Решения задач олимпиады для учителей и преподавателей математики 28.03.2023

1. Коэффициенты уравнения $x^2 + px + q = 0$ подобраны так, что $p + q = 16$, и уравнение имеет целые корни. Найдите все возможные значения q.

   Решение: По теореме Виетта: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$

   $\mathrm{p} + q = x_1 \cdot x_2 - (x_1 + x_2) = 16$

   $x_1 \cdot x_2 - x_1 - x_2 = 16$

   $x_1 \cdot (x_2 - 1) - x_2 = 16$

   $x_1 \cdot (x_2 - 1) - x_2 + 1 = 16 + 1$

   $x_1 \cdot (x_2 - 1) - (x_2 - 1) = 17$

   $(x_1 - 1) \cdot (x_2 - 1) = 17$

   $\begin{cases} x_1 - 1 = 1 \\ x_2 - 1 = 17 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 18 \end{cases}$ $q = 36$

   $\begin{cases} x_1 - 1 = -1 \\ x_2 - 1 = -17 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -16 \end{cases}$ $q = 0$

   $\begin{cases} x_1 - 1 = 17 \\ x_2 - 1 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 18 \\ x_2 = 2 \end{cases}$ $q = 36$

   $\begin{cases} x_1 - 1 = -17 \\ x_2 - 1 = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = -16 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ $q = 0$

   Ответ: 0 или 36

2. Витя складывает дроби так: прибавляет числитель к числителю и знаменатель к знаменателю. Он сложил некоторую положительную правильную несократимую дробь с $\frac{1}{8}$. Результат оказался ровно в 2 раза меньше, чем правильный ответ. Сколько дробей подходит под это условие?

   Решение: Сложим дроби по правилу Вити: $\frac{a}{b} + \frac{1}{8} = \frac{a+1}{b+8}$

   На самом деле при сложении дробей получим $\frac{a}{b} + \frac{1}{8} = \frac{8a+b}{8b}$.

   По условию задачи составим уравнение: $2 \cdot \frac{a+1}{b+8} = \frac{8a+b}{8b}$

   $$\frac{2a+2}{b+8} = \frac{8a+b}{8b}$$

   $$(2a+2) \cdot 8b = (b+8) \cdot (8a+b)$$

   $$b^2 + 64a - 8ab - 8b = 0$$

   $(b-8) \cdot (b-8a) = 0$, значит $\left[\begin{array}{l} b = 8 \\ b = 8a \end{array}\right.$

   Так как дробь должна быть положительная правильная несократимая, то нам подходят следующие дроби $\frac{1}{8}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{7}{8}$

Ответ: 4 дроби

3. Школьник хочет купить портфель, толстую тетрадку и учебник. Если бы портфель стоил в 5 раз меньше, тетрадка в 2 раза меньше, а учебник в 2,5 раза меньше, то покупка обошлась бы в 800 рублей. А если бы портфель стоил в 2 раза меньше, тетрадка в 4 раза меньше, а учебник в 3 раза меньше, то покупка обошлась бы в 1200 рублей. Сколько стоит покупка?

   Решение: Пусть x– стоимость портфеля, y– стоимость тетради, z– стоимость учебника. Тогда

$$\begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2{,}5} = 800 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 5y + 4z = 8000 \\ 6x + 3y + 4z = 14400 \end{cases}$$

   Сложим оба уравнения, получим $8x + 8y + 8z = 22400$

$$x + y + z = 2800$$

   Ответ: 2800

4. Из пункта A в пункт B, расположенный ниже по течению, выходят две моторные лодки. Каждая лодка доходит до пункта B и возвращается в пункт A. Скорость второй лодки на 40% больше, и времени на всё путешествие у неё уходит на 30%меньше. Найдите отношение времени, которое затрачивает на путь от A до B первая лодка, к аналогичному времени для второй лодки.

   Решение: Пусть x – собственная скорость первой лодки, v – скорость течения реки. Составим таблицу по условию задачи.

	S, км	V,км/ч	t,ч
Первая по течению	1	$x + v$	$\frac{1}{x+v}$
Первая против теч	1	$x - v$	$\frac{1}{x-v}$
Вторая по течению	1	$1{,}4x + v$	$\frac{1}{1{,}4x+v}$
Вторая против теч	1	$1{,}4x - v$	$\frac{1}{1{,}4x-v}$

Так как времени на всё путешествие у второй лодки уходит на 30%меньше, то составим уравнение

$$\frac{1}{x+v} + \frac{1}{x-v} = 0{,}7 \cdot \left(\frac{1}{1{,}4x+v} + \frac{1}{1{,}4x-v}\right)$$

$$\frac{2x}{(x-v)(x+v)} = \frac{2{,}8x}{(1{,}4x+v)(1{,}4x-v)}$$
$$2x^2 - 2v^2 = 1{,}96x^2 - v^2$$
$$v = 0{,}2x$$

Отношение времени равно: $\frac{\frac{1}{x+0{,}2x}}{\frac{1}{1{,}4x+0{,}2x}} = \frac{1{,}6x}{1{,}2x} = \frac{4}{3}$

Ответ: $\frac{4}{3}$

5. У мамы Малыша есть сковородка, на которой она может жарить либо одну тефтельку, либо ломтик колбасы. За день она успевает пожарить 99 тефтелек. За время, пока мама Малыша жарит одну тефтельку, она может успеть пожарить 4 ломтика колбасы. Карлсон за день может съесть не более 150 приготовленных мамой тефтелей или кусочков колбасы. Каждой тефтельке Карлсон радуется в два раза больше, чем кусочку колбасы. Сколько тефтелек и ломтиков колбасы следует приготовить маме Малыша, чтобы радость Карлсона в этот день была максимальной?

   Решение: Пусть t – количество тефтелек, k – количество кусочков колбасы. По условию $t + k \leq 150$. Радость выражается формулой $\mathrm{P} = 2t + 4k$. Так как мама за день успевает пожарить 99 тефтелек, то количество приготовленного выражается формулой $t + (99 - t) \cdot 4 \leq 150$

   $-3t \leq -246$

   $t \geq 82$

   $\mathrm{P} = 2t + 4k = 2t + 4(99 - t) = 396 - 2t$

   Наибольшеее значение достигается при $\mathrm{t} = 82$. Тогда $\mathrm{k} = 4(99 - 82) = 68$

   Ответ: 82 тефтельки и 68 ломтиков колбасы

6. Сколько слагаемых содержится в сумме. Найдите сумму.

   $\frac{1}{5 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 19} + \ldots + \frac{1}{698 \cdot 705}$?

   Решение:

   Слагаемых в сумме столько же, сколько членов в арифметической прогрессии $a_1 = 5, a_n = 698, d = 7.$
   Используем формулу: $a_n = a_1 + d(n-1)$
   $698 = 5 + 7(n-1)$
   $693 : 7 = n - 1$
   $n = 100$
   Найдем сумму

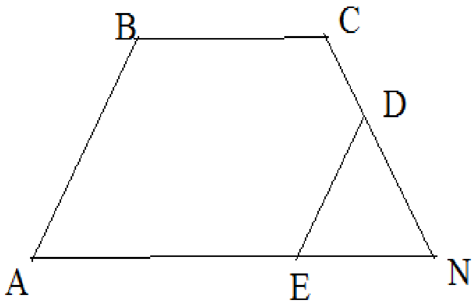
$$\frac{1}{5\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 19}+\cdots+\frac{1}{698\cdot 705}=\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{12}+\frac{1}{12}-\frac{1}{19}+\cdots+\frac{1}{698}-\frac{1}{698}+\frac{1}{705}\right)=\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{12}+\frac{1}{12}-\frac{1}{19}+\cdots+\frac{1}{698}-\frac{1}{705}\right)=\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{705}\right)=\frac{4}{141}$$

Ответ: 100 слагаемых, сумма равна $\frac{4}{141}$

7. В пятиугольнике ABCDE угол A равен 60^0, а остальные углы равны между собой; ED=2, DC=3. Найдите длину отрезка AB.

Решение:

Так как один из углов треугольника равен 60^0, то сумма других четырех углов равна 540^0-60^0=480^0, значит каждый из них равен 120^0.



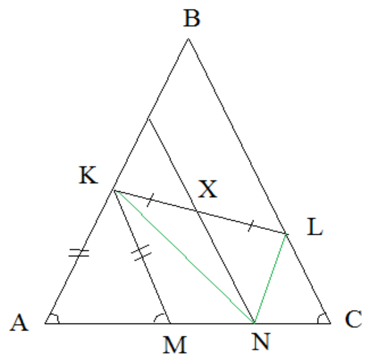
Так как угол A равен 60^0, а угол B равен 120^0 (∠A+∠B=180^0) - внутренние односторонние углы при прямых AE и BC и секущей AB, то AE∥BC. Продолжим AE до пересечения с CD. Пусть $AE \cap CD = N$.
Треугольник EDN – равносторонний (∠E=60^0 – смежный с углом ∠AED=120^0, ∠D=60^0 – смежный с углом ∠EDC=120^0, ∠N=180^0- (∠E+∠D) = 60^0).

Тогда ABCN – равнобокая трапеция (∠A=∠N=60^0), значит AB=CN=CD+DN=CD+ED=3+2=5

Ответ:5

8. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC взяты точки K и L соответственно так, что AK+LC=KL. Через середину отрезка KL провели прямую, параллельную BC, и эта прямая пересекла сторону AC в точке N. Найдите величину угла KNL

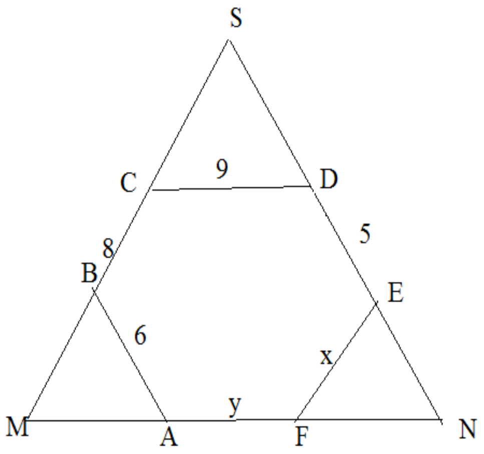
Решение:



Проведем через точку K прямую l, параллельную BC. $l \cap AC = M$. Тогда $\angle BCA = \angle KMA$ как соответственные при параллельных прямых KM и BC и секущей AC. По условию ΔABC – равнобедренный, значит $\angle A = \angle C$. Следовательно, ΔAKM – равнобедренный ($\angle KAM = \angle KMA$. Тогда, AK=KM.
Рассмотрим четырехугольник MKLC. Он является трапецией ($LC \parallel KM$), X – середина KL и XN∥ BC, это означает, что XN – средняя линия MKLC и $XN = \frac{KM+LC}{2} = \frac{AK+LC}{2} = \frac{KL}{2}$.
Получили, что в треугольнике KNL медиана XN равна половине KL, значит, ($\angle KNL = 90^0$
Ответ: 90^0

9. Все углы шестиугольника ABCDEF равны. Известно, что AB=6, BC=8, CD=9, DE=5. Найдите длины сторон EF и FA.

Решение:



Все углы шестиугольника равны, значит они по 120^0. Продлим стороны шестиугольника BC, DE и AF, получим равносторонний треугольник MSN со стороной MS=6+8+9=23.
Тогда EN=x=23-14=9, AF=y=23-6-9=8.
Ответ: EF=9 и FA=8