**Тема урока: Дискриминант. Формулы корней квадратного уравнения*.* Параметр. Уравнение с параметром (начальные представления)**

**Цель урока:**

* объяснить решение полных квадратных уравнений, показать правила оформления таких уравнений; формировать умение решать квадратные уравнения.
* знакомство учащихся с новыми понятиями, расширение их математического образования.
* развитие логического мышления, умения исследовать и рассматривать все возможные способы и случаи в зависимости от поставленных условий;
* формирование интереса к предмету, получение знаний и навыков, позволяющих сделать сознательный выбор на профильной ступени обучения.

**Типы учебных занятий** – объяснительно-иллюстрированный с применением исследовательской работы

**Применяемый метод** – программированный.

**Формы работы** – коллективная, индивидуальная.

**Ход урок:**

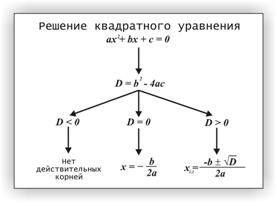
1. **Организационный момент.**
2. **Индивидуальные задания:**

**На «3»** 1) Привести уравнения к стандартному виду и выписать их коэффициенты:  
а) http://unimath.ru/images/clip_image002_1210.gif     б) http://unimath.ru/images/clip_image004_1038.gif     в) http://unimath.ru/images/clip_image006_0865.gif

2) Являются числа 3, 1, 0, – 4 корнями уравнения http://unimath.ru/images/clip_image008_0872.gif.

**На «4»** 3) Решить уравнения:  
а) http://unimath.ru/images/clip_image010_0720.gif                        б) http://unimath.ru/images/clip_image012_0725.gif  
в) http://unimath.ru/images/clip_image014_0683.gif     г) http://unimath.ru/images/clip_image016_0665.gif

1. **Актуализация знаний.**  
   Рассмотреть решение уравнений:  
   а) http://unimath.ru/images/clip_image018_0602.gif     б) http://unimath.ru/images/clip_image020_0532.gif
2. **Объяснение нового материала.**

После этого учитель показывает правило решения квадратного уравнения с помощью формулы дискриминанта. Объяснение данной темы проходит согласно параграфу. Все формулы выписываются на доску. Для того чтобы ученики лучше усвоили данную тему, **можно приготовить плакат**:  
Для закрепления данного материала рассмотреть решение квадратного уравнения из актуализации знаний через дискриминант, обсудить удобство данного решения.  
http://unimath.ru/images/clip_image026_0488.gif  
http://unimath.ru/images/clip_image028_0474.gif  
http://unimath.ru/images/clip_image030_0438.gif  
http://unimath.ru/images/clip_image032_0401.gif  
http://unimath.ru/images/clip_image034_0378.gif  
Ответ: http://unimath.ru/images/clip_image036_0345.gif.

***Параметр* –** величина, характеризующая какое-нибудь основное свойство устройства, системы. «Словарь русского языка» С.И. Ожегова.

***Параметр* –** постоянная величина, выраженная буквой, сохраняющая свое постоянное значение лишь в условиях данной задачи. «Словарь иностранных слов».

***Параметр*–**это величина, входящая в математическую формулу и сохраняющая постоянное значение в пределах одного явления или для данной частной задачи, но при переходе к другому явлению или другой задаче меняющая свое значение. «Толковый словарь русского языка» под редакцией Д.Н. Ушакова.

Нельзя научиться решать любые задачи с параметрами, используя какой-то алгоритм или формулы. При решении задач с параметрами надо всегда активно использовать соображения, исходящие из здравого смысла, рассматривать их как задачи исследовательские.

Задачи с параметрами традиционно и заслуженно считаются наиболее трудными:

а) нехватка времени на них школьной программе;  
б) исследовательский характер;  
в) умение решать классические задачи без параметра, умение всесторонне исследовать квадратный трехчлен.

Основные типы задач для уравнений с параметром.

**I.** Решить уравнение *f (x, a)* = 0 при всех *а*:

а) найти все значения переменной а, при которых уравнение имеет решение;  
б) найти эти решения при каждом таком *а*;  
в) в ответе указать, что при остальных значениях а, задача не имеет решений.

**II.** Найти все значения а, при которых уравнение *f (x, а)* = 0 имеет решение.

Задача требует исследования, а не формального применения формул

**III.** Найти все значения а, при которых уравнение *f (x, а)* = 0 имеет одно (единственное) решение, ровно два или сколько-нибудь еще.

**Задача:**

В 7, 8, 9 кл. учится 105 учащихся. В 8 кл. на n больше, чем в 7 кл., а в 9 кл. на 3 меньше, чем в 7 кл. Сколько учащихся в каждом классе, если в каждом их не менее 30 человек,

7 кл. *х*             *x* *+ x* + *n* *+ x* – 3 = 105  
8 кл. *х + n*     3*x* = 108 – *n*  
9 кл. *x* – 3

*x –*неизвестное число;  
*n –*известное, натуральное число, параметр.

3*x* = 108*– n*   
*x =*http://festival.1september.ru/articles/511520/img02.gif, т.е.  
7 кл. 36 *–*http://festival.1september.ru/articles/511520/img04.gif  
8 кл. 36 – http://festival.1september.ru/articles/511520/img04.gif + *n* = 36 + http://festival.1september.ru/articles/511520/img06.gif

9 кл. 36 – http://festival.1september.ru/articles/511520/img04.gif*–*3 = 33 – http://festival.1september.ru/articles/511520/img04.gif.

Исходя из условия задачи меньшее количество учащихся в 9 кл., и т.к. не менее 30, то решим неравенство:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 33 – http://festival.1september.ru/articles/511520/img04.gif > 30 | http://festival.1september.ru/articles/511520/img04.gif > 3 | *n* < 9 |

т.к. количество учащихся в каждом классе это натуральное число, значит *n* – кратно 3. Учитывая оба условия *n* < 9 и *n* кратно 3 можно сделать вывод *n* = 3; 6; 9.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *n* = 3 | *n =*6 | *n =*9 |

7 кл. 36 – http://festival.1september.ru/articles/511520/img04.gif, т.е. 36 – http://festival.1september.ru/articles/511520/img08.gif = 35; 36 *–*http://festival.1september.ru/articles/511520/img10.gif = 34; 36 – http://festival.1september.ru/articles/511520/img12.gif = 33

8 кл. 36 + http://festival.1september.ru/articles/511520/img06.gif, т.е. 36 +   = 38; 36 + http://festival.1september.ru/articles/511520/img14.gif= 40; 36 + http://festival.1september.ru/articles/511520/img16.gif = 42

9 кл. 33 – http://festival.1september.ru/articles/511520/img04.gif, т.е. 33 – http://festival.1september.ru/articles/511520/img08.gif = 32; 33 *–*http://festival.1september.ru/articles/511520/img10.gif = 31; 33 – http://festival.1september.ru/articles/511520/img12.gif = 30

Итак, возможны 3 варианта ответа: в 7, 8, 9 классах могло быть соответственно 35; 38; 32 или 34; 40; 31 или 33; 42; 30 учащихся.

Рассмотрим самые простые уравнения с параметром, которые сводятся к решению линейного или квадратного уравнения:

*f (x, a)*= 0, т.е. линейное уравнение *ax* *=*0   
*f (x; a; b; c)* = 0, т.е. квадратное уравнение *ax*2 *+ bx* + *c*.

**Решение линейных уравнений с параметром:**

*Пример №1.*

*b*(*b –*1)*x* *= b*2 *+ b –*2, *x* – неизвестное число, *b –*параметр, известное фиксированное число.

Придавая *b* различные значения, будем получать различные уравнения с числовыми коэффициентами. В зависимости от значений параметра мы можем получить 3 разных случая:

а) уравнение имеет единственный корень *k* • *x* *= b*   
б) уравнение имеет множество корней 0 • *x* = 0  
в) уравнение не имеет корней 0 • *x* *= b*

*Рассмотрим каждый случай отдельно:*

а) *b*(*b –*1) =/= 0 *b* =/= 0; *b* =/= 1

уравнение имеет единственный корень: *x* = http://festival.1september.ru/articles/511520/img18.gif

б) http://festival.1september.ru/articles/511520/img1.gif т.е. *b =*1 множество корней

в) *b*(*b* – 1)*=*0 *b =*0 и *b =*1 при *b =*0 получаем уравнение вида 0 **.** *x* *= b* т.е. корней нет.   
*b*2 *+ b* – 2 =/= 0

Таким образом, для данного уравнения выявим различные значения параметра *b*, для каждого из которых определено соответствующее множество корней:  
*Ответ:*при *b* =/= 0; *b* =/= 1 *x* = http://festival.1september.ru/articles/511520/img21.gif

при *b* = 1 множество корней *x* – любое число   
при *b* = 0 корней нет.

**Решение квадратных уравнений с параметром**

При решении таких уравнений необходимо использовать следующие сведения.

1. Зависимость количества корней квадратного уравнения от его дискриминанта.

D > 0 (2 корня); D = 0 (1 корень); D < 0 (нет корней).

2. Если D > 0 то *аx*2 + *вx* + *с* = *а* (*x* *– x*1) (*x* *– x*2)

3. Если D > 0, то левую часть можно представить в виде полного квадрата или выражения, ему противоположного

*ax*2 + *вx* + *с* = *а* (*x* *– x*1)2

4. Если уравнение приведенное то *x*1 *+ x*2 *= – р*, *аx*1 • *x*2 = *q*

5. Если а > 0, D > 0, то уравнение имеет два действительных различных корня

а) *в* < 0, *с* > 0 оба корня положительны  
б) *в* > 0, *с* > 0 оба корня отрицательны  
в) *в* < 0,*с* < 0 корни противоположны по знаку. Положителен тот корень, который имеет больший модуль.  
г) *в* > 0, *с* < 0 корни противоположны по знаку. Отрицателен тот корень, который имеет больший модуль.

*Пример 1.*

При каких значениях параметра а уравнение *аx* (*аx* + 3) + 6 *= x* (*аx* – 6) является

а) квадратным  
б) неполным квадратным  
в) линейным

Преобразуем: *а*2*x*2 + 3 *аx* + 6 = *аx*2 – 6*x*

*а*2*x*2 – *аx*2 + 3 *аx* + 6*x* + 6 = 0  
*а* (*а* – 1)*x*2 + 3 (*а* + 2)*x* + 6 *=*0

а) уравнение квадратное, если старший коэффициент =/= 0

*а* (*а* – 1) =/= 0  
*а* = 0, *а* =/= 1

т.е. уравнение квадратное при всех *а*, кроме 0 и 1

б) неполное квадратное, если *b* = 0; если *с* *=*0; если *b* = 0 и *с =*0.

3 (*а* + 2) = 0 *а* *= –*2

в) линейное, если коэффициент при *x*2 равен 0 *а* (*а* – 2) = 0 *а* = 0; 2

*Ответ:*

при *а* =/= 0; 2 уравнение квадратное  
при *а* *= –*2 неполное квадратное  
при *а* = 0,2 линейное.

*Пример 2.*

Решить уравнение *x*2 *– bx* + 4 = 0 D *= b*2 – 16.

а) если http://festival.1september.ru/articles/511520/img73.gif > 4, т.е. *b* < *–*4 и *b* > 4 (*b* ? ( – http://festival.1september.ru/articles/511520/img2.gif; 4)U(4; + http://festival.1september.ru/articles/511520/img2.gif), то D >0 и уравнение имеет 2 корня *x*1,2 = http://festival.1september.ru/articles/511520/img75.gif

б) если http://festival.1september.ru/articles/511520/img73.gif = 4, т.е. *b* *=*± 4, то D = 0, уравнение имеет один корень *x* = http://festival.1september.ru/articles/511520/img77.gif

в) если http://festival.1september.ru/articles/511520/img73.gif < 4, т.е. – 4 < *b* < 4, то D < 0 и уравнение корней не имеет.

*Ответ:*если *b* < – 4 и *b* > 4, то 2 корня *x*1,2 = http://festival.1september.ru/articles/511520/img75.gif   
если *b* = ± 4, то 1 корень *x* = http://festival.1september.ru/articles/511520/img77.gif   
если – 4 < *b* < 4, то корней нет.

*Упражнения:*

1) Решите относительно *x* уравнение:

|  |
| --- |
| а) *mx*2 – 6*x* + 1 = 0; б) *аx*2 = 4;  в) *x*2 – *аx* = 0; |

2) Решите относительно у уравнение:

а) *су*2 + 8 = 2*у*2 + 4*с*;   
б) *b* (*у*2 + 7) *= b* (*у* + 5) + 2*b*;  
3) При каких значениях параметра а уравнение *аx*2 – 4*x* + *а* = 0 имеет:

а) положительные корни;  
б) отрицательные корни;  
в) корень, равный нулю;  
г) единственный корень, отличный от нуля?

**5. Формирование навыков и умений по теме:**

*Упражнения:*

1. *аx* = 3*а +*8 – уравнение с параметром *а*.

Написать уравнение, которое получится при *а* = 10, *а* *= –*2, *а =*http://festival.1september.ru/articles/511520/img59.gif, *а =*0

1. Каким – линейным или квадратным – является уравнение: 5*b*(*b* – 2)*x*2 + (5*b* – 20)*x* – 16*=*0 относительно *x* при:

а) *b =*1   
б) *b =*2  
в) *b =*0,4  
г) *b =*0?

1. Выясните вид уравнения:

2*аx* (*x* – 1) *+ x* (*аx* – 12) *=*3*x*2 + 8

относительно *x* при:

а) *а* *= –*2;  
б) *а* *= –*6;   
в) *а* = 1;   
г) *а* = 0

и решите его для каждого случая.

4. Рассмотреть решение уравнений №   
в) При каком значении http://unimath.ru/images/clip_image066_0175.gif уравнение http://unimath.ru/images/clip_image068_0168.gif имеет один корень?  
Решение:  
http://unimath.ru/images/clip_image070_0167.gif  
Чтобы дробь равнялась нулю, надо чтобы числитель дроби был равен нулю. Решим уравнение:  
http://unimath.ru/images/clip_image072_0144.gif  
http://unimath.ru/images/clip_image074_0131.gif  
http://unimath.ru/images/clip_image076_0144.gif  
http://unimath.ru/images/clip_image078_0126.gif  
http://unimath.ru/images/clip_image080_0123.gif  
Уравнение http://unimath.ru/images/clip_image068_0169.gif имеет два корня. По условию требуется для данного уравнения только один корень. Чтобы остался только один корень уравнения необходимо, чтобы один из корней не входил в область допустимых значений. Значит http://unimath.ru/images/clip_image082_0115.gif или http://unimath.ru/images/clip_image084_0108.gif, так как на ноль делить нельзя.  
Ответ: http://unimath.ru/images/clip_image086_0123.gif.

Дополнительные задания:

1. При каких значениях параметра *b* уравнения: http://festival.1september.ru/articles/511520/img61.gifи http://festival.1september.ru/articles/511520/img63.gif не имеют корней?

6. При каких значениях параметра *n* уравнение (*n*2 – 4)*x* = *n*3 – 2*n*2 – *n* + 2:

а) имеет единственный корень;  
б) имеет бесконечное множество корней;  
в) не имеет корней?

1. При каком значении параметра *а* уравнение

http://festival.1september.ru/articles/511520/img71.gif имеет:

а) положительный корень;  
б) отрицательный корень;  
в) корень, равный нулю?

1. **Итоги урока**

**Задание на дом: теория, карточки.**

**Домашняя работа по теме «Параметр. Уравнения с параметром»**

* 1. Дано уравнение *аx* = 4*x* + 5.

Найдите множество корней этого уравнения в случае, если: а) *а* = 4; б) *а* =/= 4.

* 1. При каки*x* значениях параметра *а* уравнения: *аx* = 12 и 3*x* = *а* имеют общие корни?
  2. При каких значениях параметра *b* уравнение: *b*(*b* – 3)*x* = 10(2*b* *+ x*) не имеет корней?
  3. Решите уравнение относительно *у*:

а) http://festival.1september.ru/articles/511520/img65.gif;   
б) *у* *– b* = http://festival.1september.ru/articles/511520/img67.gif;   
в) http://festival.1september.ru/articles/511520/img69.gif

**Домашняя работа по теме «Параметр. Уравнения с параметром»**

* 1. Дано уравнение *аx* = 4*x* + 5.

Найдите множество корней этого уравнения в случае, если: а) *а* = 4; б) *а* =/= 4.

* 1. При каки*x* значениях параметра *а* уравнения: *аx* = 12 и 3*x* = *а* имеют общие корни?
  2. При каких значениях параметра *b* уравнение: *b*(*b* – 3)*x* = 10(2*b* *+ x*) не имеет корней?
  3. Решите уравнение относительно *у*:

а) http://festival.1september.ru/articles/511520/img65.gif;   
б) *у* *– b* = http://festival.1september.ru/articles/511520/img67.gif;   
в) http://festival.1september.ru/articles/511520/img69.gif

**Домашняя работа по теме «Параметр. Уравнения с параметром»**

* 1. Дано уравнение *аx* = 4*x* + 5.

Найдите множество корней этого уравнения в случае, если: а) *а* = 4; б) *а* =/= 4.

* 1. При каки*x* значениях параметра *а* уравнения: *аx* = 12 и 3*x* = *а* имеют общие корни?
  2. При каких значениях параметра *b* уравнение: *b*(*b* – 3)*x* = 10(2*b* *+ x*) не имеет корней?
  3. Решите уравнение относительно *у*:

а) http://festival.1september.ru/articles/511520/img65.gif;   
б) *у* *– b* = http://festival.1september.ru/articles/511520/img67.gif;   
в) http://festival.1september.ru/articles/511520/img69.gif

**Решение квадратных уравнений с параметром**

При решении таких уравнений необходимо использовать следующие сведения.

1. Зависимость количества корней квадратного уравнения от его дискриминанта.

D > 0 (2 корня); D = 0 (1 корень); D < 0 (нет корней).

2. Если D > 0 то *аx*2 + *вx* + *с* = *а* (*x* *– x*1) (*x* *– x*2)

3. Если D > 0, то левую часть можно представить в виде полного квадрата или выражения, ему противоположного

*ax*2 + *вx* + *с* = *а* (*x* *– x*1)2

4. Если уравнение приведенное то *x*1 *+ x*2 *= – р*, *аx*1 • *x*2 = *q*

5. Если а > 0, D > 0, то уравнение имеет два действительных различных корня

а) *в* < 0, *с* > 0 оба корня положительны  
б) *в* > 0, *с* > 0 оба корня отрицательны  
в) *в* < 0,*с* < 0 корни противоположны по знаку. Положителен тот корень, который имеет больший модуль.  
г) *в* > 0, *с* < 0 корни противоположны по знаку. Отрицателен тот корень, который имеет больший модуль.

**Решение квадратных уравнений с параметром**

При решении таких уравнений необходимо использовать следующие сведения.

1. Зависимость количества корней квадратного уравнения от его дискриминанта.

D > 0 (2 корня); D = 0 (1 корень); D < 0 (нет корней).

2. Если D > 0 то *аx*2 + *вx* + *с* = *а* (*x* *– x*1) (*x* *– x*2)

3. Если D > 0, то левую часть можно представить в виде полного квадрата или выражения, ему противоположного

*ax*2 + *вx* + *с* = *а* (*x* *– x*1)2

4. Если уравнение приведенное то *x*1 *+ x*2 *= – р*, *аx*1 • *x*2 = *q*

5. Если а > 0, D > 0, то уравнение имеет два действительных различных корня

а) *в* < 0, *с* > 0 оба корня положительны  
б) *в* > 0, *с* > 0 оба корня отрицательны  
в) *в* < 0,*с* < 0 корни противоположны по знаку. Положителен тот корень, который имеет больший модуль.  
г) *в* > 0, *с* < 0 корни противоположны по знаку. Отрицателен тот корень, который имеет больший модуль.

**Решение квадратных уравнений с параметром**

При решении таких уравнений необходимо использовать следующие сведения.

1. Зависимость количества корней квадратного уравнения от его дискриминанта.

D > 0 (2 корня); D = 0 (1 корень); D < 0 (нет корней).

2. Если D > 0 то *аx*2 + *вx* + *с* = *а* (*x* *– x*1) (*x* *– x*2)

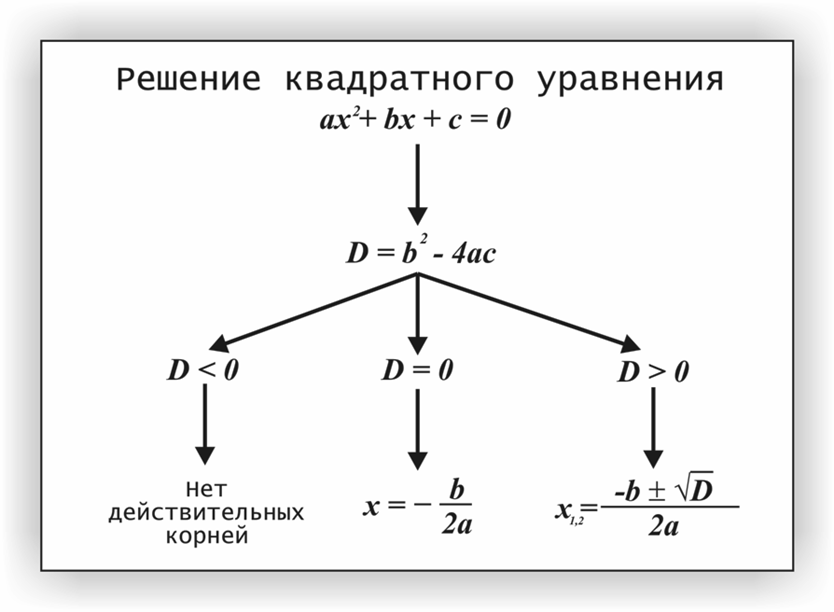
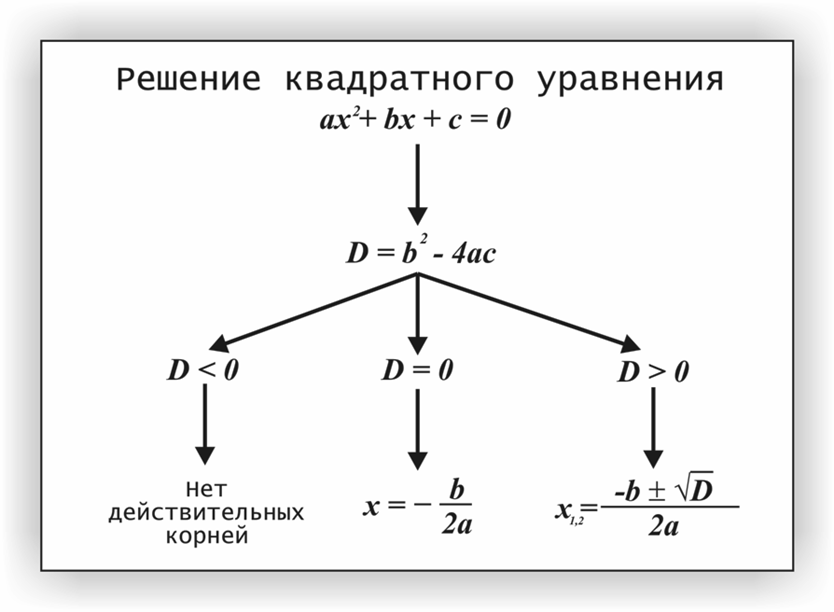
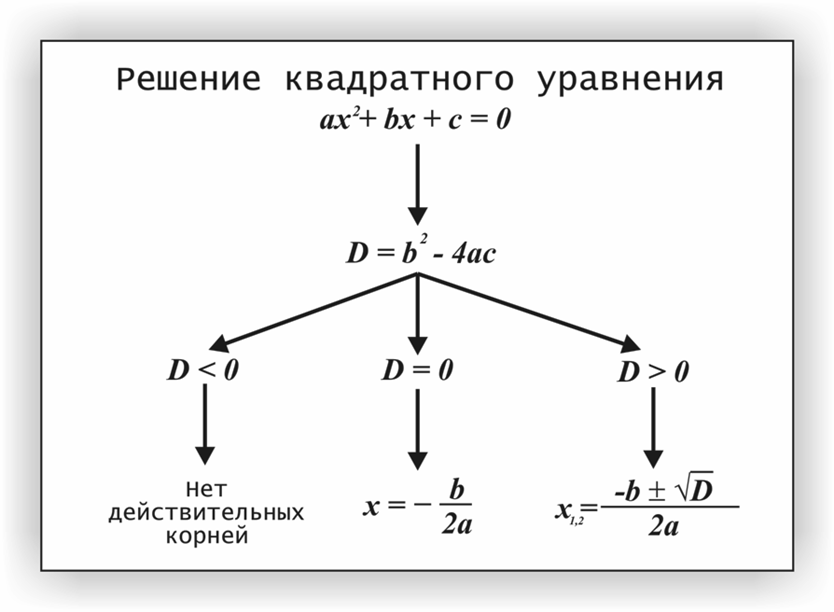
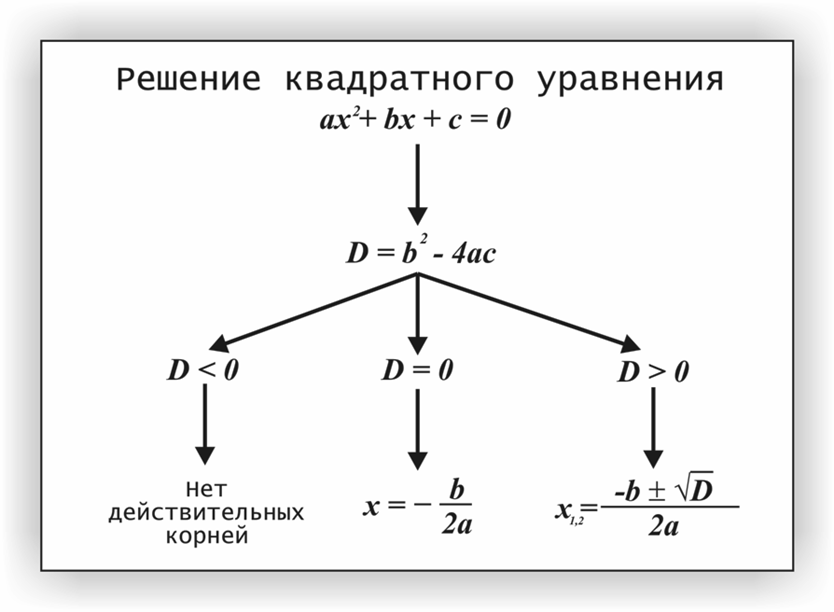
3. Если D > 0, то левую часть можно представить в виде полного квадрата или выражения, ему противоположного

*ax*2 + *вx* + *с* = *а* (*x* *– x*1)2

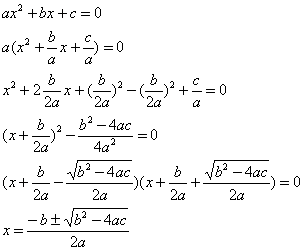
4. Если уравнение приведенное то *x*1 *+ x*2 *= – р*, *аx*1 • *x*2 = *q*

5. Если а > 0, D > 0, то уравнение имеет два действительных различных корня

а) *в* < 0, *с* > 0 оба корня положительны  
б) *в* > 0, *с* > 0 оба корня отрицательны  
в) *в* < 0,*с* < 0 корни противоположны по знаку. Положителен тот корень, который имеет больший модуль.  
г) *в* > 0, *с* < 0 корни противоположны по знаку. Отрицателен тот корень, который имеет больший модуль.

****

**Вывод формул корней квадратного уравнения:**

****

1. **Индивидуальные задания:**

**На «3»** 1) Привести уравнения к стандартному виду и выписать их коэффициенты:  
а) http://unimath.ru/images/clip_image002_1210.gif     б) http://unimath.ru/images/clip_image004_1038.gif     в) http://unimath.ru/images/clip_image006_0865.gif

1. **Индивидуальные задания:**

**На «3»** 2) Являются числа 3, 1, 0, – 4 корнями уравнения http://unimath.ru/images/clip_image008_0872.gif.

1. **Индивидуальные задания:**

**На «3»** 1) Привести уравнения к стандартному виду и выписать их коэффициенты:  
а) http://unimath.ru/images/clip_image002_1210.gif     б) http://unimath.ru/images/clip_image004_1038.gif     в) http://unimath.ru/images/clip_image006_0865.gif

1. **Индивидуальные задания:**

**На «3»** 2) Являются числа 3, 1, 0, – 4 корнями уравнения http://unimath.ru/images/clip_image008_0872.gif.

1. **Индивидуальные задания:**

**На «4»** 3) Решить уравнения:  
а) http://unimath.ru/images/clip_image010_0720.gif                        б) http://unimath.ru/images/clip_image012_0725.gif  
в) http://unimath.ru/images/clip_image014_0683.gif     г) http://unimath.ru/images/clip_image016_0665.gif

1. **Индивидуальные задания:**

**На «3»** 1) Привести уравнения к стандартному виду и выписать их коэффициенты:  
а) http://unimath.ru/images/clip_image002_1210.gif     б) http://unimath.ru/images/clip_image004_1038.gif     в) http://unimath.ru/images/clip_image006_0865.gif

1. **Индивидуальные задания:**

**На «3»** 2) Являются числа 3, 1, 0, – 4 корнями уравнения http://unimath.ru/images/clip_image008_0872.gif.

1. **Индивидуальные задания:**

**На «4»** 3) Решить уравнения:  
а) http://unimath.ru/images/clip_image010_0720.gif                        б) http://unimath.ru/images/clip_image012_0725.gif  
в) http://unimath.ru/images/clip_image014_0683.gif     г) http://unimath.ru/images/clip_image016_0665.gif

1. **Индивидуальные задания:**

**На «4»** 3) Решить уравнения:  
а) http://unimath.ru/images/clip_image010_0720.gif                        б) http://unimath.ru/images/clip_image012_0725.gif  
в) http://unimath.ru/images/clip_image014_0683.gif     г) http://unimath.ru/images/clip_image016_0665.gif