

Разработка факультативного курса по теме «Графы» для 5-6 классов с использованием интерактивных приложений.

Факультатив «Графы» рассчитан для обучающихся 5-6 классов образовательных учреждений.

Цель курса. Познакомить с основными терминами из теории графов, научить применять практическую направленность в жизни.

Задачи курса

- Изучить теоретические основы теории графов.
- Познакомить с разными приёмами и методами решения задач.
- Формирование аналитических способностей.
- Развитие абстрактного мышления
- Расширить базу математических знаний, достаточную для изучения смежных дисциплин.

Формы организации деятельности учащихся: индивидуальные, групповые.

Особенности курса

- Знакомство с методами решения задач, не представленных в базовой программе.
- Создание более широкого круга математических представлений.
- Формирование личностно-ценностного отношения к математическим знаниям, представления о математике как части общечеловеческой культуры, развитие умения применять математику в реальной жизни;
- Курс особенно полезен для потенциальных участников олимпиад, интеллектуальных турниров.

В результате изучения курса учащиеся **должны:**

- **знать** элементарные основы теории графов;
- **уметь** применить теоретические знания при решении задач;
- **получить навыки** решения нестандартных задач;
- **повысить** математическую культуру и качество знаний.

Тематическое планирование факультативного курса для 5-6 классов по математике «Графы»

(1 час в неделю, всего 20 часов)

№ урока	Содержание урока	Количество часов
1	Что такое графы? Элементы графа. Степень вершины графа.	2
2	Леонард Эйлер. Задачи на мосты. Графы «одним росчерком»	2
3	Двудольные графы. Лемма о рукопожатиях.	2
4	Понятие дерева в теории графов. Дерево возможных вариантов.	2
5	История лабиринтов. Способы прохождения лабиринта.	2
6	Задача четырех красок. Графы с цветными ребрами.	2
7	Как составить математический граф для игры "в крестики нолики"	2
8	Графы и логические задачи	2
9-10	Решение задач.	4

Для лучшего усвоения материала курса занятия проводятся с использованием компьютерных технологий. Курс представлен на 20 часов.

Методические разработки для проведения занятий по теме «Графы»

Занятие 1. Что такое графы? Элементы графа. Степени вершины.

Цель данного занятия познавательная: дать ребятам определение графа, показать, что такое вершины и ребра, показать на примерах из жизни где встречаются графы, в каких типах задач они используются, как правильно записать решение с их помощью. Закрепить пройденный материал можно через разработанное приложение на образовательной платформе learningapps.org

Для начала ученикам можно не вводить определения графа, а дать попробовать решить самостоятельно простого типа задачу на данную тему.

Задача 1. 4 человека обменялись рукопожатиями. Сколько было рукопожатий?

Для того чтобы решить подобную задачу, удобнее всего нарисовать схему. Сперва необходимо поставить несколько точек. Количество точек будет соответствовать количеству людей. Затем нужно соединить все точки между собой. Количество отрезков и будет равно количеству рукопожатий.

В данном случае у нас получается 6 рукопожатий (рис. 1).

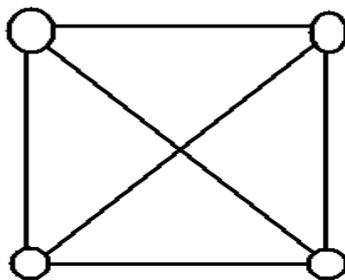


Рис.1

После этого можно дать решить следующую задачу.

Задача 2. Из пункта М в пункт N ведут 4 пути, а из пункта N в пункт О ведут 3 пути. Необходимо узнать сколькими способами можно добраться из пункта М в пункт О.

Начертим для удобства восприятия информации схему путей (рис. 2).

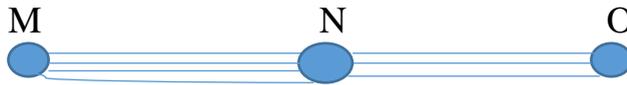


Рис.2

По данной схеме можно увидеть, что всего 12 способов проехать из пункта М в пункт О.

Можно сказать, ученикам что подобного типа задача встречаются в информатике.

Задача 3. Известно, что в одном ряду сидят 9 человек. У Ярослава соседи Петр и Дима, Рома сосед Петру и Мише, Витя-Коле и Назару, Игорь – сосед Назара, больше соседей нет. Может ли Ярослав оказаться рядом с Назаром?

Решение: Выпишем имена мальчиков и соединим линиями

Миша- Рома-Петр-Ярослав-Дима

Коля-Витя-Назар-Игорь

Ответ: нет, не может.

Основная идея, которую нужно показать при обсуждении решения данной задачи: рисунок помогает решению.

Задача 4. В трёх вершинах пятиугольника расположили по фишке (см. рис. 3). Разрешается двигать их по диагонали в свободную вершину. Можно ли добиться того, чтобы одна из фишек вернулась на начальное место, а две другие поменялись местами (см. рис.4)?

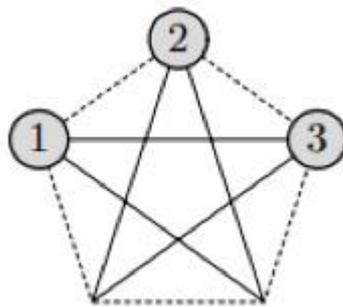


Рис.3

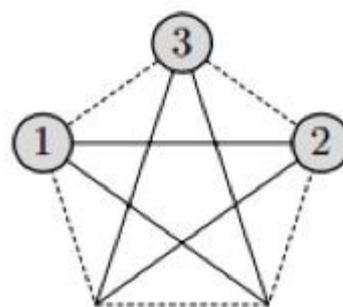


Рис.4

Ответ: нет, нельзя.

Далее считаю необходимым ввести определение графа.

Определение 1. Граф – это набор точек, некоторые из которых соединены линиями. Эти точки называются вершинами графа, а соединяющие их линии – ребрами.

Нужно привести примеры графов из жизни. Примерами могут служить: схема метро, карта дорог, схема авиалиний, электросхема и т.д.

Также считаю обязательным сообщить о науках, которые опираются на знания теории графов: физика, химия, информатика, экономика, медицина, прикладная математика и т.д.

После этого можно для ознакомительных целей ввести определение ориентированного и неориентированного графа. Когда определения были введены, лучше всего сразу рассмотреть задачу с учениками для закрепления пройденного материала. Построить ориентированный граф, который будет являться решением данной задачи.

Определение 2. Ориентированный граф – граф, вершины которого соединены дугами или стрелочками. С помощью таких графов могут быть представлены схемы односторонних отношений.

Определение 3. Граф называется неориентированным, если его вершины соединены ребрами

Задача 5. В школьном кружке по баскетболу занимается восемь человек: Ян, Тихон, Боря, Рома, Денис, Костя, Леня и Сергей. Известно, что Рома выше Лени, Ян выше Кости, Денис ниже Бори, но выше Сергея, Сергей выше Ромы, Боря ниже Тихона, а Леня выше Яна. Для участия в соревнованиях ребят необходимо расположить от самого низкого к самому высокому.

На плоскости отметим 8 кружков, соответствующих каждому мальчику, и обозначим их сокращенно первыми буквами имен (см. рис.5). В данной задаче два отношения: «быть ниже» и «быть выше». Рассмотрим отношение «быть выше» и проведем стрелки от более высокого по росту мальчика к более низкому. В задаче дано что Рома выше Лени, тогда стрелку ставим от Ромы к

Лене и т.д. Анализируя, получаем следующий порядок расположения: Костя, Ян, Леня, Рома, Сергей, Денис, Боря и Тихон.

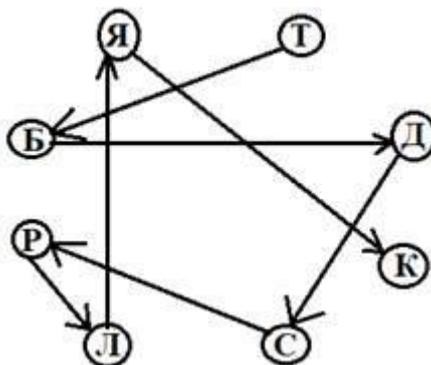


Рис. 5. Граф расположения учеников по росту от самого низкого к самому высокому

Задача 6. Между девятью планетами солнечной системы установлено космическое сообщение. Рейсовые ракеты летают по следующим маршрутам: Земля – Меркурий; Плутон – Венера; Земля – Плутон; Плутон – Меркурий; Меркурий – Венера; Уран – Нептун; Нептун – Сатурн; Сатурн – Юпитер; Юпитер – Марс и Марс – Уран. Можно ли долететь на рейсовых ракетах с Земли до Марса?

Решение. Нарисуем схему: планетами будут соответствовать точки, а соединяющим их маршрутам – не пересекающиеся между собой линии.

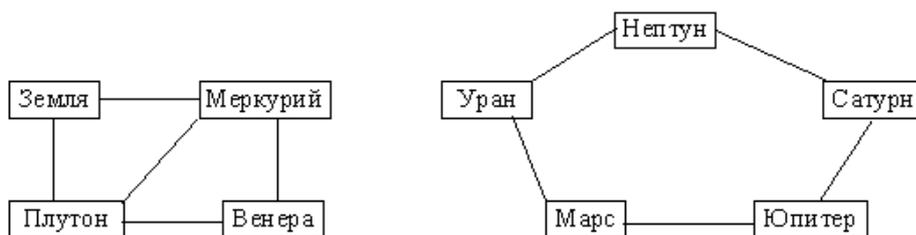


Рис.6

Теперь видно, что долететь от Земли до Марса нельзя.

Ответ. Нельзя.

После изучения данного материала закрепить полученные знания через интерактивные технологии.

А. Определение «Графы»



или [Основные понятия графа \(learningapps.org\)](https://learningapps.org)

Б 1. Задания на определения количества вершин и ребер в графе



или [Графы \(learningapps.org\)](https://learningapps.org)

Б 2. Задания на определения количества вершин и ребер в графе



или [Количество вершин и ребер в графах \(learningapps.org\)](https://learningapps.org)

Степень вершины.

В. Задание на определения пути в графе



Определение 4. Степенью вершины называется количество ребер, исходящих из этой вершины. Вершина называется четной, если из нее выходит четное количество ребер, и нечетной, если из нее выходит нечетное число ребер.

Обязательно необходимо показать наглядный пример с четными и нечетными вершинами.

Задача 7. Дан кусок проволоки, длиной 120 см. Можно ли, не ломая проволоки, изготовить каркас куба с ребром 10 см?

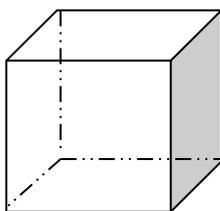


Рис. 7

Решение: Если куб – граф, тогда он имеет более двух нечетных вершин (8). Значит, невозможно изготовить такой каркас, не ломая проволоки.

Подсчет числа ребер в графе. Количество ребер графа равно половине суммы степеней его вершин. Пусть граф имеет n вершин, тогда число ребер равно:

$$\frac{n(n - 1)}{2}$$

Рассмотрим утверждение о количестве ребер на примере:

Задача 8: в государстве 100 городов, из каждого выходит 2 дороги, кроме столицы, откуда выходит 6 дорог. Сколько всего дорог в государстве?

Решение: сложим количества дорог, выходящих из всех городов: $99 \cdot 2 + 6 = 204$. Это число - количество концов всех дорог. Поскольку каждая дорога имеет 2 конца, то количество дорог будет вдвое меньше, а именно 102.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. У тренера 19 спортсменов. Может ли оказаться так, что у каждого спортсмена 1, 5 или 9 соседей?

Задача 2. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит ровно 3 дороги, быть ровно 100 дорог?

Занятие 2. Леонард Эйлер. Задачи на мосты. Графы «одним росчерком».

На втором занятии после озвучивания темы ученикам можно представить ряд графов, посмотрев на которые они должны попробовать определить какие графы можно начертить «одним росчерком», т.е. не отрывая карандаша от листа, а какие- нет.

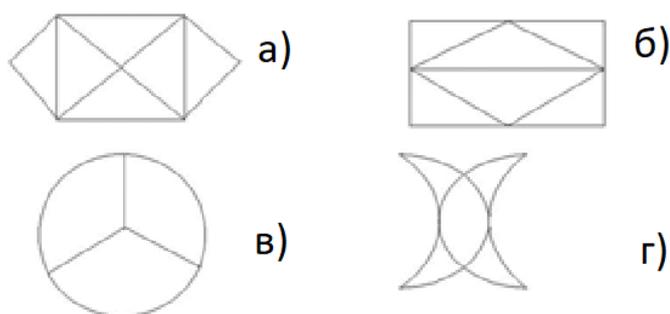


Рис. 8

Некоторые ребята догадаются что граф под буквой «в»–начертить один росчерком никак не получается. Возникает вопрос: почему же так происходит?

Существует несколько закономерностей для того чтобы определить можно ли начертить граф один росчерком или нет.

Закономерность 1. Невозможно начертить граф с нечетным числом нечетных вершин.

Закономерность 2. Если все вершины графа четные, то можно не отрывая карандаш от бумаги («одним росчерком»), проводя по каждому ребру только один раз, начертить этот граф. Движение можно начать с любой вершины и закончить его в той же вершине.

Закономерность 3. Граф, имеющий всего две нечетные вершины, можно начертить, не отрывая карандаш от бумаги, при этом движение нужно начать с одной из этих нечетных вершин и закончить во второй из них.

Закономерность 4. Граф, имеющий более двух нечетных вершин, невозможно начертить «одним росчерком».

Данные закономерности ученики должны выучить и закрепить полученные знания с помощью интерактивного приложения. Графы. Одним

росчерком. 

Определение 5. Граф, который можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги, называется **эйлеровым**.

Далее необходимо познакомить ребят с биографией Леонарда Эйлера – известного и великого математика. Затем вводим новые определения.

Определение 6. Граф называется **связным**, если любые две его вершины могут быть соединены путем, т. е. последовательностью ребер, каждое следующее из которых начинается в конце предыдущего.

Граф называется **несвязным**, если это условие не выполняется.

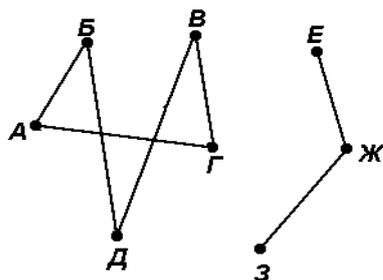


рис.9

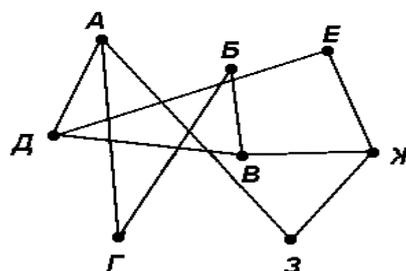


рис.10

На рисунке 9, очевидно, изображен несвязный граф. Если, например, на рисунке между вершинами Д и Е провести ребро, то граф станет связным (рис.10).

Такое ребро в теории графов (после удаления которого граф из связного превращается в несвязный) называется **мостом**.

Примерами мостов на рисунке 9 могли бы служить ребра ДЕ, АЗ, ВЖ и др., каждое из которых соединяло бы вершины «изолированных» частей графа.(рис.10)

Несвязный граф состоит из нескольких «кусков». Эти «куски» называются **компонентами связности** графа. Каждая компонента связности является, конечно, связным графом. Отметим, что связный граф имеет одну компоненту связности.

ТЕОРЕМА. Граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда он связан и имеет не более двух нечетных вершин.

Эйлеровым путём в графе называется путь, содержащий все рёбра графа. Иными словами, граф обладает эйлеровым путём, если его

можно начертить, не отрывая карандаш от бумаги и не проводя дважды по одному и тому же ребру.

Эйлеровым циклом в графе называется цикл, содержащий все рёбра графа. Иными словами, если граф можно начертить, не отрывая карандаш от бумаги и не проводя дважды по одному и тому же ребру, при этом начало и конец нашего пути совпадут, то граф обладает эйлеровым циклом.

Исторически теория графов зародилась при решении Леонардом Эйлером головоломки о Кёнигсбергских мостах. Река Прегель, протекающая через Кенинсберг, омывает два острова. Берега реки с островами были во времена Эйлера связаны мостами так, как показано на рисунке 11.

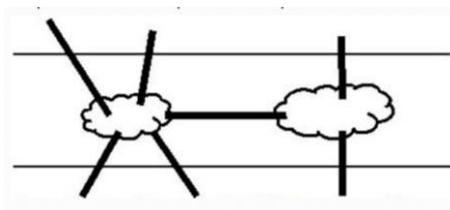


Рис.11

Жители Кенинсберга любили говорить, что никто не может осмотреть центр города, пройдя при этом по каждому из семи мостов лишь по одному разу, а начало и конец пути при этом должны совпадать. Эйлер начертил схематическую карту города (рис.12), обозначив его четыре части, отделенные друг от друга водой, точками A, B, C, D и соединив их ребрами – мостами.

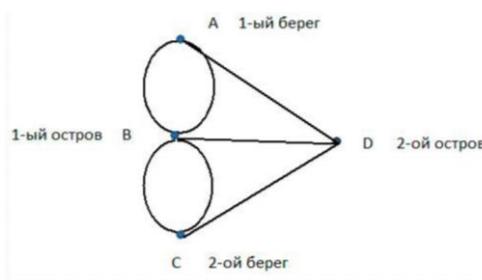


Рис.12

Пользуясь полученным графом, Эйлер доказал, что маршрута, который бы отвечал условиям задачи, не существует, и разработал теорию решения такого рода головоломок.

Алгоритм решения

Из предыдущих рассуждений мы получаем **общий прием решения** каждой подобной задачи о мостах:

- 1) преобразовать рисунок в граф (определить его вершины и рёбра);
- 2) определить степень каждой вершины;
- 3) посчитать количество нечётных вершин;
- 4) сделать выводы:

а) заданный обход возможен, если

- все вершины чётные (его можно начать с любой вершины);

- две вершины нечётные (его нужно начать с одной из нечётных вершин);

б) заданный обход невозможен, если нечётных вершин больше двух;

5) указать начало и конец пути.



5. Не отрывая карандаша от бумаги и не проводя никакую линию дважды, попробуй нарисовать эти фигуры.



Рис.13

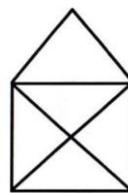
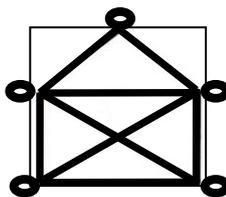


Рис.14

Решение:

- 1) Определим степень каждой вершины (рис. 14).



- 2) Степени трёх вершин чётные, а двух вершин – нечётные, значит вычерчивание одним росчерком возможно.

- 3) Начало вычерчивания – в одной из нечётных вершин, конец – в другой нечётной вершине.

Это одни из самых простых задач данного вида. Алгоритм решения подобных задач, составленный на основе рассуждений и выводов Эйлера, применим и к более сложным задачам:

Задание 1. Начертите данные рисунки, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя по одним и тем же линиям два раза.

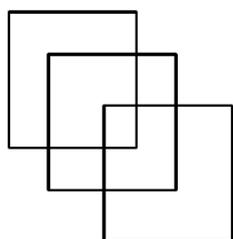


Рис. 15

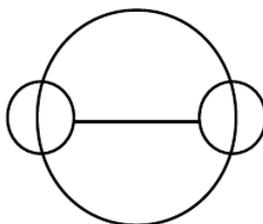


Рис.16

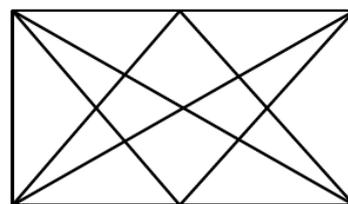


Рис.17

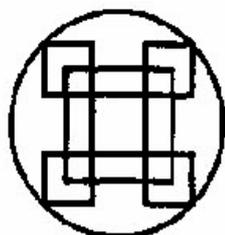


Рис.18

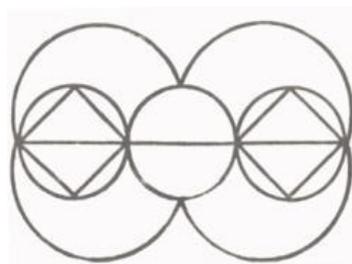


Рис.19

Можно ли так нарисовать вот эту картинку (рис.20):

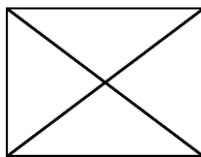


Рис.20

Задача 1. В некотором поселке (рис. 21,22,23) расположено 8 домов, которые соединены тропинками. Могут ли жители поселка пройти по всем этим тропинкам? Могут ли они пройти по всем тропинкам и вернуться в тот дом, с которого они начнут свой маршрут?

а)

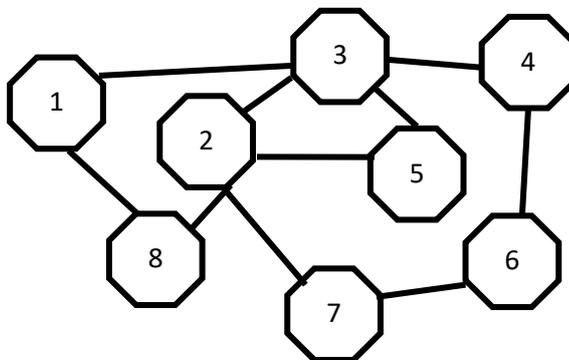


Рис.21

б)

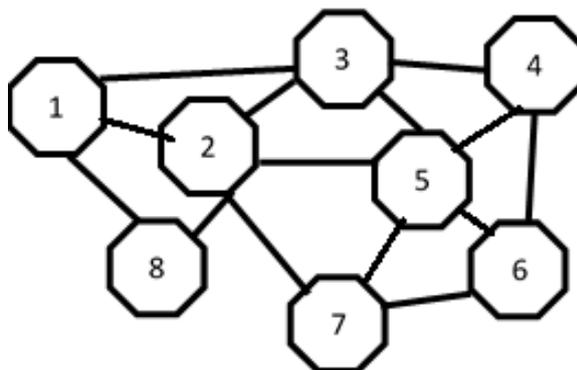


Рис.22

В)

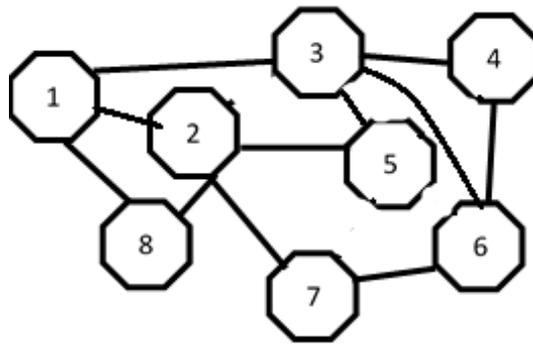


Рис.23

Задача 2. Житель поселка разработал проект соединения домов (рис.24) тропинками. Могут ли жители пройти все тропинки и вернуться в дом, с которого начали путь?

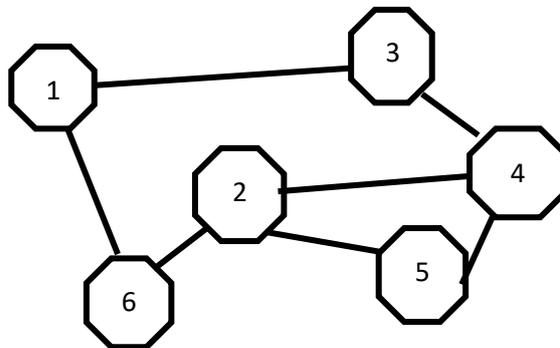


Рис.24

Как, убрав всего один мост, сделать так, чтобы жители прошли по всем дорожкам вернулись в город, с которого начали свой путь?

Как, добавив две дорожки, сделать так, чтобы жители прошли по всем дорогам и вернулись в дом, с которого начали путь?

Задание. Придумай сам графы, которые можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги.

$$3x = 4 \cdot 9, x = 12.$$

Ответ: 9 мальчиков пришло на бал.

Чтобы решить эту задачу, мы рассмотрим двудольный граф.

1 доля – это вершины мальчиков. 2 доля- это вершины девочек.

2 вершины из разных долей мы будем соединять ребром, если соответствующие мальчик и девочка танцевали на балу.

Мы знаем, что каждый М танцевал с 3 девочками. То есть степень каждой вершины из доли 1 равна 3. Также мы знаем, что каждая девочка танцевала с 4 мальчиками. Поэтому степень каждой вершины из доли 2 равна 4. Нам известно, что девочек 9 и нам надо понять сколько М?

Выпишем формулу подсчета ребер в двупольном графе, а именно сумма степеней в левой доле равняется сумме степеней в правой доле. Сумма степеней в левой доле $3x$, Сумма степеней в правой доле $4 \cdot 9$. Отсюда находим $x = 12$.

Ответ: 9 мальчиков пришло на бал.

Задача 1. На 23 февраля каждая из 12 девочек класса подарила по открытке 10 одноклассникам. Известно, что каждый мальчик получил по 6 открыток. Сколько всего мальчиков в классе?

Решение. В первую очередь, необходимо посчитать количество «ребер»: каждая из 12 девочек подарила по 10 открыток, поэтому всего было подарено 120 открыток. Так как каждый мальчик получил по 6 открыток, то всего было 20 мальчиков.

Ответ: 20 мальчиков.

Задача 2. В классе каждый мальчик дружит ровно с тремя девочками, а девочка - ровно с 6 мальчиками. Докажите, что мальчиков в классе в два раза больше, чем девочек.

Поставим в соответствие ученикам вершины графа, а «дружбы» – ребра графа. Мы учитываем только дружбу между мальчиками и девочками, поэтому граф будет двудольным.

Пусть m – число девочек в классе, n – число мальчиков. Число ребер выходящих от девочек равно $6 \times m$, а от мальчиков $3 \times n$. В двудольном графе число ребер, выходящих из одной доли равно числу ребер выходящих из другой доли. И, поэтому, в нашем случае $6 \times m = 3 \times n$. Отсюда получаем: $n/m=2$, т. е. мальчиков в два раза больше чем девочек (рис. 26).

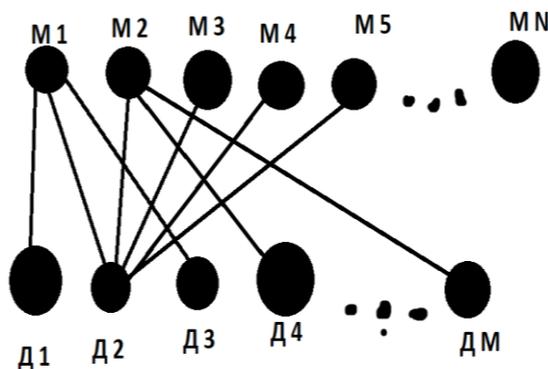


Рис.26

Лемма о рукопожатиях. В конечном графе число вершин нечетной степени – четно.

Название этой теоремы произошло от такой задачи.

Задача 3. В компании некоторые люди пожали руки друг другу. Докажите, что количество людей, сделавших нечетное число рукопожатий, четно.

Доказательство: каждый человек сделал нечетное количество рукопожатий, тогда при сложении всех нечетных рукопожатий получится четное число. Следовательно, количество людей, сделавших нечетное количество рукопожатий, является четным числом. Что и требовалось доказать.

Лемма о рукопожатиях остается верной, даже если мы разрешаем ребра, соединяющие вершину с самой собой, или ребра, соединяющие уже соединенные вершины. Да ведь и пара знакомых совершает обычно много рукопожатий!

Этот результат является основной идеей при решении многих задач.

Следствие. Число нечетных вершин графа всегда четно.

Доказательство. Сумма степеней всех вершин равно удвоенному количеству ребер, то есть должна быть четной. Следовательно, в ней должно быть четное число нечетных слагаемых.

Задача 4. В компании 13 человек. Каждый сделал по 3 рукопожатий. Сколько всего было рукопожатий?

Решение: Рассмотрим граф, в котором люди – вершины, а сделанные рукопожатия – ребра. Тогда суммарная степень всех вершин равна $13 \cdot 3 = 39$. При этом по теореме эта сумма должна быть в два раза больше числа ребер. Но сумма нечетна, и такое невозможно, ведь количество ребер не может быть нецелым.

Ответ: такого не могло быть.

Задача 5. В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга (в этом классе), 11 – по 4 друга, а 10 – по 5 друзей?

Решение. В соответствующем графе было бы 30 вершин, 9 из которых имели бы степень 3, 11 – степень 4, 10 – степень 5. Однако у такого графа 19 нечётных вершин, что противоречит лемме о рукопожатиях.

Ответ: нет, нельзя.

Задача 6. Можно ли 15 телефонов соединить проводами так, чтобы каждый был соединён ровно с 5 другими?

Решение: Рассмотрим граф, в котором телефоны — это вершины. Вершины будем соединять ребром, если телефоны соединены проводом. В любом графе число нечетных вершин четно. Значит, так соединить телефоны не получится.

Задача 7. Миша, приехав из парка развлечений, рассказывал, что там на волшебном озере имеются семь островов, с каждого из которых ведет один, три или пять мостов. Верно ли, что, хотя бы один из этих мостов обязательно выходит на берег озера?

Решение: Рассмотрим граф, вершины которого – острова, а ребра – мосты. Если бы все мосты связывали только острова, то в нашем графе было

бы нечетное количество нечетных вершин. Это противоречит теореме. Следовательно, один из мостов не является ребром и выходит на берег озера. Ответ: да, верно.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. На конференцию приехало 100 ученых. Во время церемонии открытия каждый пожал руку пяти другим. Сколько рукопожатий было совершено?

Задача 2. Во дворе стоят 10 берёз и 6 фонарных столбов. Между ними натянуты бельевые верёвки так, что к каждому столбу привязано 7 веревок, а к каждой березе — 5. Сколько во дворе бельевых веревок?

Задача 3. Сумма номеров всех домов на улице четная. Докажите, что количество домов на этой улице, имеющих нечетные номер, делится на два.

Задача 4. Программист соединил 10 компьютеров проводами так, что из каждого компьютера выходит по 5 проводов, а каждый провод соединяет два компьютера между собой. Сколько всего проводов протянул программист?

Занятие 4. Понятие дерева в теории графов.

Дерево возможных вариантов.

Данная тема предполагает задания поискового и исследовательского характера.

Вводятся понятия, связанные с деревьями, рассматриваются особенности деревьев и возможности их использования при решении разных задач. Вычерчивать дерево полезно, когда требуется записать все существующие комбинации элементов.

Цель данного занятия изучить понятия «дерево возможных вариантов» и определить возможность использования теории графов в практических, жизненных ситуациях

Деревья определяются как графы, не имеющие циклов. Это одно из наиболее часто встречающихся в теории графов понятий, одновременно простое и удобное в обращении.

Ребра графов, являющегося деревом, иногда называют ветвями дерева, а само дерево – деревом вариантов.

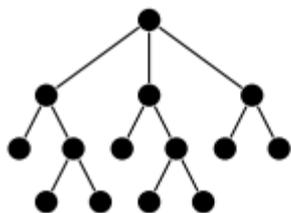


Рис.27

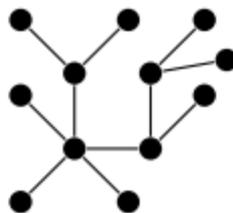


Рис.28

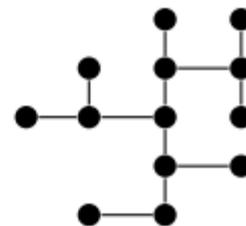


Рис.29

Как видно из примера, у деревьев определенная древовидная ветвистость, откуда они и получили свое название.

Благодаря связности и отсутствию циклов у деревьев есть ряд свойств:

- В любом дереве есть ровно один путь из каждой вершины в каждую другую. Например, если есть два пути к вершине, то их можно объединить, чтобы получить цикл
- У деревьев наименьшее количество ребер, которое только может быть у графа. При этом они остаются связными. Каждое ребро дерева — режущее, значит, не лежит в цикле
- У деревьев наибольшее число ребер, которое может быть у графа без циклов.

Теорема 1. В любом дереве есть вершина, из которой выходит ровно одно ребро. Такую вершину называют висячей.

Теорема 2. В дереве количество вершин на 1 больше количества ребер: $V = E + 1$, где V – количество вершин графа, E – количество ребер.

Теорема 3. Из любого связного графа можно удалить часть ребер (не удаляя вершин) так, чтобы осталось дерево.

Задача 1. Нарисуйте все деревья с пятью вершинами. Объясните, почему других деревьев нет.

Решение:

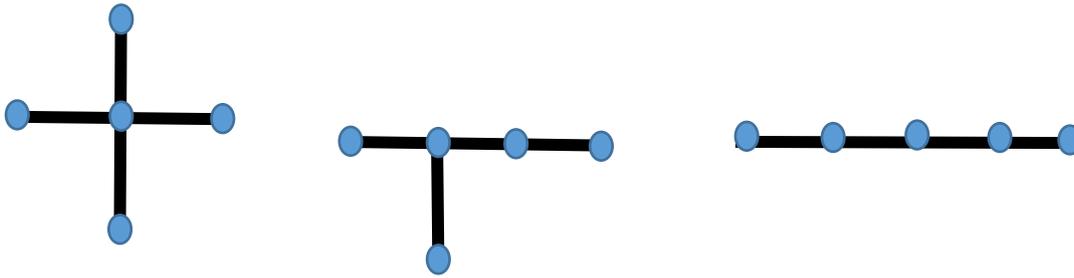


Рис.30

Эта задача учит правильной организации перебора. Чтобы не пропустить ни одного графа, их нужно упорядочить по какому-либо признаку. Например, можно упорядочить графы по самому длинному содержащемуся в них пути. Тогда дальнейший перебор не представляет трудностей.

Задача 2. Сколько двузначных чисел можно составить, используя цифры 4, 6 и 8?

Решение. Для того, чтобы не пропустить и не повторить ни одно из чисел, будем выписывать их в порядке возрастания. Сначала запишем числа, начинающиеся с цифры 4, затем с цифры 6, и наконец, с цифры 8. Получим следующую таблицу:

44	46	48
64	66	68
84	86	88

Таким образом, из трех данных цифр можно составить 9 различных двузначных чисел. Представим для решения данной задачи специальную схему «дерево».

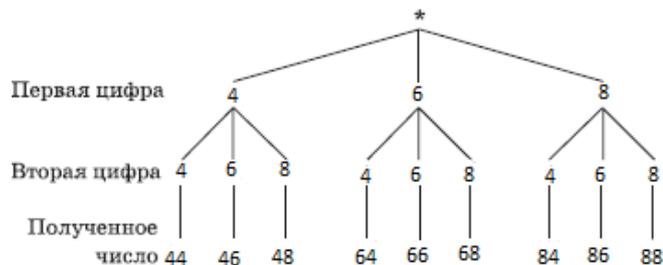


Рис.31

Эта схема напоминает дерево. Знак «*» изображает корень дерева, ветви дерева — различные варианты решения. Чтобы получить двузначное число, надо сначала выбрать первую его цифру, а для нее есть три варианта: 4, 6 или 8. Поэтому из «корня» проведены три «веточки» и на их концах поставлены цифры 4, 6 и 8. Далее от каждой цифры тоже проведены три ребра и снова три цифры, а затем уже получается двухзначное число.

Задача 3. «Озорница куница, веселая птица, маленькая заяка да непоседливый барсук затеяли сыграть в квартет». Куница расположилась напротив барсука, а слева и справа от нее – птица и заяка. «Ударили в смычки, дерут, а толку нет». Тогда птичка и заяка поменялись местам. «Расселись, начали квартет. Он все-таки на лад нейдет». Они перепробовали все возможные варианты. Барсук всегда оставался на одном месте. Сколько всего было вариантов расположения незадачливых музыкантов?

Решение:

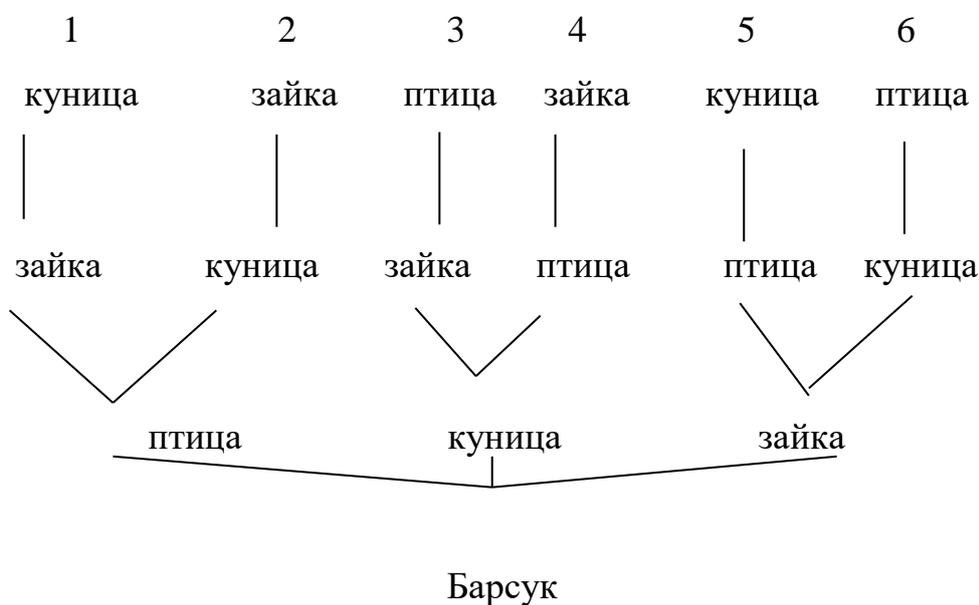


Рис.32.

Варианты расположения музыкантов в квартете.

Задача 4. Для учащихся 5 «а» класса нужно составить расписание уроков на понедельник. Должны быть такие предметы: 2 урока математики, по 1 уроку русского языка, истории, биологии и географии. Учителя математики высказала пожелание, чтобы ее уроки были 1 и 3. Учителя русского языка и истории согласны заниматься с учащимися на 2 или 4 уроках. Учителя биологии и географии – на 5 или 6. Сколько вариантов расписания можно составить?

Решение:



Рис.33

Можно составить 16 вариантов расписания. Вот некоторые из них:



Рис.34



Рис.35



Рис.36

Задача 5. В связи с плохой погодой задерживаются четыре рейса самолетов – в Санкт-Петербург, Екатеринбург, Сочи и Иркутск. Командиры самолетов высказали пожелания, чтобы рейс в Санкт-Петербург был первым или вторым, в Екатеринбург – вторым или третьим, в Сочи – третьим или четвертым, а в Иркутск – первым или четвертым.

Можно ли удовлетворить пожеланиям летчиков? Если да, то перечислите возможные варианты вылетов.

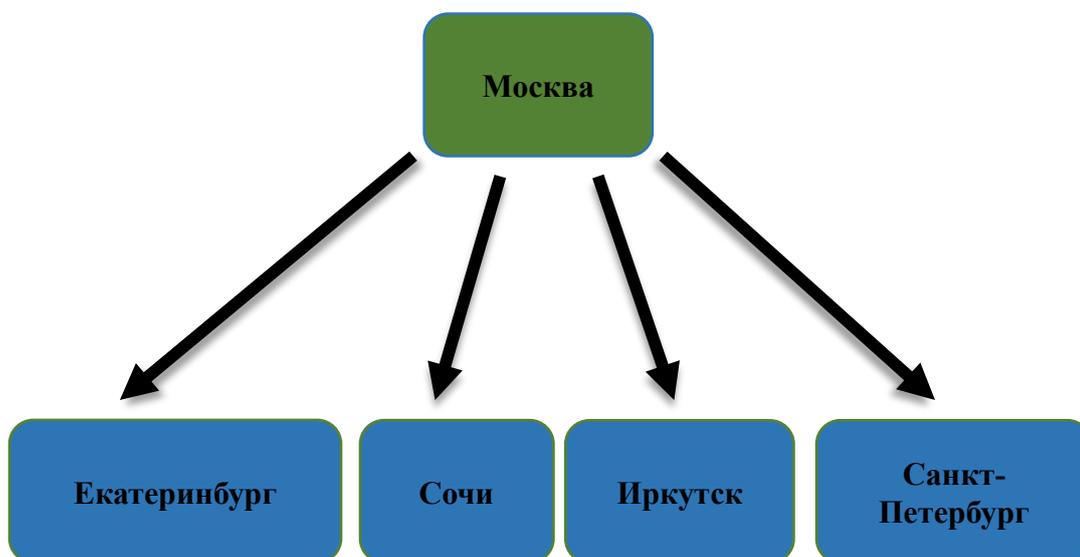


Рис.37

Ответ: возможно 2 варианта.

1. Первый рейс – в Санкт-Петербург, второй – в Екатеринбург, третий – в Сочи, четвертый – в Иркутск.
2. Первый рейс – в Иркутск, второй – в Санкт-Петербург, третий – в Екатеринбург, четвертый – в Сочи.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Сколько различных трехзначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 5, 9, если цифры в числе могут повторяться?

Задача 2. Сколько различных способов обедов П.П. Петров мог насчитать из блюд, выставленных на столе у С.С. Сидорова, если бы на каждый обед выбирать одно холодное блюдо, одно первое, одно второе, одно третье? На столе у С.С. Сидорова на этот раз были выставлены холодец, кабачковая икра, сало; на первое – борщ, суп гороховый; на второе – форель жаренная, гуляш из говядины; на третье – яблоки, дыня.

Задача 3. Используя меню школьной столовой, укажите все возможные обеды из двух блюд, которые может заказать посетитель. Свой ответ проиллюстрируйте, построив дерево возможных вариантов.

Задача 4. Перечислите все возможные сочетания деловой одежды, если у вас в гардеробе брючный костюм черного цвета, белая и голубая блузки, синяя юбка и серый джемпер.

Задача 5. Составьте генеалогическое древо своей семьи.

Задача 6. Графы. Соответствие



Занятие 5. История лабиринтов. Способы прохождения лабиринта.

Данное занятие следует начинать с истории появления лабиринтов. Обычно, дети к 5 классу уже хорошо проходят лабиринты и решают их с большим удовольствием. Следует показать методы решения лабиринтов и предоставить сами лабиринты для их решения.

- 1. МЕТОД ПРОБ И ОШИБОК. Выбирайте любой путь, а если он заведет вас в тупик, то возвращайтесь назад и начинайте все сначала.
- 2. МЕТОД ЗАЧЕРКИВАНИЯ ТУПИКОВ. Начнем последовательно зачеркивать тупики, т.е. маршруты, не имеющие ответвлений и заканчивающиеся перегородкой. Не зачеркнутая часть коридоров будет выходом или маршрутом от входа к выходу или к центру.
- 3. ПРАВИЛО ОДНОЙ РУКИ. Оно состоит в том, что по лабиринту надо двигаться, не отрывая одной руки (правой или левой) от стены.

Пример задания. Найдите путь от старта до финиша.

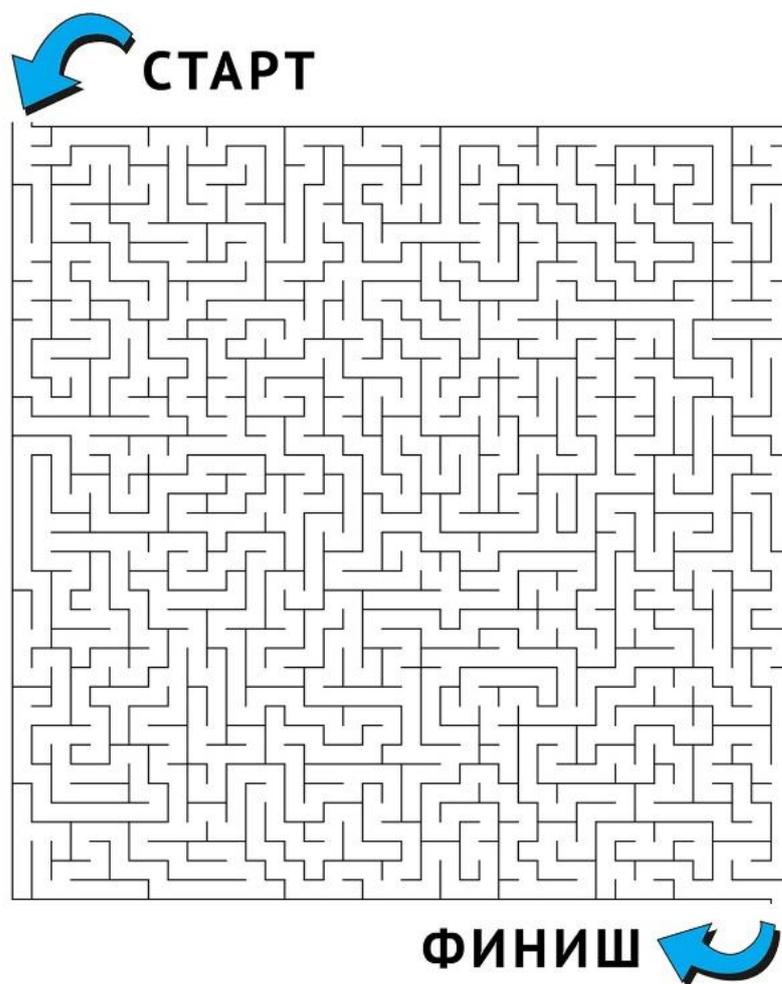


Рис.38

Занятие 6. Задача четырех красок. Графы с цветными ребрами.

На данном занятии вводят понятие минимальной раскраски, а также на примерах рассматриваются основные принципы решения задач на раскраску карт и плоского графа.

Я придумала интересную задачу о раскраске карты Костромской области. Рассмотрим карту Костромской области. Костромская область включает 24 административных района.

Вопрос: Возможно ли раскрасить Костромскую область по районам, используя только четыре краски (, чтобы при этом любые два города, которые соединены границей, были разного цвета.

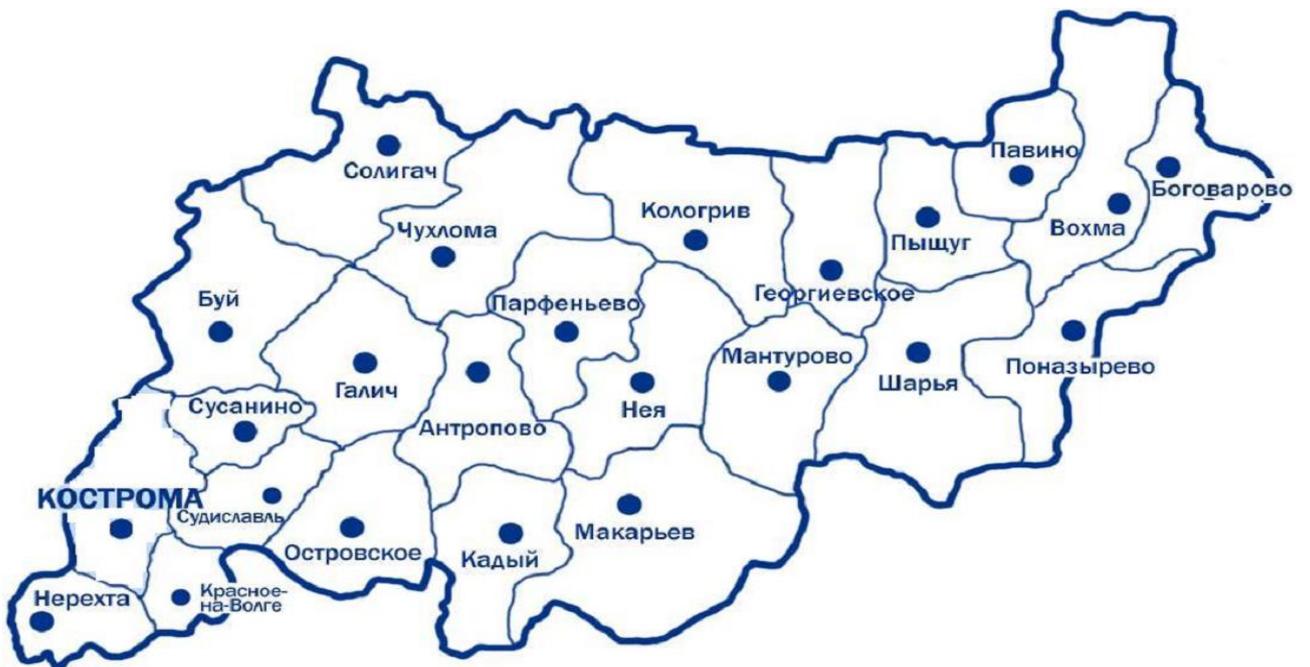


Рис.39

Решение: При решении данной задачи необходимо построить на плоскости граф, чтобы его рёбра не пересекались нигде, кроме вершин, т.е. плоский граф.

Для построения графа необходимо в каждом районе карты взять по точке-вершине графа и дугами соединить те точки, для которых районы имеют общую границу- участок линии, но не точку.

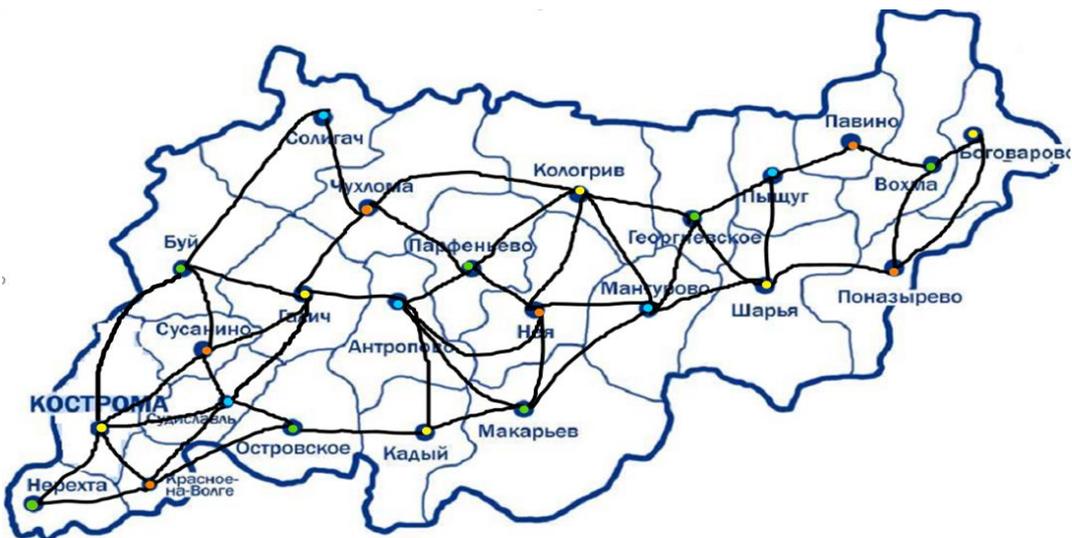


Рис.40

После построения графа, раскрасить вершины графа, чтобы соединенные ребром вершины были раскрашены в разные цвета. Раскрасив районы карты в цвета этих вершин, мы получим раскраску карты, в которой любые две области, имеющие границы- участки линий, но не точки, окрашены в разные цвета.



Рис.41

Ответ: Да, возможно раскрасить Костромскую область по районам, используя только четыре краски (■ ■ ■ ■), чтобы при этом любые две вершины, которые соединены ребром, были разного цвета.

Занятие 7. Как составить математический граф для игры «в крестики нолики»?

Каждый, конечно, хоть раз играл в «крестики-нолики» на игровом поле 3×3 . Для того чтобы составить граф для этой игры, необходимо ввести обозначения для каждой из девяти клеток игрового поля:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Рис.42

Теперь очередной ход игры удобно описывать, используя специальные обозначения. Например, если игрок ставит крестик в клетку 1, кратко запишем так: X1, если игрок ставит нолик в клетку 9, запишем: O9.

X1	2	3
4	5	6
7	8	O9

Рис.43

Крестики-нолики простейшая игра, в которой исход определяется в пользу начинающего, если он действует «правильно», в соответствии с точно определённым алгоритмом. Алгоритм этот представляет собой инструкцию, как нужно отвечать на ту или иную инициативу соперника. И тут нам на помощь может прийти «дерево».

Пусть игра начата ходами (X1) и (O3), построим дерево, описывающее дальнейшую разумную игру крестиками.

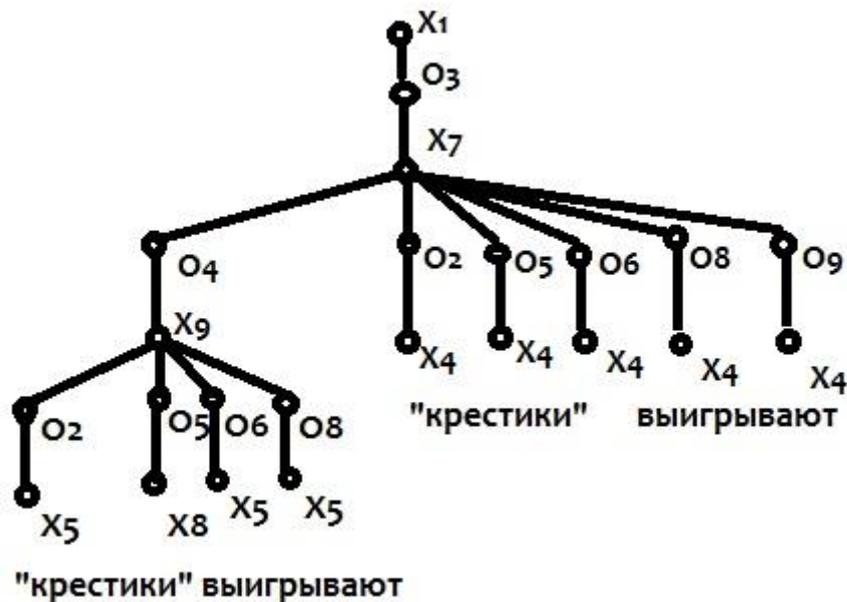


Рис.44

Если «нолики» играют «неразумно», то крестики ходом Х4 благополучно заканчивают партию. Такие варианты описаны правой частью «дерева» и представляют собой наиболее короткие партии.

Если же «нолики» пытаются сопротивляться и занимают клетку О4, то партия будет немного длиннее (левая часть «дерева»).

Если же и «крестики», и «нолики» ведут разумную игру, партии, как правило, заканчиваются вничью.

Задание 1. Построй «дерево» разумной игры и «крестиков», и «ноликов», если за ходом Х1, следует ход О5.

Задание 2. Построй дерево игры, показывающее ходы партнёров, приводящие к победе «крестиков», если игра начата ходами:

- а) Х1 и О2;
- б) Х1 и О9;
- в) Х5 и О8.

Задание 3. Покажите, составив соответствующее «дерево», что, если игра начата ходами Х1 и О6, то «крестики» могут при разумной игре добиться победы независимо от игры «ноликов».

Задание 4. Покажите, что «нолики» добьются ничьей независимо от игры «крестиков», если игра начата ходами:

- а) Х2 и О5;
- б) Х5 и О3.

Задание 5. Теперь ты знаешь все выигрышные ходы в этой игре, попробуй поиграть в эту игру на «бесконечном игровом поле» (например, на целом листе бумаги в клетку).

Занятие 8. Графы и логические задачи.

Выделяя из словесных рассуждений главное — объекты и отношения между ними, графы представляют изучаемые факты в наглядной форме. Приемы решения логических задач с использованием графов подкупают своей естественностью и простотой, избавляют от лишних рассуждений, во многих случаях сокращают нагрузку на память. С одной стороны, графы помогают

проследить все логические возможности изучаемой ситуации, с другой, благодаря своей обозримости, помогают тут же, в ходе решения задачи, классифицировать логические возможности, отбрасывать неподходящие случаи, не доводя до полного перебора всех случаев.

Представленные здесь задачи, связаны с обычной деятельностью мышления. Эти задачи призваны не только оживить изложение, но и наглядно продемонстрировать, что логическое - это не только предмет специальных размышлений, но и то, с чем постоянно сталкивается каждый.

Задача 1. В бутылке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что:

- Вода и молоко не в бутылке.
- Сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом.
- В банке не лимонад и не вода.
- Стакан стоит между банкой и сосудом с молоком.

В каком сосуде находится, какая из жидкостей?

Первое решение задачи рассмотрим с помощью таблицы 4.

Табл.1

	Молоко	Лимонад	Квас	Вода
Бутылка	-	+	-	-
Стакан	-	-	-	+
Кувшин	+	-	-	-
Банка	-	-	+	-

Ответ: в кувшине-молоко, в банке-квас, в стакане-вода, в бутылке-лимонад

Второе решение данной задачи можно рассмотреть с помощью графов.

Соединим пунктирными ребрами те вершины, которые не могут быть связаны друг с другом.

Синими пунктирными линиями соединим вершины, которые возможно могут быть связаны друг с другом.

Красными линиями соединим вершины, которые связаны друг с другом.

Тогда получаем:

В *бутылке* – квас или лимонад, так как в банке только квас, значит в бутылке – лимонад;

В *кувшине* – молоко или вода, так как в стакане не молоко, значит – вода, а кувшине тогда молоко.

Ответ: в кувшине-молоко, в банке-квас, в стакане-вода, в бутылке-лимонад

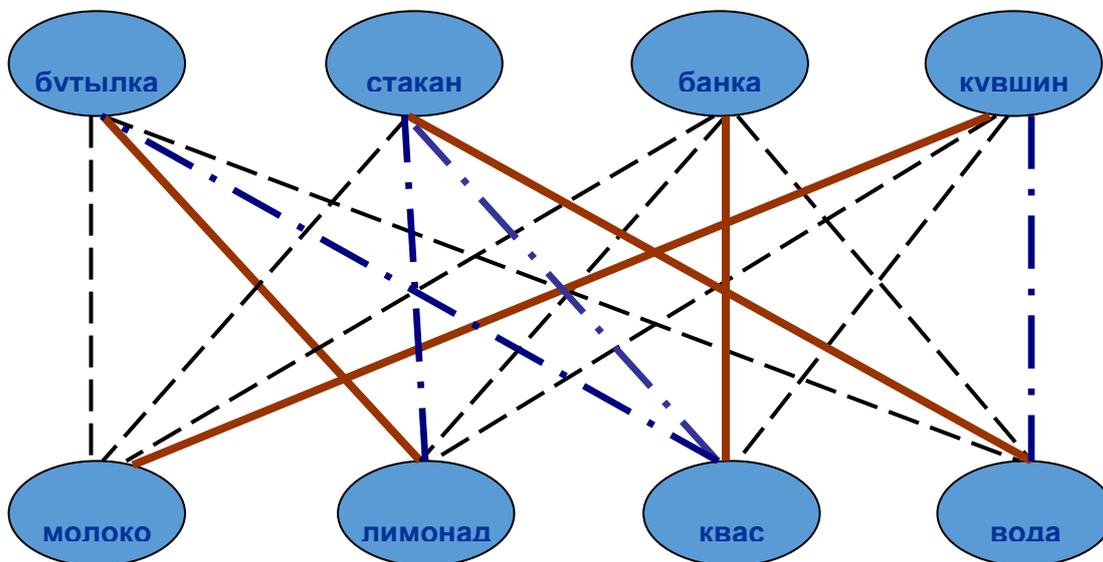


Рис.45

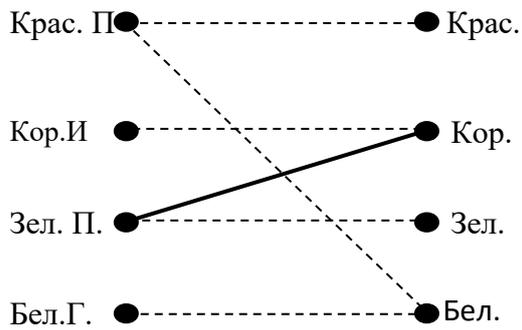
Данную задачу можно решить интерактивно, используя приложение.



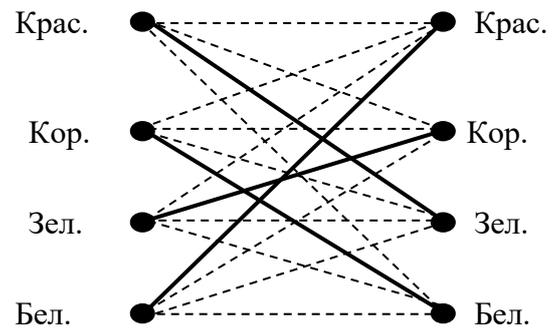
Решение логической задачи

Задача 2. Однажды мама, в магазине купила разную приправу: красный перец, коричневый имбирь, зелёную петрушку и белую горчицу. Придя домой, она разложила всё это в баночки для специй. Я знаю, что у нас дома каждая специя лежит в своей баночке и цвет банки не соответствует свету специй. Так же известно, что зеленая петрушка лежит в коричневой банке, а красный перец не лежит в белой баночке. Мне для приготовления плова нужно узнать: **«В какой банке лежит каждая специя?»**

Решение: Обозначим точками специи и баночки. Сплошная линия будет обозначать, что специя лежит в соответствующей баночке, а пунктирная, что не лежит. Тогда с учетом задачи имеем граф G_1 .



Граф G_1



Граф G_2

Рис.46

Далее достраиваем граф по следующему правилу: поскольку в баночке может лежать только одна специя, то из каждой точки должны выходить одна сплошная линия и три пунктирные. Получается граф G_2 - решение задачи.

Ответ: Красный перец лежит в зелёной банке, имбирь лежит в белой банке, зелёная петрушка – в коричневой, а белая горчица лежит в красной баночке.

Задача 3. Три профессора (Иванов, Петров и Сидоров) преподают различные предметы (химию, биологию, историю) в университетах Москвы, Минска и Киева.

Известно, что:

- Иванов никогда не был в Киеве, а Петров - в Минске;
- Киевлянин старше профессора истории;
- Петров играет в шахматы лучше, чем биолог;
- Минчанин преподает химию.

Вопрос: где и что преподает Сидоров? (рис. 47)

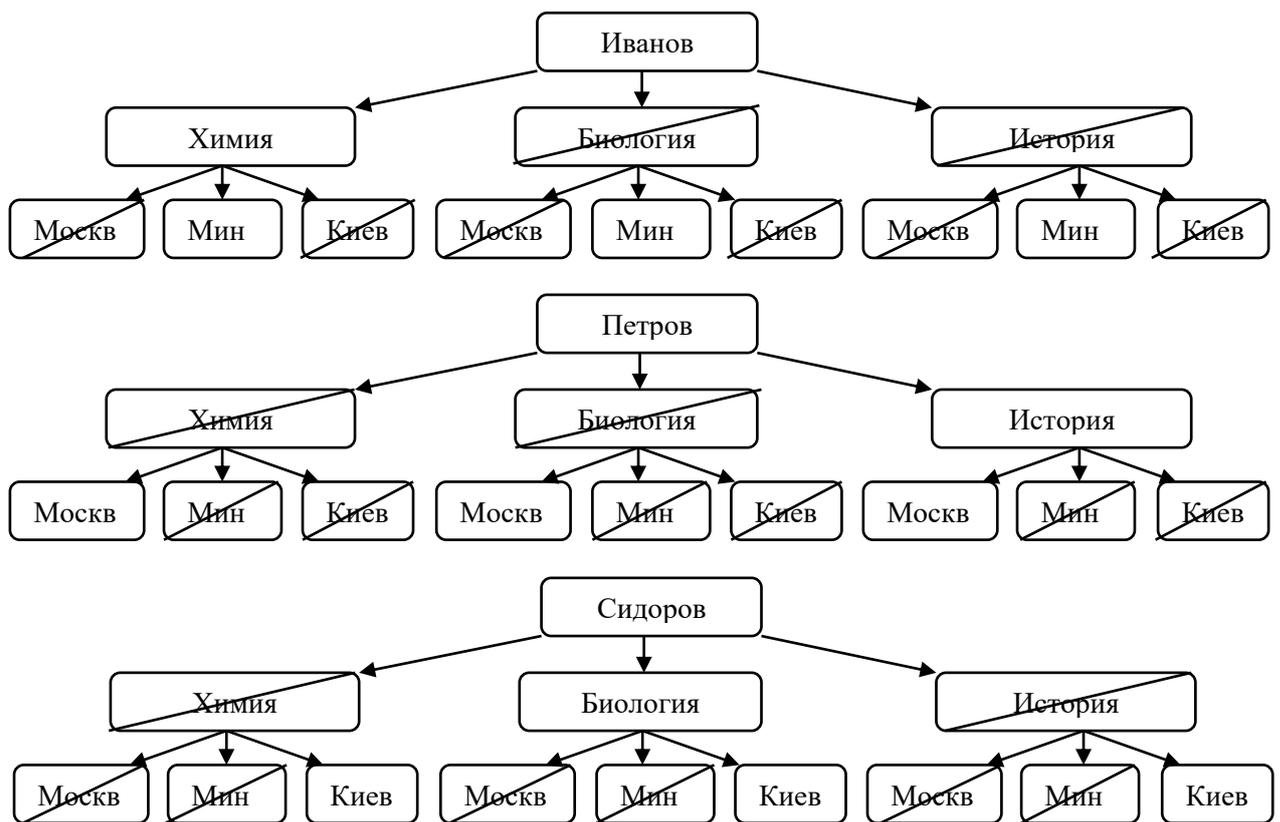


Рис.47

Т.к. Иванов никогда не был в Киеве, а Петров в Минске \Rightarrow Иванов не из Киева, а Петров не из Минска.

1. Петров играет в шахматы лучше, чем биолог \Rightarrow Петров не биолог.
2. Минчанин преподает химию. \Rightarrow Петров не преподает химию. \Rightarrow Петров Историк. \Rightarrow Иванов не историк и Сидоров не историк.
3. Киевлянин старше профессора истории \Rightarrow Петров не может быть киевлянином. \Rightarrow Петров – москвич. Киевлянином может быть только Сидоров. \Rightarrow Сидоров не может быть москвичом или минчанином \Rightarrow Иванов – минчанин.
4. Минчанин преподает химию \Rightarrow Иванов – химик. \Rightarrow Иванов не может быть биологом, а Сидоров – химиком \Rightarrow Сидоров – биолог.
5. Ответ: Сидоров – биолог и живет в Киеве.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Беседуют трое друзей – Белокуров, Рыжов и Чернов. Брюнет сказал Белокурову: «Любопытно, что один из нас – блондин, другой – брюнет, третий – рыжий, но ни у кого цвет волос не соответствует фамилии». Какой цвет волос у каждого из друзей?



Задача 2. В Артеке за круглым столом оказалось пятеро ребят из Москвы, Санкт-Петербурга, Новгорода, Перми и Томска: Юра, Толя, Алеша, Коля и Витя. Москвич сидел между Томичем и Витей, Санкт-петербуржец – между Юрой и Толей, а напротив него сидел пермяк и Алеша. Коля никогда не был в Санкт-Петербурге, Юра не бывал в Москве и Томске, а Томич с Толей регулярно переписываются. Определите, кто в каком городе живет.

Задача 3. Три подруги вышли в белом, зеленом и синем платьях и туфлях. Известно, что только у Ани цвета платья и туфель совпадали. Ни туфли, ни платье Вали не были белыми. Наташа была в зеленых туфлях.

Задача 4. На улице, встав в кружок, беседуют Аня, Валя, Галя и Надя. Девочка в зеленом платье – не Аня и не Валя – стоит между девочкой в голубом платье и Надей. Девочка в белом платье стоит между девочкой в розовом и Валею. Какого цвета платье у каждой из девочек?

Задача 5. В семье четверо детей. Им 5, 8, 13 и 15 лет. Зовут их Аня, Боря, Вера и Галя. Сколько лет каждому ребенку, если одна девочка ходит в детский сад, Аня старше Бори, а сумма лет Ани и Веры делится на три?



Задача 6. Какое наименьшее число переливаний необходимо для того, чтобы с помощью 7-и 11-литровых сосудов и крана с водой отмерить 2 литра?

Задача 7. Викторина на логические задачи



Занятие 9-10. Решение задач по теории графов.

Задача 1. Аркадий, Борис, Владимир, Григорий и Дмитрий при встрече обменялись рукопожатиями (каждый пожал руку каждому по одному разу). Сколько всего рукопожатий было сделано?

Ответ: 10.

Задача 2. 4 человека из нашего класса захотели поздравить друг друга с новым годом. Сделать это решили с помощью SMS-ок. Сколько всего SMS-ок было отправлено?

Ответ: 12.

Задача 3. Назовите степени каждой вершины на рисунке.

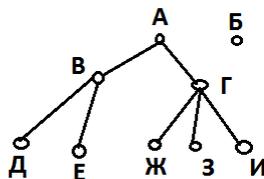


Рис.48

Задача 4. Можно ли нарисовать изображенный на рисунке граф не отрывая карандаш от бумаги и проводя каждое ребро ровно один раз?

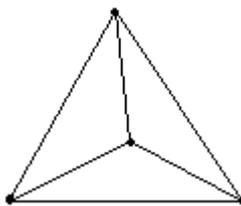


Рис.49

Ответ: нельзя нарисовать указанным в условии способом.

Задача 5. а) Расположите на плоскости 6 точек и соедините их непересекающимися линиями так, чтобы из каждой точки выходили 4 линии.

б) проведите 6 прямых и отметьте на них 7 точек так, чтобы на каждой прямой было ровно три из отмеченных точек.

Задача 6. а) Зачеркните 9 точек, изображенных на левом рисунке, четырьмя отрезками, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя никакую линию дважды. б) 13 точек, изображенных на правом рисунке, пятью отрезками, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя никакую линию дважды (рис. 50).

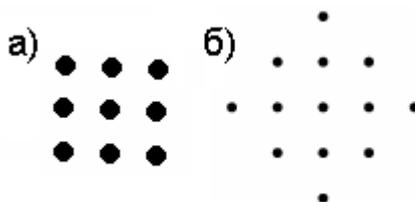


Рис.50

Задача 7. Пешеход обошёл шесть улиц одного города, пройдя каждую ровно два раза, но не смог обойти их, пройдя каждую лишь раз. Могло ли это быть?

Задача 8. В одном классе учатся Иван, Петр и Сергей. Их фамилии Иванов, Петров и Сергеев. Установи фамилию каждого из ребят, если известно, что Иван не Иванов, Петр не Петров и Сергей не Сергеев и что Сергей живет в одном доме Петровым.

Задача 9. Андрей, Борис, Витя и Гриша – друзья. Один из них – врач, другой – журналист, третий – тренер, четвертый – строитель. Журналист написал статьи об Андрее, Борисе и Грише. Тренер и журналист вместе с Борисом ходили в поход. Андрей и Борис были на приеме у врача. У кого какая профессия?

Задача 10. В столовой на горячее можно заказать щуку, грибы и баранину, на гарнир – картофель и рис, а из напитков – чай и кофе. Сколько различных вариантов обедов можно составить из указанных блюд?

Задача 11. В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том

и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9?

Решение.

Ни из какого города-цифры, не кратной 3, нельзя долететь в город-цифру, кратную 3.

Ответ. Нельзя.

Задача 12. В государстве 100 городов, и из каждого из них выходит 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве?

Решение.

$$100 \cdot 4 : 2 = 200.$$

Ответ. 200 дорог.

Задача 13. Докажите, что в любом графе

а) сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу рёбер (и, следовательно, чётна);

б) число вершин нечётной степени чётно.

Решение:

а) При сложении степеней вершин каждое ребро учитывается дважды: по разу для каждой из вершин, которые оно соединяет.

б) Сразу следует из а) и того очевидного факта, что сумма нечётного числа нечётных чисел нечётна.

Задача 14. В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы было 4 телефона, каждый из которых соединен с тремя другими, 8 телефонов, каждый из которых соединен с шестью, и 3 телефона, каждый из которых соединен с пятью другими?

Ответ. Нельзя.

Задача 15. На День рождения к Андрею пришли Вася, Глеб, Даша, Митя, Петя, Соня и Тимур. Покажите, как восьмерых ребят можно рассадить за круглый стол, чтобы у любых двух, сидящих рядом, в именах встречались одинаковые буквы.

Ответ. Можно посадить детей так: Вася → Даша → Андрей → Глеб → Петя → Тимур → Митя → Соня.

Задача 16. В некотором государстве 6 городов и 10 автодорог, каждая из которых связывает какие-то два города. Между городами устанавливается авиационное сообщение, исходя из принципа экономии: авиационная линия между двумя городами устанавливается тогда и только тогда, когда автомобильная дорога между этими городами отсутствует. Сколько авиалиний будет проведено?

Задача 17. В стране 1329 городов, из каждого выходит по 4 дороги. Сколько всего дорог в стране?

Задача 18. Расставьте в кружочках числа 1, 2, 3, ..., 8 так, чтобы ни в каких двух соединённых отрезком кружочках не оказались бы соседние (то есть отличающиеся на 1) натуральные числа (рис. 51).

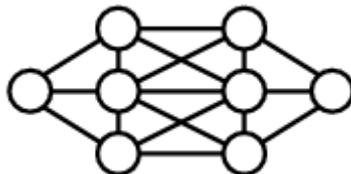


Рис.51

Задача 19. Житель Костромы был в некоторых городах Золотого кольца России. Отправляясь в Москву он захотел побывать в остальных городах Золотого кольца : Ростов, Сергиев Посад, Владимир, Суздаль. Какой маршрут будет наиболее коротким, если начальная точка путешествия Кострома, а конечная Москва. Необходимо посетить обязательно все 4 города, в которых он не был. Посчитать расстояние кратчайшего пути (рис. 52).

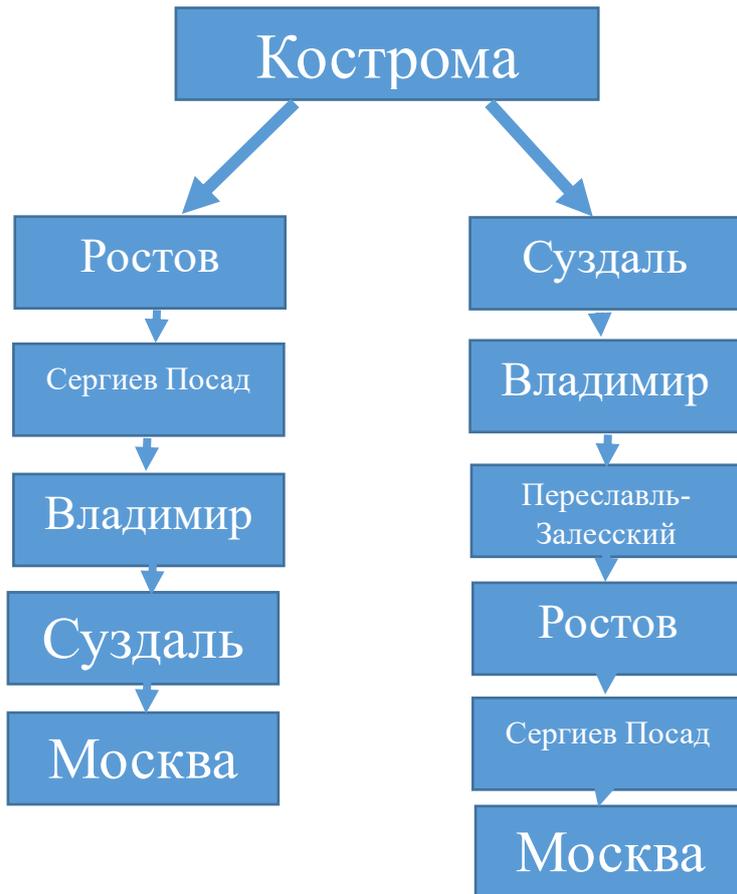


Рис.52

Расстояния:

- Кострома-Ростов 130 км
- Ростов-Сергиев Посад 148 км
- Сергиев Посад-Москва 74 км
- Кострома-Суздаль 183 км
- Суздаль-Владимир 37 км
- Суздаль-Москва 240 км
- Владимир-Москва 186 км
- Владимир-Сергиев Посад 214 км
- Владимир-Переславль Залесский 132 км
- Переславль Залесский-Ростов 66 км

Решение: Возможные кратчайшие пути



Сделаем расчёт:

$$К-Р-С.П.-В-С.-М=130+148+214+37+240=769 \text{ км}$$

$$К-С-В-П.З.-Р.-С.П.-М.=183+37+132+66+148+74=640 \text{ км}$$

Ответ: кратчайший путь будет составлять 640 км

Задача 20. Студент из Костромы приехал на сутки в Москву для того чтобы посетить интересные места, такие как: парк Горького, Третьяковская галерея, Красная площадь, государственный музей востока. Он остановился на станции метро Мичуринский проспект. Найдите станции метро (используя карту Москвы) на которых находятся данные места и рассчитайте с помощью приложения самый короткий путь по разработанному вами маршруту от станции метро Мичуринский проспект с возвращением обратно на эту же станцию при условии, что он посетит все запланированные места, если студент будет передвигаться только с помощью метро. Начерти граф разработанного маршрута и представь его расчет по времени.

Проверь себя через приложение правильно ли ты нашел станции метро достопримечательностей, которые хочет посетить студент.



Схема метро Москвы 2024



Рис.53

Для расчёта времени используйте приложение **Карта метро Москвы 2024 с расчетом времени** или <https://www.moscowmap.ru/metro.htm>

Оглавление

Разработка факультативного курса по теме «Графы» для 5-6 классов с использованием интерактивных приложений.....	1
Тематическое планирование факультативного курса «Графы».....	2
Занятие 1. Что такое графы? Элементы графа. Степени вершины.....	3
Занятие 2. Леонард Эйлер. Задачи на мосты. Графы «одним росчерком»	8
Занятие 3. Двудольные графы. Лемма о рукопожатиях.	16
Занятие 4. Понятие дерева в теории графов. Дерево возможных вариантов.	20
Занятие 5. История лабиринтов. Способы прохождения лабиринта.....	26
Занятие 6. Задача четырех красок. Графы с цветными ребрами.....	27
Занятие 7. Как составить математический граф для игры в «крестики нолики».....	29
Занятие 8. Графы и логические задачи.	31
Занятие 9-10. Решение задач по теории графов.....	37