

Муниципальное общеобразовательное учреждение «Воробьёвская
средняя общеобразовательная школа» Вохомского муниципального района
Костромской области

**Методическая разработка
образовательного модуля по геометрии в 9 классе
на этапе итогового повторения по теме
«Окружность, круг и их элементы».**

Составитель:
Рошу Елена Владимировна
учитель математики

Пояснительная записка

По окончании основной школы выпускники сдают обязательный экзамен по математике, в который с 2013 года отдельным модулем входит геометрия. Задачи по геометрии занимают примерно третью часть всех заданий КИМов.

Геометрия является одним из самых сложных предметов, изучаемых в школе. И дело не только в том, что необходимо применять теоретические знания для решения задач (это нужно и на многих других предметах), но и в том, что нет возможности дать учащимся алгоритм, который подошел бы для решения любой задачи.

Поэтому при обучении возрастает значение «ключевых» (опорных, базовых) задач, обобщающих полезный факт, либо иллюстрирующий метод или прием. «Ключевая» задача является средством решения других задач, поэтому ее знание учащимися обязательно.

Чтобы обеспечить прочность знаний и навыков, приобретаемых учащимися в процессе изучения геометрии, нужно правильно организовать повторение. Итоговое повторение учебного материала преследует цели:

- обозрения основных понятий, ведущих идей курса геометрии;
- углубления и по возможности расширения знаний учащихся по основным вопросам курса в процессе повторения;
- новый подход к ранее изученному материалу, присоединения к изученному материалу предшествующих лет обучения новых знаний допускаемых программой, с целью его углубления.

Структура образовательного модуля строится на устных заданиях для повторения теории; ключевых задачах; практикуме по решению задач на уроке; заданий для самостоятельной работы; заданий для домашней работы.

Цель методической разработки – подготовка выпускников основной школы к итоговой аттестации по математике.

Задачи методической разработки - выделение базового уровня по теме модуля; выделение основных затруднений учащихся; выделение повышенного уровня сложности по теме.

Предполагаемые результаты от применения методической разработки – обеспечение эффективности и результативности проведения итогового повторения; создание условий для повышения познавательной активности учащихся.

Ожидаемые результаты внедрения разработки – мониторинг результатов ОГЭ по математике в 9 классе.

Теоретические сведения (список определений, список теорем).

Окружностью называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, равноудалённых от данной точки – центра окружности.

Расстояние от точек окружности до её центра называется радиусом окружности.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется хордой.

Хорда, проходящая через центр, называется диаметром.

Окружность называется описанной около треугольника, если она проходит через все его вершины.

Теорема. Центр окружности, описанной около треугольника, является точкой пересечения перпендикуляров к сторонам треугольника, проведённых через середины этих сторон.

Прямая, проходящая через точку окружности перпендикулярно к радиусу, проведённому в эту точку, называется касательной. Данная точка называется точкой касания.

Две окружности, имеющие общую точку, касаются в этой точке, если они имеют в этой точке общую касательную. Касание окружностей называется внутренним, если центры окружностей лежат по одну сторону от их общей касательной. Касание окружностей называется внешним, если центры окружностей лежат по разные стороны от их общей касательной.

Окружность называется вписанной в треугольник, если она касается всех его сторон.

Теорема. Центр окружности, вписанной в треугольник, является точкой пересечения его биссектрис.

Центральным углом в окружности называется плоский угол с вершиной в её центре.

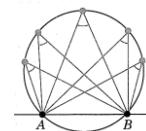
Часть окружности, расположенная внутри плоского угла, называется дугой окружности, соответствующей этому центральному углу.

Градусной мерой дуги окружности называется градусная мера соответствующего центрального угла.

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называется вписанным в окружность.

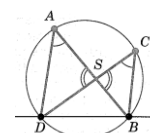
Теорема. Угол, вписанный в окружность, равен половине соответствующего центрального угла.

Следствие. 1) Вписанные углы, стороны которых проходят через точки А и В окружности, а вершины лежат по одну сторону от прямой АВ, равны.

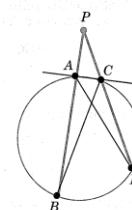


2) Углы, опирающиеся на диаметр, прямые.

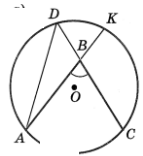
Если хорды АВ и CD окружности пересекаются в точке S, то $AS \cdot BS = CS \cdot DS$.



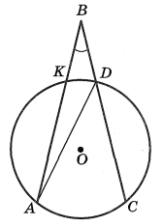
Если из точки Р к окружности проведены две секущие, пересекающие окружность в точках А, В и С, D соответственно, то $AP \cdot BP = CP \cdot DP$.



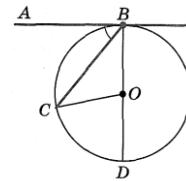
Теорема. 1) Угол, вершина которого лежит внутри круга, равен полусумме двух центральных углов, которым соответствуют дуги окружности, заключённые между сторонами данного угла и их продолжениями.



2) Угол, вершина которого лежит вне круга, а стороны пересекают его окружность, равен полуразности двух центральных углов, которым соответствуют дуги окружности, заключённые между сторонами данного угла.



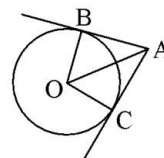
Теорема. Если из точки В к окружности с центром О проведены касательная АВ и хорда СВ, то $\angle ABC = 1/2 \angle BOC$.



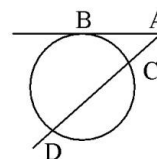
«Ключевые» задачи.

1. Докажите следующие свойства окружности:
 - а) диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам;
 - б) диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде;
 - в) окружность симметрична относительно каждого своего диаметра;
 - г) дуги окружности, заключенные между параллельными хордами, равны.
2. Точка касания двух окружностей лежит на их линии центров.
3. Окружности радиусов r и R с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом тогда и только тогда, когда $R + r = O_1O_2$.
4. Окружности радиусов r и R ($r < R$) с центрами O_1 и O_2 касаются внутренним образом тогда и только тогда, когда $R - r = O_1O_2$.
5. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла.
6. Докажите, что серединные перпендикуляры к двум сторонам треугольника пересекаются.
7. Докажите, что около любого треугольника можно описать окружность, и только одну.

8. Из одной точки проведены две касательные к окружности. Докажите, что отрезки касательных AB и AC равны.



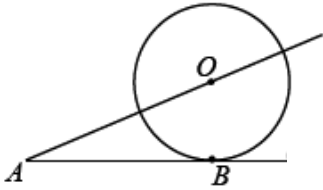
9. Докажите, что в любой треугольник можно вписать окружность, и только одну.
10. Докажите, что центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является середина гипотенузы.
11. Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, разбивает его на два равнобедренных треугольника.
12. Докажите, что у четырехугольника, вписанного в окружность, сумма противоположных углов равна 180° . Если сумма противоположных углов равна 180° , то около него можно описать окружность.
13. Если в четырехугольник вписана окружность, то суммы противоположных сторон четырехугольника равны. Верно и обратное утверждение.
14. Докажите, что произведение отрезков секущей окружности равно квадрату отрезка касательной, проведенной из той же точки: $AB^2 = AC \cdot AD$.



Практикум по решению задач.

1.

К окружности с центром в точке O проведены касательная AB и секущая AO . Найдите радиус окружности, если $AB = 12$ см, $AO = 13$ см.



Дано:

AB - касательная,
 $AB = 12$ см, $AO = 13$ см.

Найти:

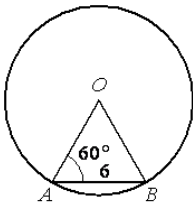
OB .

Решение:

Соединим отрезком точки O и B ; полученный отрезок — радиус, проведённый в точку касания с касательной, следовательно, $OB \perp AB$. Задача сводится к нахождению катета OB прямоугольного треугольника AOB : по теореме Пифагора, катет равен 5 см.
Ответ: $OB = 5$ см.

2.

Центральный угол AOB опирается на хорду AB длиной 6. При этом угол OAB равен 60° . Найдите радиус окружности.



Дано:

$AB = 6$, $\angle OAB = 60^\circ$.

Найти:

AO .

Решение:

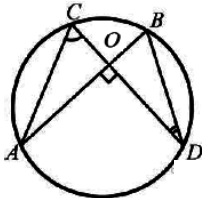
Рассмотрим треугольник AOB : он равнобедренный, т. к. $AO = BO$ как радиусы одной окружности.

Углы при основании равнобедренного треугольника равны. Обозначим угол AOB - x , тогда $x + 60 + 60 = 180$, откуда $x = 60$. Треугольник, у которого все углы равны, — равносторонний треугольник; значит, радиус равен 6.

Ответ: $AO = 6$.

3.

Точки A, B, C и D лежат на одной окружности так, что хорды AB и CD взаимно перпендикулярны, а $\angle BDC = 25^\circ$. Найдите величину угла ACD .



Дано:

$AB \perp CD$, $\angle BDC = 25^\circ$.

Найти:

$\angle ACD$.

Решение:

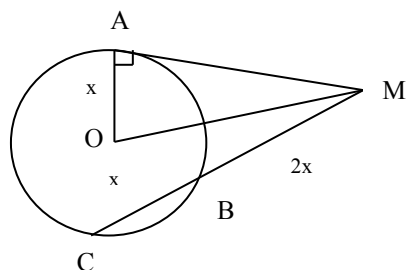
Треугольник BOD - прямоугольный, таким образом, $\angle OBD = 180^\circ - 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$. Углы ABD и ACD опираются на одну дугу, следовательно, эти углы равны.

Таким образом, $\angle ACD = 65^\circ$.

Ответ: $\angle ACD = 65^\circ$.

4.

Из точки М, расположенной вне окружности на расстоянии $\sqrt{7}$ от центра, проведены касательная МА (А - точка касания) и секущая, внутренняя часть которой вдвое меньше внешней и равна радиусу окружности. Найдите радиус окружности.



Дано:

$OM = \sqrt{7}$, МА-касательная,

$MB = 2 \cdot BC$, $BC = OA$.

Найти:

ОА.

Решение: Пусть секущая пересекает окружность с центром О в точках В и С (В между С и М). Обозначим через x радиус окружности. Тогда $BC = x$ и $BM = 2x$. Если МА - касательная к окружности, то по теореме о касательной и секущей

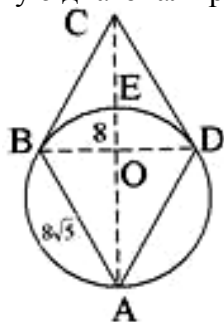
$AM^2 = BM \cdot CM = 2x \cdot 3x = 6x^2$. С другой стороны, по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ОАМ находим, что $AM^2 = OM^2 - OA^2 = 7 - x^2$.

Из уравнения $6x^2 = 7 - x^2$ находим, что $x = 1$.

Ответ: $OA = 1$.

5.

Дан ромб ABCD. Окружность, описанная около треугольника ABD, пересекает большую диагональ ромба AC в точке Е. Найдите CE, если $AB = 8\sqrt{5}$, $BD = 16$.



Дано:

ABCD – ромб, $AB = 8\sqrt{5}$, $BD = 16$.

Найти:

CE.

Решение: $\triangle AOB$ – прямоугольный: $AO = \sqrt{320 - 64} = \sqrt{256} = 16$.

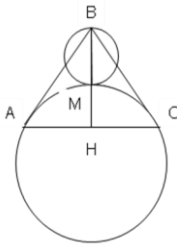
По теореме об отрезках пересекающихся хорд: $BO \cdot OD = AO \cdot OE$, $8 \cdot 8 = 16 \cdot OE$, $OE = 4$, $CE = 16 - 4 = 12$

Ответ: 12.

6.

В треугольнике ABC $AC = 8$, $AB = BC = \sqrt{41}$. Точка М делит высоту ВН в отношении 3:2, считая от вершины. Через точки А, М, С проведена окружность. Найдите радиус окружности, проходящей через точку В и касающейся данной окружности.

1) Касание окружностей внешним образом.



Дано:

$AC = 8$, $AB=BC=\sqrt{41}$, $BH \perp AC$,
 $BM:MH=3:2$.

Найти:

г.

Решение: Треугольник ABC – равнобедренный.

Высота $BH^2 = AB^2 - AH^2 = 41 - 16 = 25$; $BH = 5$. Точка M делит высоту BH в отношении 3:2, т.е. в одной части содержится 1 см. BM – диаметр окружности, проходящей через точку B, равен 3 см, тогда радиус окружности равен 1,5 см.

Ответ: 1,5 см.

2) Касание окружностей внутренним образом.



Дано:

$AC = 8$, $AB=BC=\sqrt{41}$, $BH \perp AC$,
 $BM:MH=3:2$.

Найти:

г.

Решение: По свойствам хорд $АН \cdot НС = МН \cdot НК$, $4 \cdot 4 = 2 \cdot НК$, $НК = 8$ см. $МК = МН + НК = 10$ см,

$ВМ = 3$ см, следовательно, диаметр $ВК = 10$ см + 3 см = 13 см, зн. $r = 6,5$ см.

Ответ: 6,5 см.

Задания для самостоятельной работы.

1. Центральный угол на 36° больше вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите вписанный угол.

Ответ: 36° .

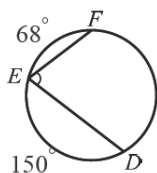
2. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15, а проекция второго катета на гипотенузу равна 16. Найдите диаметр окружности, описанной около этого треугольника.

Ответ: 25.

3. Хорды AB и CD пересекаются в точке S, причем $AS:SB = 2:3$, $DS = 12$ см, $SC = 5$ см, найти AB.

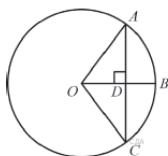
Ответ: $5\sqrt{10}$ см.

4. Найдите $\angle DEF$, если градусные меры дуг DE и EF равны 150° и 68° соответственно.



Ответ: 71° .

5. Радиус OB окружности с центром в точке O пересекает хорду AC в точке D и перпендикулярен ей. Найдите длину хорды AC, если $BD = 1$ см, а радиус окружности равен 5 см.



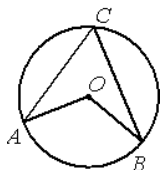
Ответ: 6 см.

6. Диагонали четырехугольника ABCD, вписанного в окружность, пересекаются в точке M, прямые AB и CD пересекаются в точке N. Известно, что $\angle AMD = 108^\circ$, $\angle AND = 24^\circ$. Найдите $\angle ABD$ и $\angle BDC$.

Ответ: $66^\circ, 42^\circ$.

Задания для домашней работы.

1. Точка O – центр окружности, $\angle AOB = 128^\circ$. Найдите величину угла ACB .

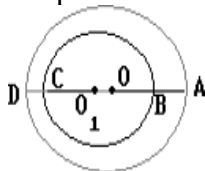


Ответ: 64° .

2. Найти периметр прямоугольного треугольника, если радиус вписанной окружности 2 см, а гипотенуза 13 см.

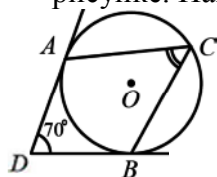
Ответ: $P = 30$ см.

3. Одна окружность находится внутри другой. Их радиусы равны 28 и 12, а кратчайшее расстояние между точками этих окружностей равно 10. Найдите расстояние между центрами.



Ответ: 6.

4. В угол величиной 70° вписана окружность, которая касается его сторон в точках A и B . На одной из дуг этой окружности выбрали точку C так, как показано на рисунке. Найдите величину угла ACB .



Ответ: 55° .

5. Из точки A , не лежащей на окружности, проведены к ней касательная и секущая. Расстояние от точки A до точки касания равно 16 см, а до одной из точек пересечения секущей с окружностью равно 32 см. Найти радиус окружности, если секущая удалена от ее центра на 5 см.

Ответ: 13 см.

6. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$), с катетами, равными 12 и 5, из вершины прямого угла проведена высота CH . В каждый из треугольников ACH и BCH вписана окружность. Найдите квадрат расстояния между центрами этих окружностей.

Ответ: 8.

Список литературы.

Прасолов В. В. Задачи по планиметрии: Учебное пособие.—5-е изд., испр. и доп.—М.: МЦНМО: ОАО Московские учебники., 2006.—640 с.

Гордин Р.К. Геометрия. Планиметрия. 7–9 классы. _ 3-е изд., испр. _М.: МЦНМО, 2006. _ 416 с.

Амелькин В. В. Геометрия на плоскости: Теория, задачи, решения: Учеб. пособие по математике – Мн.: ООО «Асар», 2003. – 592 с.

Кузнецова Л. В., Суворова С. Б. и др. Математика: ГИА: Учебно – справочные материалы для 9 класса – М.; СПб.: Просвещение, 2012. – 279 с.

Кузнецова Л. В., Суворова С. Б. и др. Математика: сб. заданий для подгот. к гос. итоговой аттестации в 9 кл. – 7-е изд., доп. – М.: Просвещение, 2012. – 287 с.

Информационно – поисковая система «Задачи по геометрии» [Электронный ресурс] / Режим доступа: <http://zadachi.mcsme.ru>, свободный.