**Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике**

**2020-2021 учебный год**

**7 класс**

1. В кемпинг заехали туристы. На обед каждый из них съел половину банки супа, треть банки тушенки и четверть банки фасоли. Всего они съели 39 банок еды. Сколько было туристов?
2. По кругу стоят 6 человек, каждый из которых либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда врет. Каждый сказал одну из двух фраз: “Рядом со мной есть лжец” или “Напротив меня стоит лжец”. Какое минимальное количество лжецов может быть среди них? Приведите пример и докажите, что меньшего количества лжецов быть не может.
3. Четыре человека с сундуком хотят переправиться через реку. Люди весят 45, 50, 60 и 65 кг, сундук — 100 кг. Лодка выдерживает груз не более 200 кг. Сундук можно погрузить в лодку или вытащить из нее только вчетвером. Как им всем вместе с сундуком переправиться через реку?
4. Разрежьте квадрат 8x8 по границам клеток на 7 частей с равными периметрами. (Части могут быть разными по форме)
5. Дети в классе угощали друг друга конфетами. Каждый мальчик дал по конфете всем, кто выше его, а каждая девочка — всем, кто ниже ее (все дети разного роста). Оказалось, что Саша, Женя и Валя получили поровну конфет, а все остальные — меньше, чем они. Докажите, что кто-то из этих троих — девочка.

**Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике**

**2020-2021 учебный год**

**8 класс**

1. На круговом шоссе длиной 13 км находятся пять различных населённых пунктов A, B, C, D, E. Может ли быть так, что кратчайшее расстояние по шоссе от A до B равно 3 км, от B до C — 6 км, от C до D — 4 км, от D до E — 5 км, а от E до A — 6 км?
2. У Ани столько же орехов, сколько у Бори и Вовы вместе. У Ани и Бори вместе орехов вдвое больше чем у Вовы. У одного из них 43 ореха. Сколько всего орехов у них троих?
3. Во дворе стоят 5 домов, в них живет 5, 15, 25, 35, 45 человек. Известно, что у каждого есть не менее двух тезок среди жителей двора. Докажите, что у кого-то есть тезка в своем доме.
4. На стороне *ВС* треугольника *АВС* отмечена точка *E*, а на биссектрисе *BD* — точка *F* таким образом, что *EF* || *AC* и *AF* = *AD*. Докажите, что *AВ* = *ВЕ*.
5. У царя Гороха в молодильных яблоках завелся червячок. Всего яблок у него 13 и лежат они по кругу в специальной коробке Для-Молодильных-Яблок. Чтобы его найти царь Горох решил воспользоваться чашечными весами. Он знает, что все яблоки весят одинаково, но то яблоко, в котором сейчас находится червячок, тяжелее. Есть небольшая проблема, связанная с тем, что после каждого взвешивания яблоки надо возвращать обратно в коробку, каждое на то самое место, на котором оно до этого и лежало. А после того, как царь Горох возвращает яблоки в коробку, червячок сразу же незаметно переползает в одно из двух соседних с ним яблок (и живет там, пока не будет произведено следующее взвешивание). Помогите царю Гороху найти червивое яблоко. (То есть после какого-то взвешивания царь Горох перед тем, как положить яблоки в коробку, может точно определить яблоко, внутри которого в данный момент находится червяк. Минимизировать количество взвешиваний не нужно.)

**Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике**

**2020-2021 учебный год**

**9 класс**

1. В строку выписано 5 последовательных натуральных чисел. Возможно ли, что сумма цифр первого числа равна 52, а пятого – 20?
2. В эстрадном ансамбле “Солнышко” все играют либо на скрипке, либо на контрабасе. Средний возраст тех, кто играет на скрипке – 22 года, а тех, кто играет на контрабасе – 45 лет. Игорь поменял свой инструмент и вместо контрабаса стал играть на скрипке. В результате этого средний возраст тех, кто играет на скрипке увеличился на 1 год, и средний возраст тех, кто играет на контрабасе тоже увеличился на 1 год. Сколько человек в ансамбле “Солнышко”?
3. Докажите, что любое натуральное число, большее 100, можно представить в виде суммы двух натуральных чисел, одно из которых — простое, большее 5, а другое — составное.
4. *AL* – биссектриса треугольника *ABC, K* – такая точка на стороне *AC*, что *CK = CL*. Прямая *KL* и биссектриса угла *B* пересекаются в точке *P*. Докажите, что *AP = PL*.
5. В шахматном турнире участвовали 20 шахматистов. Каждые два участника сыграли друг с другом ровно одну партию. За победу давалось 1 очко, за ничью давалось ½ очка, за поражение – 0 очков. В итоге все шахматисты набрали разное число очков. Докажите, что есть участник, у которого побед больше, чем количество ничьих.

**Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике**

**2020-2021 учебный год**

**10 класс**

1. В ряд стоят 50 человек, все разного роста. Ровно 15 из них выше своего левого соседа. Сколько человек при этом может быть выше своего правого соседа? (Приведите все варианты и докажите, что других нет)
2. Прямая пересекает график функции  *y = x*²  в точках с абсциссами *x*1 и *x*2, а ось абсцисс – в точке с абсциссой *x*3. Докажите, что$\frac{1}{x\_{1}}+\frac{1}{x\_{2}}=\frac{1}{x\_{3}}$. (*x*1, *x*2, *x*3 – отличны от нуля.)
3. Докажите, что если $a^{2}+b^{2}+ab+bc+ca<0$, то $a^{2}+b^{2}<c^{2}$.
4. На боковых сторонах *AB* и *CD* трапеции *ABCD* выбраны точки *X* и *Z* соответственно. Отрезки *CX* и *BZ* пересекаются в точке *Y*. Оказалось, что пятиугольник *AXYZD* — вписанный. Докажите, что *AY* = *DY*.
5. Максим выписал 2021 различное натуральное число и нашел их произведение. Оказалось, что это произведение делится ровно на 2020 различных простых чисел. Доказать, что из написанных Максимом чисел можно выбрать несколько чисел, произведение которых является полным квадратом, либо одно число, которое является полным квадратом.

**Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике**

**2020-2021 учебный год**

**11 класс**

1. Корни квадратного трехчлена $ax^{2}+bx+c$ равны sin 42º и sin 48º. Докажите, что $b^{2}=a^{2}+2ac$.
2. Вдоль кругового шоссе построено 30 домов высотой 1, 2, 3, . . . , 30 этажей (ровно по одному дому каждой высоты). Назовем дом интересным, если он выше одного из соседних с ним домов, но ниже другого. Оказалось, что среди этих домов ровно 10 интересных. Докажите, что суммарная высота интересных домов не может быть равна 64 этажам.
3. Дана возрастающая положительная геометрическая прогрессия bn.
Известно, что $b\_{4}+b\_{3}-b\_{2}-b\_{1}=5$. Докажите, что $b\_{6}+b\_{5}\geq 20$.
4. В треугольнике *АВС* точки *М* и *N* – середины сторон *AC* и *ВС* соответственно. Известно, что точка пересечения медиан треугольника *AMN* является точкой пересечения высот треугольника *АВС*. Найдите угол *АВС*.
5. Докажите, что число $[\frac{n}{1}]+[\frac{n}{2}]+...+[\frac{n}{n}]+[\sqrt{n}]$чётно при любом натуральном *n*. ([*x*] – целая часть *x*, то есть наибольшее целое, не превосходящее *x*.)