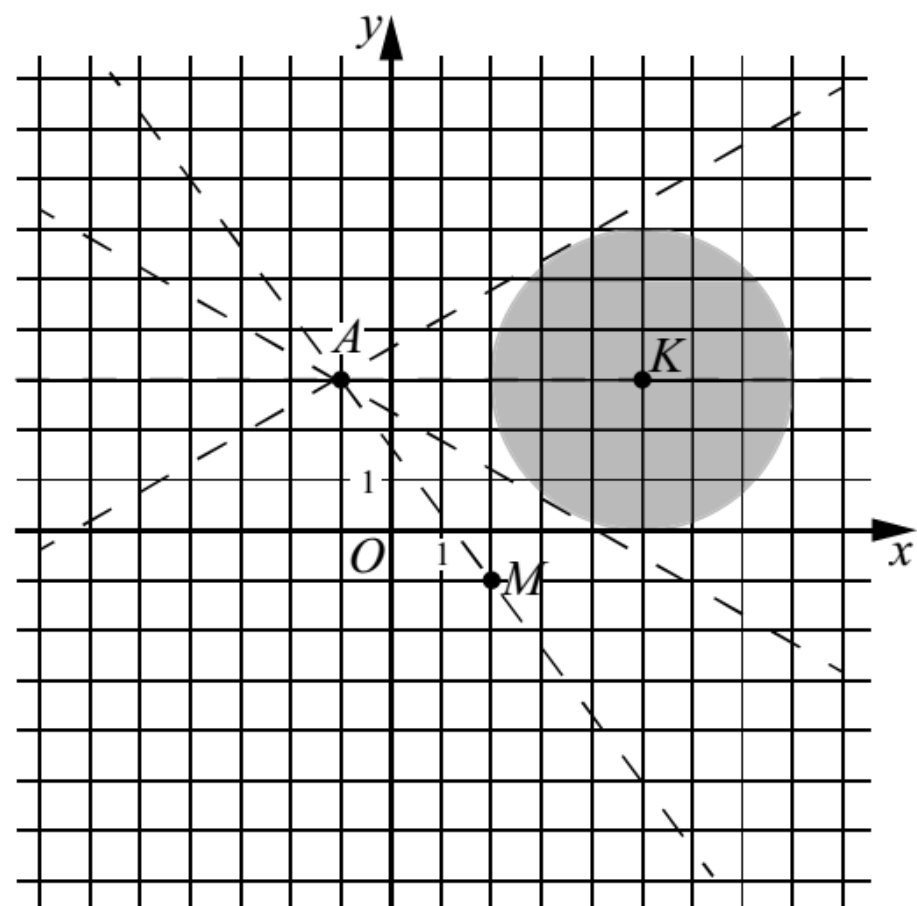
При решении уравнения (неравенства) вида $f(x) \vee a$ на плоскости Oxa строятся график функции $f(x)$ (назовем его «**неподвижным**») и прямые $a = \text{const}$ параллельные оси Ox . Далее в соответствии с условием задачи исследуется расположение построенных графиков.



Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} ((x-5)^2 + (y-3)^2 - 9)((x-2)^2 + (y+1)^2) \leq 0, \\ y = ax + a + 3 \end{cases}$$

не имеет решений.



Ответ: $\left(-\infty; -\frac{4}{3}\right); \left(-\frac{4}{3}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right); \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right).$



Заключение

Все рассмотренные упражнения имеют дидактическую цель — помочь учащимся составить представление о параметре, о том, что значит решить уравнение (неравенство) с параметром. Предложенные упражнения помогают им осмыслить всего несколько строк определения: «Пусть дано уравнение (неравенство) $f(x; a) = (>) 0$ с переменными x, a . Если ставится задача для каждого значения a решить это уравнение (неравенство) относительно x , то уравнение (неравенство) $f(x; a) = (>) 0$ называется уравнением (неравенством) с переменной x и параметром a . Решить уравнение (неравенство) с параметром a — это значит для каждого значения a найти значение x , удовлетворяющее этому уравнению (неравенству)».



Заключение

Задачи с параметрами обладают большим потенциалом в развитии интеллектуальных качеств личности, так как развивают исследовательские способности, учат творчески мыслить, помогают сформировать и развить творческое мышление. Эти задачи должны включаться в школьный курс математики начиная с 7 класса. Конечно, уровень сложности заданий должен определяться уровнем подготовки всего класса в целом и каждого ученика в отдельности.

В своей работе я постаралась составить версию обучения учащихся решению уравнений и неравенств с параметрами с подборкой основных заданий разного уровня, а также продемонстрировать важность обучения учащихся таким задачам, обосновать целесообразность обучения умению их решать, проанализировать подходящие для этого задания.

Основной вывод работы-такие задачи должны составлять самостоятельную линию обучения в математике.