

Муниципальное общеобразовательное учреждение средняя общеобразовательная
школа №2 городского округа город Буй Костромской области



Методическая разработка

**Итоговое повторение курса планиметрии с
привлечением метода ключевой задачи по теме
«Площади плоских фигур»**

Разработала
Учитель математики
Филиппова Наталия Анатольевна

г.Буй, 2024 год

Оглавление

<u>ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА</u>	<u>- 3 -</u>
<u>ИТОГОВОЕ ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ПЛАНИМЕТРИИ С ПРИВЛЕЧЕНИЕМ МЕТОДА КЛЮЧЕВОЙ ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ «ПЛОЩАДИ ПЛОСКИХ ФИГУР»</u>	<u>- 6 -</u>
<u>РЕКОМЕНДУЕМЫЙ ПЛАН РАБОТЫ НА УРОКАХ</u>	<u>- 7 -</u>
<u>СПИСОК ОПРЕДЕЛЕНИЙ И СВОЙСТВ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ</u>	<u>- 7 -</u>
<u>СПИСОК ТЕОРЕМ И АКСИОМ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ</u>	<u>- 8 -</u>
<u>ПОДБОРКА ЗАДАЧ ДЛЯ УСТНОЙ РАБОТЫ</u>	<u>10</u>
<u>ДИАГНОСТИЧЕСКИЙ ТЕСТ ПО ТЕМЕ « ПЛОЩАДЬ»</u>	<u>12</u>
<u>КЛЮЧЕВЫЕ ЗАДАЧИ</u>	<u>14</u>
<u>ЛИТЕРАТУРА</u>	<u>31</u>
<u>ИНТЕРНЕТ-РЕСУРСЫ:</u>	<u>31</u>

Пояснительная записка

Актуальность

Теоретическая часть школьного курса геометрии содержит, в основном такие теоремы, которые направлены на развитие теории. Но геометрия, которая преподается в школе, это не только аксиомы и теоремы. Учиться решать задачи по геометрии с помощью опорных, или, как их еще называют, ключевых или базисных, - идея не новая. В древности обучение решению задач по стереометрии было именно таким. А оно основывается не только на добротной теоретической базе, знании формул, необходимых для вычислений, но и на владении арсеналом фактов, приемов и методов. Поэтому полезно выделять какое-то количество, так называемых, опорных задач, которые фиксируют факт, достаточно часто встречающийся при решении задач по геометрии, или же иллюстрируют метод решения задач по геометрии. К опорным задачам относятся также задачи, результатом решения которых является формула, не входящая в теоретический курс, но применяемая при решении задач по геометрии определенного типа.

Опорные задачи в математике и, в частности, в геометрии можно условно разделить на два типа: задача-факт и задача-метод. В качестве примера задачи-факта можно привести задачу следующего содержания. В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, исходящими из той же вершины. Задачу, в результате решения которой можно получить формулу нахождения радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, зная его стороны, тоже можно отнести к опорным задачам.

Задача-метод иллюстрирует часто встречающийся метод решения задач в математике. Примером такой опорной задачи может быть решение задачи методом дополнительного построения. Удачное построение дополнительных элементов, которое упростит решение задачи, можно назвать «гроссмейстерским ходом». Такой способ решения задачи – показатель высокой математической культуры. Задача нахождения медианы треугольника по его сторонам – классический пример решения задач на построение. К тому же, - это задача, результатом которой есть формула; ею можно пользоваться, не проделывая в каждом, конкретном случае все действия и процедуры, которые были выполнены в общем виде. Решение опорных задач, особенно задач-методов, развивает логическое мышление, творческую направленность учеников, а самое главное, интуитивное понимание направления движения мысли. Интуиция вырастает из тандема правильно подобранных учителем задач, знания учеником теоретического материала и, естественно, любви к математике.

Анализ различной методической, математической и педагогической литературы показал, что единого определения «ключевой (опорной или базисной) задачи» нет. Также как нет и точного сравнения опорной, ключевой и базисной задачи, но рассматривая различные высказывания, мы делаем вывод, что эти слова являются синонимами.

Постоянный рост содержания учебного материала по всем школьным предметам, а также появление новых предметов, необходимость переработать, усвоить, запомнить огромное количество сведений, фактов, дат, формул, научиться действительно применять - всё это приводит к ухудшению здоровья учащихся, переутомлению,

стрессам, снижению работоспособности. Возникает перегрузка, в результате чего эффективность обучения остаётся низкой.

Однако, без хорошей базы знаний, заложенной на уроках, невозможно говорить о практической применимости полученных знаний, а тем более о развитии творческих способностей.

Как снизить перегрузки учащихся? Как наиболее эффективно организовать учебный процесс? Как добиться активной работы каждого, даже самого слабого ученика на уроке? Ведь если учащийся не запомнил, не выучил необходимую информацию, то он фактически будет исключён из процесса дальнейшего обучения. В лучшем случае он лишь механически перепишет готовые решения с доски. Ни о каком понимании не может быть и речи.

Использование системы ключевых задач позволяет с одной стороны, включить в работу каждого ученика, а с другой развивает системное, логическое мышление учащихся. Для мотивированных детей появляется возможность проанализировать и оценить материал в полном объёме, сравнить разные методы решения, определить границы применимости для дальнейшего использования полученных знаний при решении более сложных задач

Основные элементы метода использования ключевых задач можно сформулировать следующим образом:

- 1) По каждой основной теме курса можно выделить несколько ключевых задач, таким образом, что почти все остальные задачи нетрудно свести к одной из них или к комбинации нескольких.
- 2) Все задачи разбираются и записываются на уроке в виде конспекта или в виде опорных схем.

На первом этапе, когда дети только знакомятся с понятием “ключевая задача”, учитель сам выделяет систему ключевых задач по разбираемой теме. При этом в зависимости от подготовленности учащихся, все задачи могут быть разобраны и записаны на одном уроке, а могут записываться постепенно на нескольких уроках.

Система задач, предложенная учителем, может дополняться самими учащимися.

Наборы ключевых задач записываются детьми в отдельную тетрадь, которая будет являться своеобразным справочником по методам решения. К такому справочнику удобно обращаться при подготовке к контрольным работам, зачётам, а также при повторении.

Работа по отбору ключевых задач ведется непрерывно, система дополняется новыми задачами, выделенными при решении более сложных задач.

При составлении схем желательно использовать различные цвета.

Учащимся разрешается на уроке при выполнении заданий пользоваться схемами и таблицами до тех пор, пока необходимость их использования не отпадёт. При этом хорошо реализуется принцип дифференцированного подхода в обучении, так как у слабых учащихся всегда под руками имеется “руководство к действию” в виде схем и алгоритмов, отражённых в опорном конспекте. А сильные ученики, проанализировав и обобщив весь материал конспекта в целом, получают возможность оценить весь “арсенал” различных методов решения. Что позволяет им перейти к самостоятельному решению комбинированных и творческих задач.

После разбора всех ключевых задач, необходимо организовать деятельность учащихся так, чтобы они научились распознавать и решать как непосредственно сами ключевые задачи, так и задачи комбинированные, при решении которых используется уже несколько таких задач. Т.е. обязателен тренинг по распознаванию, применению, а, следовательно, и заучиванию системы “ключей”.

Для организации тренинга учитель заранее готовит набор упражнений. Количество тренировочных работ (обучающего, а не контролирующего плана) зависит от подготовки класса в целом и каждого учащегося в отдельности.

Цель методической разработки –эффективно организовать итоговое повторение курса планиметрии по теме «Площади плоских фигур» с помощью метода ключевой задачи.

Задачи:

- Систематизация ключевых задач по теме, возможность применения их при решении других задач;
- Предоставить учителю готовую к работе подборку ключевых задач по теме и задач, которые решаются с их помощью;
- Помочь учителю структурировать итоговое повторение;
- Повышение эффективности обучения, основанной на здоровьесберегающих технологиях в обучении

Итоговое повторение курса планиметрии с привлечением метода ключевой задачи по теме «Площади плоских фигур»

Ключевую задачу можно рассматривать как средство решения других задач. Многие ученые (Н.И. Зильберберг, М.Е. Тимошук, Г.И. Ковалева, В.Е. Куценок, Г.Д. Зайцева) выделяли характеристики, совокупности ключевых, опорных задач. В.А. Далингер показал, что эффективным приемом в работе со стереометрическими задачами также является прием работы с ключевыми задачами.

В связи с тем, что для получения положительной отметки за экзамен по математике необходимо получить не менее двух первичных баллов за задания по геометрии. Первая часть работы включает 5 геометрических заданий (с 15 по 19). Для решения этих задач необходимо твердое владение теоретическим материалом, а именно свойствами заданных плоских фигур, применять эти свойства в ходе вычислений. Для успешного решения геометрических задач необходимо иметь прочные базовые знания, что поможет выделить ключевую идею задачи и наметить план ее решения. Решение геометрических задач требует также иметь необходимые умения логически мыслить, быть внимательным

Каждый учитель при планировании уроков повторения в выпускных классах сталкивается с проблемой, как за короткий промежуток времени повторить весь объём изученного материала. Вот здесь и приходит на помощь **КЛЮЧЕВАЯ ЗАДАЧА**.

Вашему вниманию предлагаю следующую методику работы при подготовке к итоговой аттестации на примере повторения темы «Площади».

Учитель вместе с обучающимися вычленяет минимальное число основных задач по теме «Площади», учит распознавать и решать их. После разбора ключевых задач учитель организует работу так, чтобы все в классе получили достаточную тренировку в их распознавании, решении, а затем и в составлении. Ребятам рекомендуется иметь схемы решения: ими можно пользоваться и на уроках и во время выполнения проверочных работ. Подбор ключевых задач позволяет уменьшить перегрузку старшеклассников: им приходится решать их меньше и в классе, и дома.

Знание только алгоритмов решения ключевых задач не может удовлетворить тех, кто проявляет особый интерес к математике. С ними нужно вовремя перейти к разбору задач нестандартных.

Рекомендуемый план работы на уроках

1. Повторяются все термины по теме, которые известны обучающимся. (Например, с помощью справочных материалов, опорных конспектов, учебника, рабочей тетради)
2. Повторяются теоремы, свойства геометрических фигур.
3. Определяются ключевые задачи – это задачи, к которым можно свести решение других более сложных задач.
4. Рассматриваются все виды задач, определяется, как их решать – устно, письменно в классе, дома, индивидуально.
5. Подбираются задачи, которые допускают несколько способов решения
6. Для профильных групп подбираются новые типы задач, задачи с ГИА

Список определений и свойств, используемых при решении задач

1. Простая фигура – фигура, которую можно разбить на конечное число плоских треугольников.
2. Понятие площади. Площадь – это положительная величина, численное значение которой обладает следующими свойствами:
 - Равные фигуры имеют равные площади
 - Если фигура разбивается на части, являющиеся простыми фигурами, то площадь этой фигуры равна сумме площадей её частей.
 - Площадь квадрата со стороной, равной единице измерения, равна единице.
3. Свойство площадей подобных фигур.
 - Площади подобных фигур относятся как квадраты их соответствующих линейных размеров.
4. Признаки подобия треугольников
5. Определение средней линии трапеции.
 - Средняя линия трапеции - отрезок, соединяющий середины боковых сторон.
6. Свойство средней линии трапеции.
 - Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.
7. Определение медианы треугольника.
 - Медианой треугольника, проведенной из данной вершины, называется отрезок, соединяющий вершину с серединой противоположной стороны.
8. Свойство медиан треугольника.
 - Медианы в треугольнике пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении $2 : 1$, считая от вершины.
9. Высота треугольника.
 - Высотой треугольника, проведенной из данной вершины, называется перпендикуляр, проведенный из этой вершины к прямой, которая содержит противоположную сторону треугольника.
10. Равновеликие фигуры – плоские фигуры одинаковой площади.

Список теорем и аксиом, используемых при решении задач

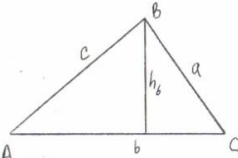
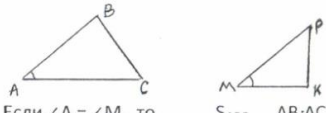
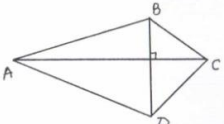
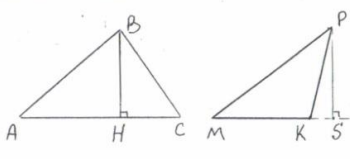
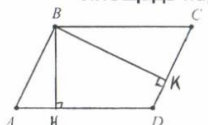
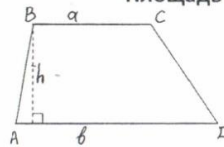
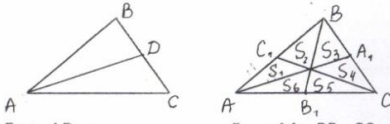
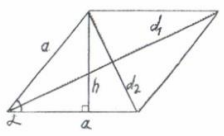
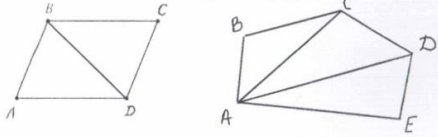
1. Теорема о площади прямоугольника.
 - Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон.
2. Теорема о площади параллелограмма.
 - Площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.
3. Теорема о площади треугольника и её следствия
 - Площадь треугольника равна произведению его стороны на высоту, проведенную к этой стороне
 - Площадь треугольника равна половине произведения двух любых его сторон на синус угла между ними
 - Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов
4. Формула Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

- $p = (a + b + c)/2$
5. Теорема о площади трапеции
 - Площадь трапеции равна произведению полусуммы её оснований на высоту
 6. Теорема о площади подобных фигур

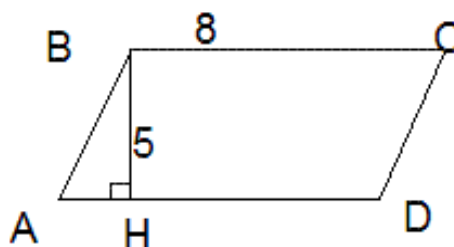
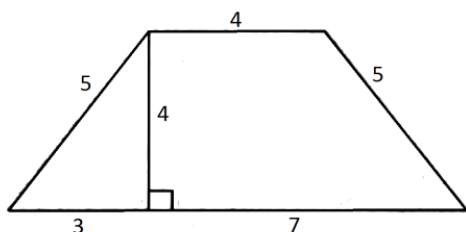
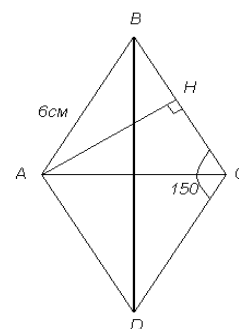
Справочный материал

Площади

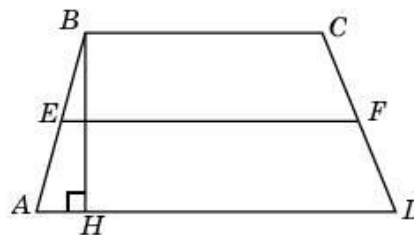
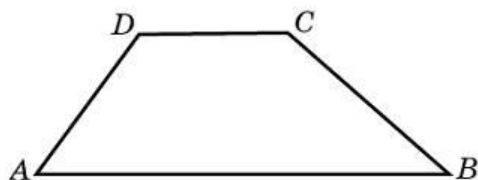
Площадь треугольника  $S = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} c h_c$ $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$, а- сторона равностороннего треугольника $S = \frac{1}{2} ab \sin \angle C = \frac{1}{2} bc \sin \angle A = \frac{1}{2} ac \sin \angle B$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p = \frac{a+b+c}{2}$ $S = pr$, r-радиус вписанной окружности, $S = \frac{abc}{4R}$, R-радиус описанной окружности $S = \frac{ab}{2}$, а и b – катеты	Площадь треугольников с равными углами  Если $\angle A = \angle M$, то $\frac{S_{ABC}}{S_{MPK}} = \frac{AB \cdot AC}{MP \cdot MK}$	Площадь четырёхугольника Если $AC \perp BD$, то $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$ 
Площадь треугольников с равными высотами  Если $BH = PS$, то $\frac{S_{ABC}}{S_{MPK}} = \frac{AC}{MK}$	Площадь параллелограмма  $S = AD \cdot BH$ $S = CD \cdot BK$ $S = AB \cdot AC \sin \angle A$ $S = AC \cdot BD \cdot \sin \alpha$, где α-угол между AC и BD	Площадь круга  $S = \pi r^2$ $S_{сек.} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360}$
	Площадь трапеции  $S = \frac{a+b}{2} h$ $S = MN \cdot h$, где MN-средняя линия трапеции	Свойство медианы  Если AD-медиана $\triangle ABC$, то $S_{ABD} = S_{ACD}$ Если AA_1, BB_1, CC_1 – медианы $\triangle ABC$, то $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6$.
	Площадь ромба  $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$ $S = a^2 \sin \alpha$ $S = ah = 2ar$ r-радиус вписанной окружности	Свойства площадей  $S_{ABD} = S_{CBD}$ $S_{ABCDE} = S_{ABC} + S_{ACD} + S_{ADE}$

Подборка задач для устной работы

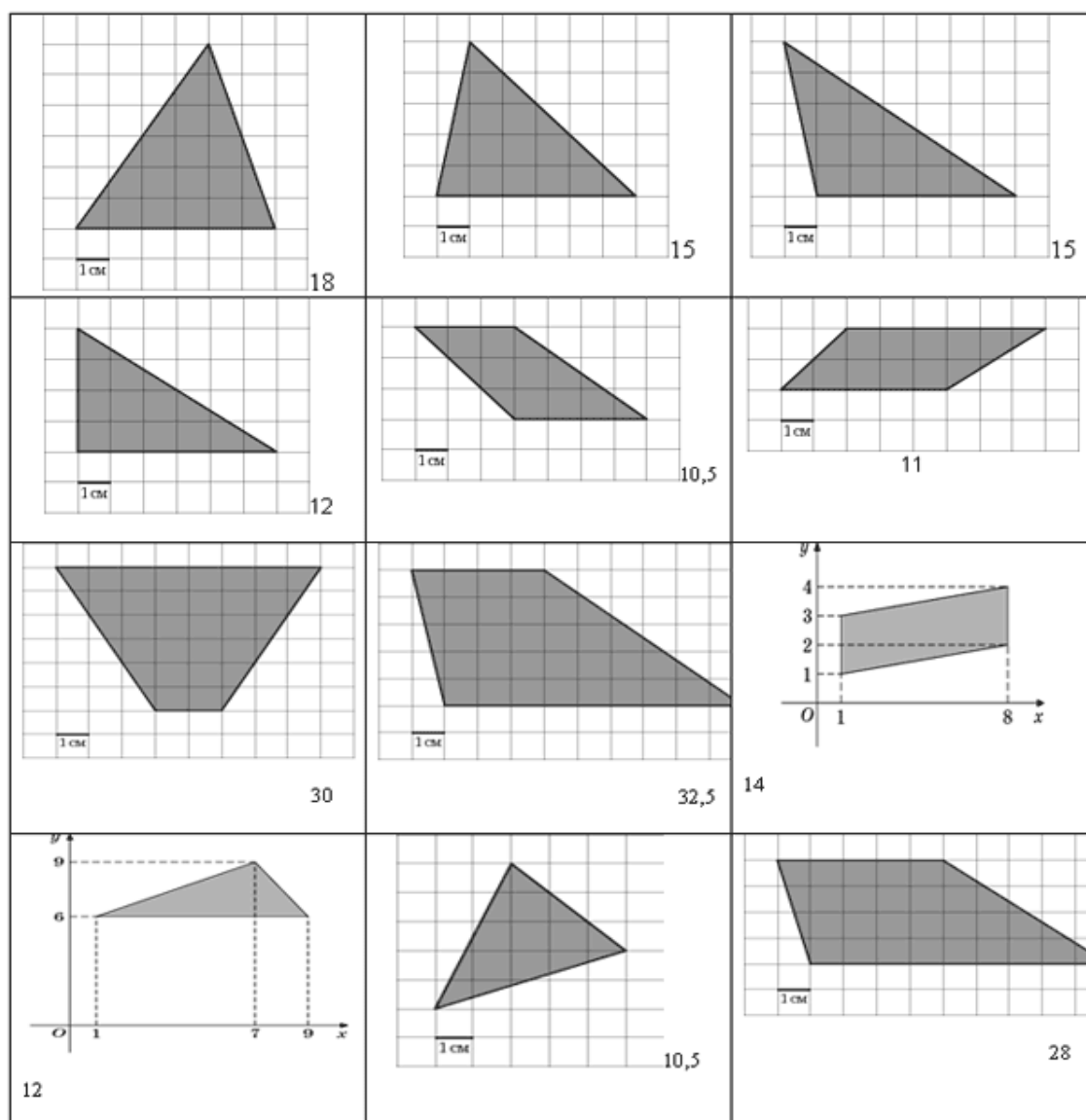
1. Вычислите площадь прямоугольника со сторонами 15 см и 4 см.
2. Докажите, что диагональ параллелограмма разбивает его на два треугольника равной площади.
3. Сторона квадрата 10 см. Как изменится площадь квадрата, если каждую его сторону уменьшить в 2 раза?
4. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 8 см и 12 см.
5. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если его боковая сторона равна 5 м, а высота, проведенная к основанию 4 м.
6. Чему равна площадь равностороннего треугольника со стороной 2 дм?
7. Две соответственные стороны подобных треугольников равны 2 см и 5 см. Площадь первого треугольника 8 см^2 .
8. Чему равна площадь второго треугольника?
9. Сторона ромба равна 6 см, а один из углов равен 150° . Найдите площадь ромба
10. Вычислите площадь круга, диаметр которого $\sqrt{3}$ см.
11. В прямоугольной трапеции основания 5 см и 9 см, а меньшая боковая сторона – 4 см. Чему равна площадь трапеции?
12. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны и равны 6 см и 12 см. Чему равна площадь трапеции?
13. Найдите площадь треугольника со сторонами 6 см, 15 см и 9 см. [Не существует]
14. Средняя линия трапеции равна 3 м, а высота трапеции равна 9 м. Вычислите её площадь.
15. Вычислите площади фигур, изображенных на рисунках.



16. Высота трапеции равна 6, площадь равна 18. Найдите среднюю линию трапеции.
17. Основания трапеции равны 21 и 1, площадь равна 99. Найдите ее высоту.



18. На клетчатой бумаге с клетками размером $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ изображены фигуры. Найдите их площадь в квадратных сантиметрах



Диагностический тест по теме «Площадь»

A1. Выберите верное утверждение:

1. Если два многоугольника имеют равные площади, то они равны
2. Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то площадь равна сумме площадей этих многоугольников
3. Квадратный сантиметр – это фигура, стороны которой равны 1см
4. Площадь квадрата равна произведению его сторон

A2. Высотой параллелограмма называется

1. Перпендикуляр, проведенный к его стороне
2. Отрезок, пересекающий сторону параллелограмма
3. Перпендикуляр, опущенный из вершины параллелограмма
4. Перпендикуляр, проведенный из любой точки противоположной стороны к прямой, содержащей основание

A3. Если высоты треугольников равны, то

1. Их площади относятся как основания
2. Их площади равны
3. Эти треугольники равны
4. Основания, к которым они проведены, равны

A4. Площадь параллелограмма равна:

1. Произведению стороны параллелограмма на высоту
2. Произведению его стороны на высоту, проведенную к данной стороне
3. Половине произведения его основания на высоту, проведенную к данному основанию
4. Произведению смежных сторон параллелограмма

A5. Площадь прямоугольного треугольника равна:

1. Произведению его катетов
2. Произведению его гипотенузы на один из катетов
3. Половине произведения катетов
4. произведению стороны на высоту

A6. Площадь трапеции равна:

1. Произведению полусуммы оснований на половину высоты
2. Произведению суммы оснований на высоту
3. Произведению суммы оснований на половину высоты
4. Произведению оснований и высоты

A7. Периметр квадрата равен $20\sqrt{2}$ см. Чему площадь данного квадрата?

1. 200 см^2
2. 25 см^2
3. 100 см^2
4. 50 см^2

А 8. Одна из сторон параллелограмма равна 14 см, а высота, проведенная к этой стороне – 12 см . Чему равна высота, проведенная к смежной стороне, равной 21 см?

1. 8 см
2. 12 см
3. 10 см
4. 19 см

В1. В трапеции ABCD угол A равен 60° , угол D равен 45° , основание BC равно 5 см, BF и CE – высоты трапеции, ED = 4 см. Найдите площадь трапеции.

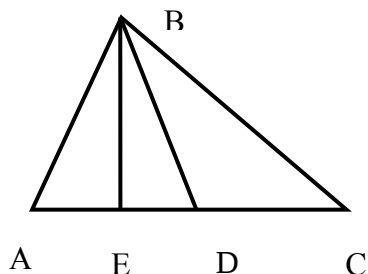
В2. В треугольнике ABC биссектриса AH = 8 см, AB = 6 см, AC = 9 см. Найдите $S_{ABD} : S_{ACD}$.

С1. В параллелограмме ABCD диагональ BD перпендикулярна стороне AB, один из углов параллелограмма равен 120° , AD = 12 см, O – точка пересечения диагоналей. Найдите площадь треугольника CDO.

A 1	A 2	A 3	A 4	A 5	A 6	A 7	A 8	B1	B2	C1
2	4	1	2	3	3	4	1	$4(7 + \frac{2\sqrt{3}}{3})$	2:3	$9\sqrt{3}$

Ключевые задачи

1. Докажите, что медиана треугольника делит его на два равновеликих треугольника.



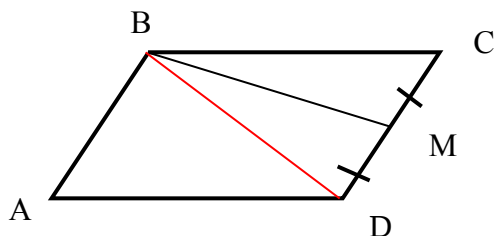
Доказательство:

Проведем из вершины В треугольника ABC медиану BD и высоту BE, и заметим, что

$$S_{\triangle DBC} = \frac{1}{2} DC \cdot BE \quad S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BE$$

Поскольку отрезок BD является медианой, то $AD = DC \Rightarrow S_{\triangle ABD} = S_{\triangle DBC}$, что и требовалось доказать.

Задача 1. Найти площадь параллелограмма ABCD, если площадь треугольника BCM равна 5, точка М - середина CD.

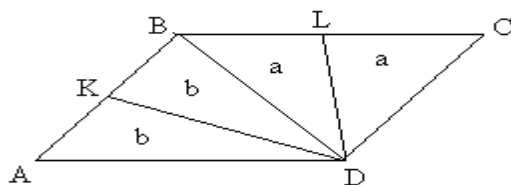


Решение:

1. Проведем в параллелограмме диагональ BD
2. BM- медиана треугольника BCD
3. $3 \cdot S_{\triangle BCM} = S_{\triangle BDM}$ (ключевая задача), $S_{\triangle BCD} = 10$, значит $S_{ABCD} = 20$

Ответ: 20 см²

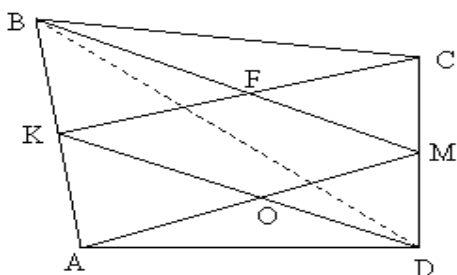
Задача 2. В параллелограмме $ABCD$ точка K – середина AB , а L – середина BC . Зная, что $S_{KBLD} = S$, найдите S_{ABCD} .



Решение:

1. Проведем диагональ BD .
2. Тогда (по ключевой задаче № 1) $S_{ABCD} = 2S$.

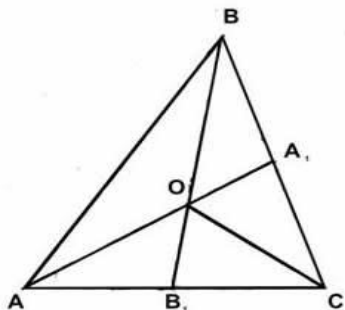
Задача 3. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Середины сторон AB и CD обозначены соответственно через K и M , точка пересечения отрезков BM и CK – через F , точка пересечения отрезков AM и DK – через O . Докажите, $S_{MOKF} = S_{BFC} + S_{AOD}$



Решение:

1. Проведем диагональ BD .
2. Так как DK и BM медианы ADB и BCD треугольников, то $S_{AKD} = \frac{1}{2} S_{ABD}$, $S_{BMC} = \frac{1}{2} S_{BCD}$. Отсюда $S_{AKD} + S_{BMC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ (1)
3. Проведем диагональ AC
4. AM и CK медианы уже вновь полученных треугольников, получим $S_{KBC} = \frac{1}{2} S_{ABC}$, $S_{AMD} = \frac{1}{2} S_{ACD}$. Тогда $S_{KBC} + S_{AMD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ (2).
5. Из равенств (1) и (2) следует, что $S_{AKD} + S_{BMC} + S_{KBC} + S_{AMD} = S_{ABCD}$.
6. В этой сумме дважды учтены площади треугольников BPC и AQ , но не учтена площадь четырехугольника $MOKP$, поэтому $S_{MOKP} = S_{BPC} + S_{AOD}$.

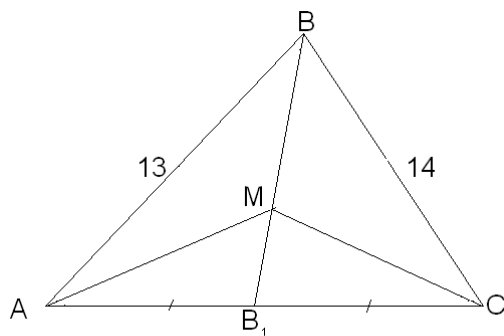
2. Докажите, что если O – точка пересечения медиан треугольника ABC , то треугольники AOB , BOC , AOC – равновелики.



Доказательство:

1. Пусть AA_1 и BB_1 – медианы треугольника $\triangle ABC$.
2. Рассмотрим треугольники $\triangle AOB$ и $\triangle BOC$.
3. $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle ABB_1} - S_{\triangle ABB_1O}$
4. $S_{\triangle BOC} = S_{\triangle BB_1C} - S_{\triangle BB_1CO}$
5. Треугольники $\triangle ABB_1$ и $\triangle CBB_1$ равновелики (по ключевой задаче №1), тогда получаем, что $S_{\triangle ABB_1} = S_{\triangle CBB_1}$, $S_{\triangle ABB_1O} = S_{\triangle CBB_1O}$, откуда получаем, что $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle BOC}$.
6. Аналогично доказывается равенство $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOC}$

Задача 1. Треугольник ABC , стороны которого 13 см, 14 см и 15 см, разбит на три отрезками, соединяющими точку пересечения медиан M с вершинами треугольника. Найдите площадь треугольника BMC .



Дано: $\triangle ABC$, $BB_1 \cap AM \cap MC = M$ – медианы, $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см
Найти: S_{BMC}

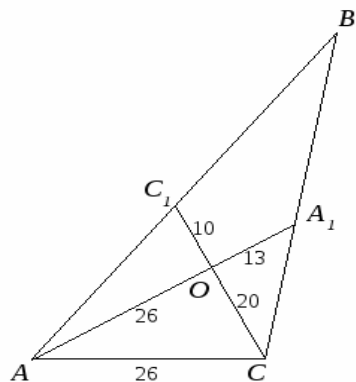
Решение.

1. $S_{\triangle AMB} = S_{\triangle BMC} = S_{\triangle AMC}$ (по ключевой задаче №2), тогда $S_{BMC} = \frac{1}{3} S_{ABC}$
2. По формуле Герона $S_{ABC} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84$

$$3. \quad S_{MBC} = \frac{1}{3} S_{ABC} = 28$$

$$\text{Ответ: } S_{MBC} = 28 \text{ см}^2$$

Задача 2. Длина одной из сторон треугольника равна 26, а длины медиан, проведенных к двум другим сторонам, равны 30 и 39. Найдите площадь треугольника.



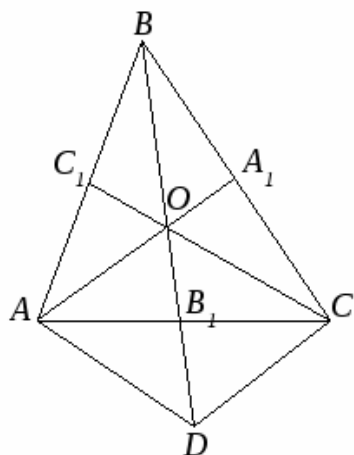
Решение:

1. По ключевой задаче № 2 $S_{AOC} = \frac{1}{3} S_{ABC}$, тогда $S_{ABC} = 3 S_{AOC}$,
 $AO = 26$, $OC = 20$

2. Найдём площадь треугольника AOC по формуле Герона:
 $S_{AOC} = \sqrt{36 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 16} = 240$
 $S_{ABC} = 3 \times 240 = 720$

О т в е т: 720 см^2

Задача 3. Медианы треугольника 3, 4 и 5. Найдите площадь треугольника.



Решение:

1. Пусть $AA_1 = 3$, $BB_1 = 4$, $CC_1 = 5$, тогда $AO = 2$, $CO = \frac{10}{3}$, $BO = \frac{4}{3}$

2. $S_{ABC} = 3 S_{AOC}$ (ключевая задача №2)

3. Построим треугольник AOC до параллелограмма, отложив на прямой BB_1 от точки B_1 отрезок B_1D , равный B_1O

4. $S_{\Delta AOC} = S_{\Delta AOD} = \frac{1}{2} S_{AOC D}$

5. $S_{AOD} = \sqrt{4 \cdot 2 \cdot \left(4 - \frac{10}{3}\right) \cdot \left(4 - \frac{8}{3}\right)} = \frac{8}{3}$.

6. Следовательно, $S_{ABC} = 3S_{AOC} = 8$

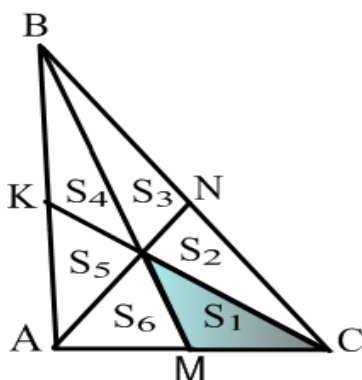
Ответ: 8см^2

Задачи для самостоятельной работы:

1. Две медианы треугольника взаимно перпендикулярны и равны соответственно 6 и 8. Найти площадь треугольника.
2. Медианы треугольника равны 3, 4 и 5 найти площадь треугольника.
3. Треугольник ABC, стороны которого 13 см, 14 см и 15 см, разбит на три треугольника отрезками, соединяющими точку M пересечения медиан треугольника с вершинами треугольника. Найти площадь треугольника BMC.
4. Две стороны треугольника равны 10 и 12, а медиана, проведённая к третьей, равна 5. Найдите площадь треугольника.

3. Медианы треугольника разбивают его на шесть равновеликих треугольников.

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6 = \frac{1}{6} S_{\Delta ABC}$$

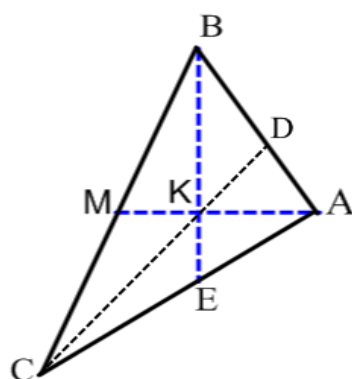


Доказательство:

1. O – точка пересечения медиан AN, BM, CK треугольника ABC
2. $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta BOC} = S_{\Delta AOC}$ (ключевая задача №2)
3. OM, ON, OK – медианы равновеликих треугольников AOC, BOC и AOB (большие треугольники)

4. Большие треугольники делятся медианами OM, ON, OK на два равновеликих (ключевая задача № 1)
5. Т.к. все большие треугольники равновелики, то и все малые треугольники равновелики
6. $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6$

Задача 1. Две медианы треугольника взаимно перпендикулярны и равны соответственно 3 и 4. Найти площадь треугольника.



1. Пусть в треугольнике ABC медианы AM и BE равны 3 и 4 соответственно,
2. $AM \perp BE$, K – точка пересечения медиан.

$$3. AK = \frac{2}{3} AM = 2,$$

$$4. BK = \frac{2}{3} BE = \frac{8}{3}$$

5. Так как треугольник ABK прямоугольный с прямым углом BKA, то

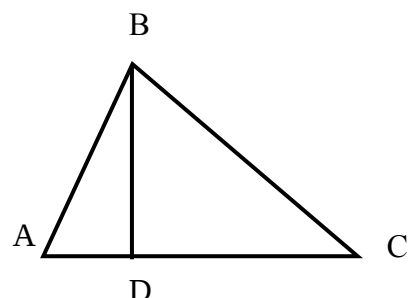
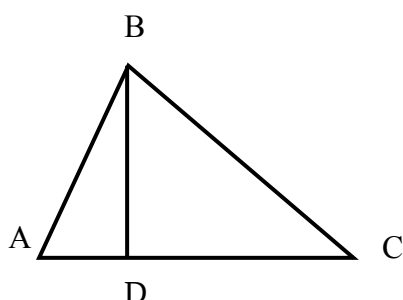
$$S_{\triangle BKA} = \frac{1}{2} BK \cdot AK = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{8}{3} = \frac{8}{3}.$$

6. Так как медианы делят треугольник на 6 равновеликих частей, то

$$S_{\triangle ABC} = 6S_{\triangle KDA} = 3S_{\triangle BKA} = 8.$$

Ответ: 8

4. Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.



Доказательство:

Треугольники ABC и A₁B₁C₁ подобны, k- коэффициент подобия, BD и B₁D₁ - высоты, обозначим буквами S и S₁ площади этих треугольников.

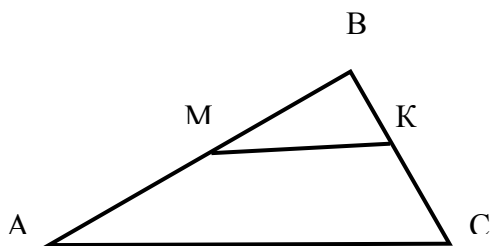
BD = k B₁D₁, AC = k A₁C₁, тогда

$$\frac{S(ABC)}{S(A_1B_1C_1)} = \frac{0,5BD \cdot AC}{0,5B_1D_1 \cdot A_1C_1} = \frac{kB_1D_1 \cdot kA_1C_1}{B_1D_1 \cdot A_1C_1} = k^2$$

S/S₁ = k². Теорема доказана.

Задача 1.

Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает сторону AB в точке M, сторону BC в точке K. Площадь треугольника MBK равна 8 см². Найдите площадь треугольника ABC, если BC: BK = 3:1

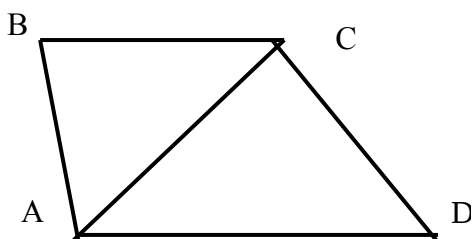


Решение:

1. Треугольник ABC подобен треугольнику MBK (по двум углам)
2. Коэффициент подобия равен 3.
3. Значит, отношение площади треугольника ABC к площади треугольника MBK равно 3² = 9.

Задача 2.

В четырехугольнике ABCD сторона AB равна стороне BC, диагональ AC равна стороне CD, а угол ABC, равен углу ACD. Радиусы окружностей, вписанных в эти треугольники относятся как 3:4. Найдите отношение площадей этих треугольников.

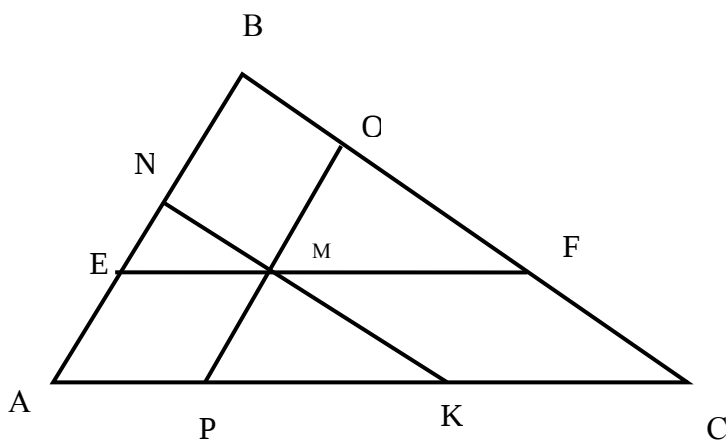


Решение:

1. Поскольку треугольники ABC и ACD равнобедренные и их углы при вершине равны, то они подобны.
 2. Радиусы вписанных окружностей относятся, как 3 : 4, значит коэффициент подобия $k = \frac{3}{4}$. Тогда площади этих треугольников относятся как $k^2 = \frac{9}{16}$.
- Ответ: 9/16

Задача 3.

Внутри треугольника ABC выбрана точка M. Через точку проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Площади трех образовавшихся треугольников равны S_1, S_2, S_3 . Найдите площадь треугольника ABC



Решение:

Треугольники, указанные в условии подобны треугольнику ABC. Пусть $S_{ENM} = S_1$, $S_{MQF} = S_2$, $S_{MKN} = S_3$,

$$S_{ABC} = S. \text{ Имеем } \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \frac{EM}{AC} \quad \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{PK}{AC} \quad \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{MF}{AC}.$$

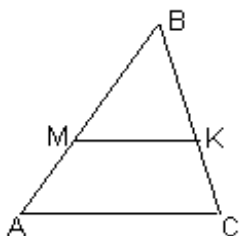
$$\text{Отсюда } \frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{EM + PK + MF}{AC} = 1, \text{ т.е.}$$

$$S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$$

$$\text{Ответ: } (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$$

Задача 4

Отрезок МК, параллельный стороне АС треугольника АВС делит это треугольник на две фигуры равной площади. Найдите: а) МК, если АС = b; б) в каком отношении точки М и К делят стороны.



$$\text{а) } MK = \frac{b\sqrt{2}}{2}; \text{ б) } BM : MA = BK : KC = 1 : \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1$$

Задачи для самостоятельной работы.

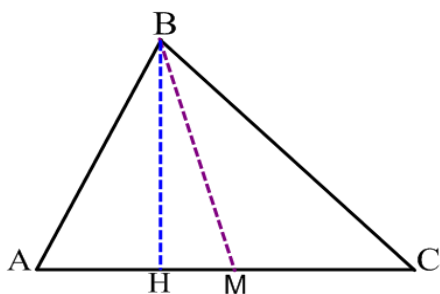
1. В прямоугольном треугольнике катеты относятся как 3 : 4, а высота, проведенная к гипотенузе делит треугольник на части, разность площадей которых равна 84 см². Найдите площадь всего треугольника.

2. Через середину Е высоты равнобедренного треугольника (АВ = ВС) проведена прямая MN, параллельная АВ, точка N принадлежит ВС. Найдите площадь треугольника CMN, если площадь треугольника АВС равна 32 см².

3. Высота остроугольного треугольника равна 4, она делит основание на 2 части. Относящиеся как 1 : 8. Найдите длину отрезка, параллельного высоте и делящего треугольник на две равновеликие части.

5. Если высоты треугольников равны, то их площади относятся как основания.

(Отношение площадей треугольников, имеющих общую высоту).



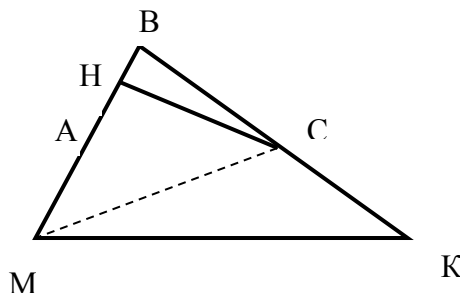
Пусть М – произвольная точка стороны АС треугольника АВС. Докажем, что $S_{ABM} : S_{MBC} = AM : MC$.

Доказательство:

1. Проведем высоту ВН треугольника АВС
2. ВН будет так же и высотой треугольника МВС и треугольника АВМ.
3. Имеем $S_{ABM} = \frac{1}{2} AM \cdot BH$, $S_{MBC} = \frac{1}{2} MC \cdot BH$
4. $S_{ABM} : S_{MBC} = AM : MC$

Задача 1.

В треугольнике ABC стороны AB и BC соответственно равны 14см и 18см. Сторона AB продолжена за точку A на отрезок AM, равный AB. Сторона BC продолжена за точку C на отрезок KC, равный половине BC. Найдите площадь треугольника MBC, если площадь треугольника ABC равна 126см^2 .



Решение:

1. Если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся как основания.

2. Треугольники ABC и ACM имеют общую высоту CH

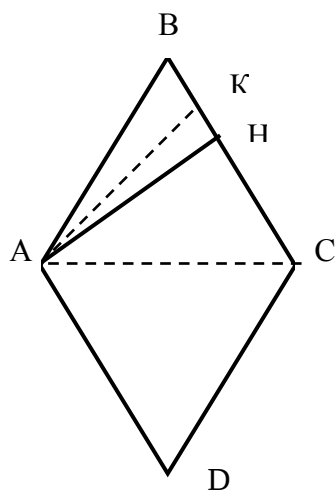
3. Основания AB и AM равны (по условию), поэтому $S_{ACM} = S_{ABC} = 126\text{ см}^2$

4. $S_{MBC} = 252\text{ см}^2$

Ответ: 252 см^2

Задача 2.

В ромбе ABCD на стороне BC отмечена точка K такая, что $KC:BK=3:1$. Найдите площадь треугольника ABK, если площадь ромба равна 48см^2 .



Решение:

1. Если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся как основания.

2. Треугольники ABK и ACK имеют общую высоту BH.

3. Основание KC в 3 раза больше BK (по условию).

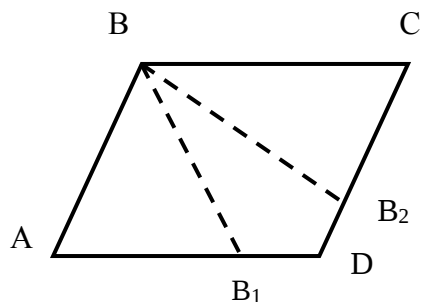
4. $S_{ACK} = 3 S_{ABK}$,

5. $S_{ABC} = 48:2 = 24\text{ см}^2$, $S_{ABC} = S_{ABK} + S_{ACK} = S_{ABK} + 3 S_{ABK} = 4 S_{ABK}$

6. $S_{ABK} = 24 : 4 = 6\text{ см}^2$

Ответ: 6 см^2

Задача 3. Данный параллелограмм разделите на три равновеликие части прямыми, выходящими из одной вершины.



Решение:

1. Пусть BB_1 и BB_2 исходные прямые, S – площадь параллелограмма $ABCD$.

2. $S_{ABB_1} = \frac{1}{3} S$, $S_{ABD} = \frac{1}{2} S$

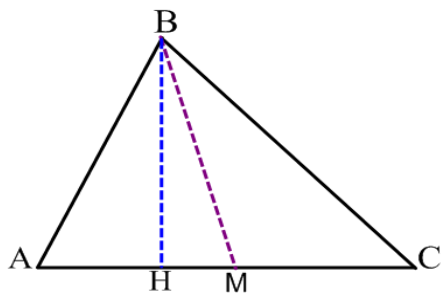
3. Поскольку треугольники имеют общую высоту, то их площади относятся как основания, т.е.

$$AB_1 : AD = \frac{1}{3} S : \frac{1}{2} S = 2 : 3.$$

Аналогично доказывается, что $CB_2 : CD = 2 : 3$

Алгоритм построения: Разделить каждую из сторон AD и CD параллелограмма в отношении $2 : 1$, считая от вершин A и C .

Задача 4. Точка M делит сторону AC треугольника ABC в отношении $AM : MC = 2 : 3$. Площадь треугольника ABC равна 180 см^2 . Найдите площадь треугольника ABM .



Решение:

1. Треугольники ABM и ABC имеют общую высоту BH , поэтому их площади относятся

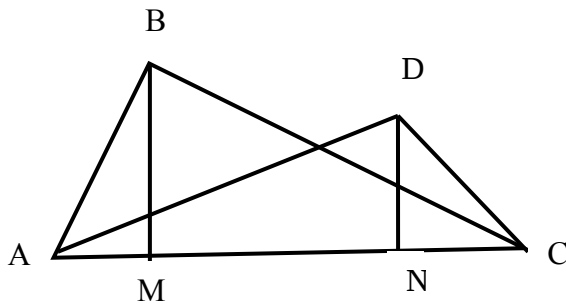
как основания AM и MC .

2. Так как по условию $AM : MC = 2 : 3$, то $AM : AC = 2 : 5$

3. $S_{ABM} : S_{ABC} = 2 : 5$, откуда $S_{ABM} = \frac{2}{5} S_{ABC} = \frac{2}{5} \times 180 = 72 \text{ см}^2$

Ответ: 72 см^2 .

6. Площади треугольников ABC и ADC относятся как высоты, проведенные к основанию AC



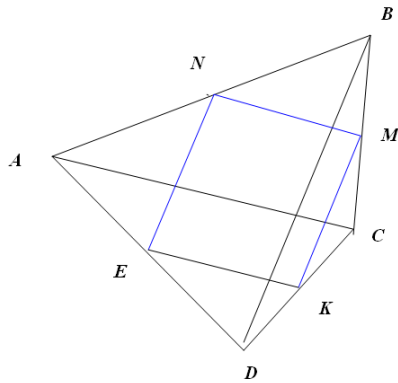
Решение:

1. Проведем высоты BM и DN треугольников ABC и ADC

$$2. S_{ABC} = \frac{1}{2} BM \cdot AC, S_{ADC} = \frac{1}{2} DN \cdot AC$$

$$3. S_{ABC} : S_{ADC} = BM : DN.$$

7. Середины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма, площадь которого равна половине площади данного четырехугольника.



Доказательство:

1. Рассмотрим треугольник ACB, MN- средняя линия треугольника, то $MN \parallel AC$.

2. Рассмотрим треугольник ADC, EK- средняя линия треугольника, то $EK \parallel AC$.

Аналогично, $NE \parallel BD \parallel MK$,

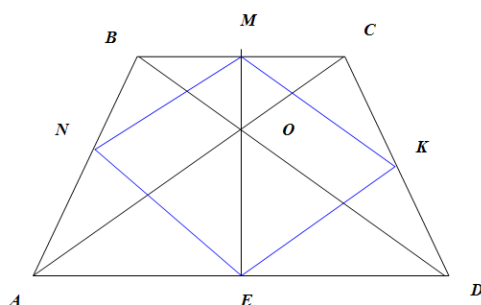
Следовательно, NEMK- параллелограмм.

$$3. \text{ Пусть } S_{ABCD} = S. S_{NMB} = \frac{1}{4} S_{ABC}; \quad S_{EKD} = \frac{1}{4} S_{ACD}; \quad S_{NMB} + S_{EKD} = \frac{1}{4} S;$$

$$S_{ANE} = \frac{1}{4} S_{ABD}; \quad S_{MCK} = \frac{1}{4} S_{CBD}; \quad S_{ANE} + S_{MCK} = \frac{1}{4} S.$$

$$4. S_{MKEN} = S - (S_{NMB} + S_{EKD} + S_{ANE} + S_{MCK}) = S - \frac{1}{2} S = \frac{1}{2} S.$$

Задача. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, длина одной из них равна 6. Длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна 4,5. Найдите площадь трапеции.



Решение:

1. Так как $NM \parallel KE$, $MK \parallel NE$, $AC \perp BD$, то NMKE – прямоугольник.

2. $S_{NMKE} = NM \cdot NE$, $NM = 6:2 = 3$,

Треугольник MEN- прямоугольный, угол $N = 90^\circ$.

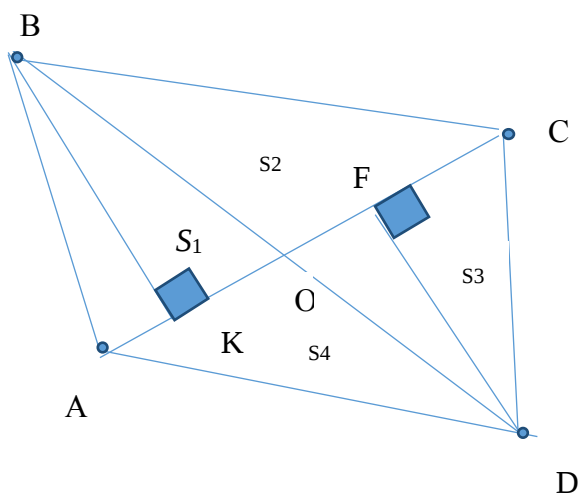
По теореме Пифагора $NE = \sqrt{ME^2 - NM^2} = \sqrt{4,5^2 - 3^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

$$S_{NMKE} = NM \cdot NE = 3 \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2} = \frac{9\sqrt{5}}{2}.$$

$$S_{ABCD} = 2 S_{NMKE} = \frac{9\sqrt{5}}{2} \cdot 2 = 9\sqrt{5}$$

Ответ: $9\sqrt{5}$.

8. Если выпуклый четырехугольник разделен своими диагоналями на треугольники с площадями S_1, S_2, S_3, S_4 , то $S_1 S_3 = S_2 S_4$

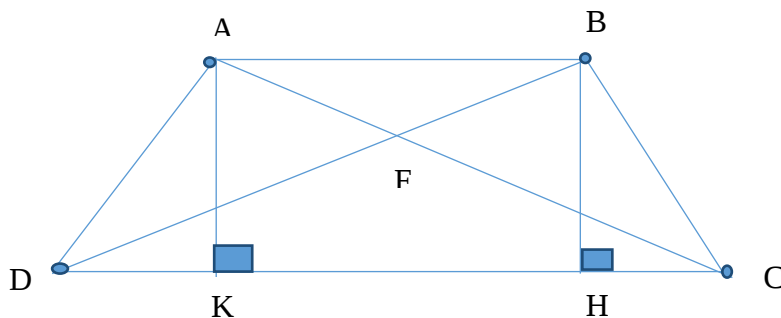


Решение: Треугольники ABO и CBO имеют общую высоту BK. Значит, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{AO}{OC}$

Аналогично, $\frac{S_4}{S_3} = \frac{AO}{OC}$. (DF – общая высота треугольников ADO и BCDO).

Приравнявая левые части, получим $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_4}{S_3}$, $\Rightarrow S_1 S_3 = S_2 S_4$

Задача В трапеции ABCD AB параллельна CD, AB=1, CD=2. F – точка пересечения диагоналей. Найти отношение суммы площадей треугольников ABF и CDF к сумме площадей треугольников ADF и BFC.



Решение: Покажем, что площади треугольников AFD и BFC равны. $S_{AFD} = S_{DAC} - S_{DFC}$, а $S_{BFC} = S_{CBD} - S_{DFC}$. Но $S_{DAC} = S_{CBD}$ (высоты AK и BH этих треугольников равны и DC – общее основание)

Пусть $S_{ABF} = S_1$, а $S_{AFD} = S_{BFC} = S_2$. Так треугольники ABF и CDF подобны, причём $\frac{AB}{DC} = \frac{1}{2}$, то $S_{CDF} = 4S_1$. Используя ключевую задачу $S_1 \cdot 4S_1 = S_2^2$, или $2S = S_2$,

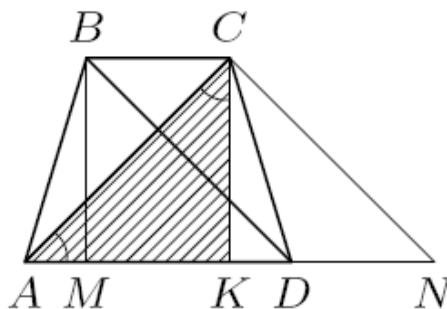
$$\text{тогда } \frac{S_{ABF} + S_{CDF}}{S_{ADF} + S_{BFC}} = \frac{S_1 + 4S_1}{2S_2} = \frac{5S_1}{2S_2} = \frac{5S_1}{4S_1} = \frac{5}{4}$$

9. Диагонали равнобокой трапеции взаимно перпендикулярны. Докажите, что площадь трапеции равна квадрату высоты

Дано: ABCD – равнобокая трапеция. AB=CD.

AC $\perp$ BD, BM – высота трапеции.

Доказать: $S_{ABCD} = BM^2$



Доказательство: Докажем, что $BM = \frac{AD+BC}{2}$

1. Проведем высоту СК из вершины тупого угла. $MK=BC$, $AK=\frac{AD+BC}{2}$.
2. Докажем, что $\angle CAK = 45^\circ$. Через вершину С проведем прямую параллельно диагонали BD.
Пусть N -точка пересечения этой прямой с продолжением основания AD. Тогда $CN = BD = AC$ и $\angle ACN = 90^\circ$. Поэтому ACN- равнобедренный прямоугольный треугольник.
Значит, $\angle CAK = \angle CAN = \angle ANC = 45^\circ$.
Следовательно, $CK = AK = \frac{AD+BC}{2}$.
3. $BM=CK=\frac{AD+BC}{2}$.
4. $S_{ABCD}=\frac{AD+BC}{2} BM = BM^2$

Задача. Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, если её средняя линия равна 5.

Решение: Т.к диагонали равнобокой трапеции перпендикулярны, следовательно высота равна средней линии трапеции, $h=5$.

$$S = h^2, S = 5^2 = 25$$

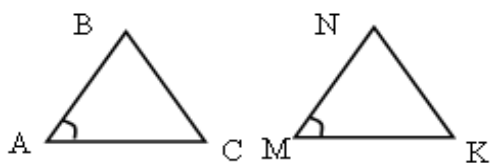
Ответ: 25.

Задачи для самостоятельной работы.

а) Определить площадь равнобедренной трапеции, у которой диагонали взаимно перпендикулярны, а высота равна 13см.

б) Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны. Найдите высоту трапеции, если её площадь равна 23 см^2 .

9. Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведение сторон, заключающих равные углы.



$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle MNK}} = \frac{AB \cdot AC}{MN \cdot MK}$$

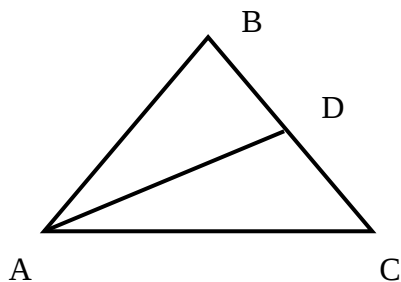
Доказательство:

$$S_{ABC} = 0,5 AB \cdot AC \sin A; \quad S_{MNK} = 0,5 MN \cdot MK \sin M$$



$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle MNK}} = \frac{AB \cdot AC}{MN \cdot MK}$$

Задача 1: В треугольнике ABC биссектриса AD равна 7 см, AB=6 см, AC=8 см.
Найдите отношение площадей треугольников ABD и ACD. (ответ 3:4)



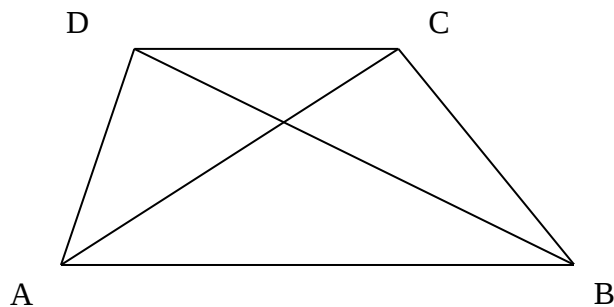
Решение:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB \cdot AD}{AC \cdot AD} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Ответ: $\frac{3}{4}$

Задача 2: Точки D и E лежат на сторонах AB и AC треугольника ABC соответственно. Как относятся площади треугольников ABC и ADE, если AB=10 см, AC=12 см, DB=4 см, EC=5 см? (ответ 20:7)

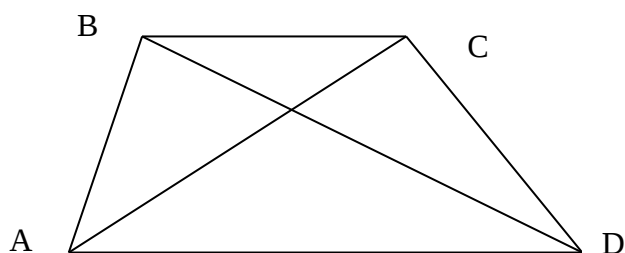
10.В трапеции проведены диагонали. Докажите, что площади треугольников, прилежащих к боковым сторонам равны



Доказательство:

Построим трапецию ABCD. Проведём диагонали, пересекающиеся в точке O. Рассмотрим треугольники ABD и ACD. Они равны, так как имеют общее основание AD и одинаковые высоты. Если провести их из точек B и C. Тогда $S(ABO) + S(AOD) = S(COD) + S(AOD) \Rightarrow S(ABO) = S(COD)$.

Задача 1: В трапеции ABCD (BC и AD – основания) проведены диагонали AC и BD, которые пересекаются в точке O. Найдите площади треугольников AOB и DOC, если площадь треугольника ACD равна 12 м², а площадь AOD равна 7 м².

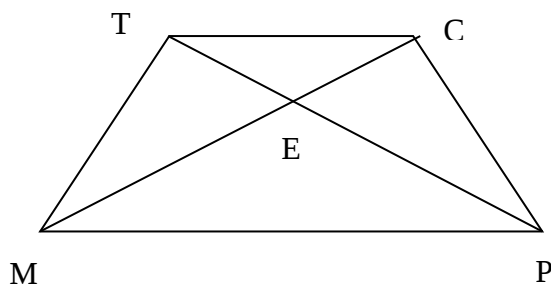


Решение:

1. $S_{COD} = S_{ACD} - S_{AOD}$, $S_{COD} = 12 - 7 = 5 \text{ м}^2$
2. $S_{AOB} = S_{COD} = 5 \text{ м}^2$

Ответ: 5 м^2

Задача 2: Средняя линия трапеции МРСТ с основаниями МР и ТС равна 12 см, а высота трапеции 5 см, Е – точка пересечения диагоналей. Найдите площадь треугольника ТЕМ, если площадь треугольника ТЕС равна 10 см^2 , площадь треугольника МЕР 20 см^2 .



Решение:

1. $S_{MPCT} = 12 \times 5 = 60 \text{ см}^2$
2. $S_{TEM} + S_{PEC} = S_{MPCT} - S_{TEC} - S_{MEP}$
3. $S_{TEM} = S_{PEC}$, $2S_{TEM} = 60 - 20 - 10 = 30 \text{ см}^2$, $S_{TEM} = 15 \text{ см}^2$

Ответ: 15 см^2

Литература

1. Контрольно-измерительные материалы. Геометрия: 8 класс/Сост. Н. Ф. Гаврилова – М.: ВАКО, 2020. – 96с.
2. Геометрия. Рабочая тетрадь/ 9 класс/ Ю. П. Дудницын – М.: Просвещение, 2021.
3. Поурочные разработки по геометрии: 9 класс – М. ВАКО, 2006-320 с.
4. Геометрия 7-9 класс учеб. Для образов. Учреждений/ А.В. Погорелов – 12 изд. – М.: Просвещение, 2023.-224 с.
5. Смирнов В.А. Геометрия. Планиметрия: Пособие для подготовки к ЕГЭ/Под ред. А.Л. Семёнова, И. В. Ященко. – М.: МЦМНО, 2009. – 256с.
6. Мищенко Т. М. Геометрия. Тематические тесты. 9 класс/ Т.М. Мищенко. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2011. – 96с.
7. Звавич Л. И. Геометрия. 7-9 классы. Тематические тестовые задания/ Л. И. Звавич, Е. В. Потоскуев. – М.: Дрофа, 2011. – 189, (3)с.: ил. – (ЕГЭ: шаг за шагом)
8. Крамор В.С. «Повторяем и систематизируем школьный курс геометрии», Москва, «Просвещение», 1992
9. Шарыгин И.Ф. «Геометрия», 7-9 классы, Москва, Дрофа, 2002.

Интернет-ресурсы:

1. ЕГЭ-2025. Открытый банк задач по математике <http://mathege.ru>
2. Банк заданий ЕГЭ и ОГЭ по всем основным предметам <https://bank-ege.ru/>
3. ФИПИ. Федеральный институт педагогических измерений <http://www.fipi.ru/>
4. ЕГЭ и ГИА.по математике 2025 <http://alexlarin.net>