



КАК ПОЛУЧИТЬ МАКСИМАЛЬНЫЙ БАЛЛ НА ЕГЭ

ФИЗИКА

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ
ПОВЫШЕННОГО И ВЫСОКОГО
УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ

98

100

99

96

97

95

Н.К. Ханнанов

КАК ПОЛУЧИТЬ МАКСИМАЛЬНЫЙ БАЛЛ НА ЕГЭ

ФИЗИКА

Решение заданий повышенного и высокого уровня сложности



Москва
«Интеллект-Центр»
2015

Для создания пособия Федеральным институтом педагогических измерений автору предоставлено право использования ресурсов открытого банка заданий

Ханнанов, Н.К.

Х61 Физика. Решение заданий повышенного и высокого уровня сложности. Как получить максимальный балл на ЕГЭ. Учебное пособие. / Н.К. Ханнанов. – Москва: Интеллект-Центр, 2015. – 216 с.

ISBN 978-5-00026-105-7

В предлагаемом пособии дана характеристика основных типов заданий повышенного и высокого уровня сложности, используемых на ЕГЭ по физике. Особое внимание уделяется разбору заданий, вызвавших наибольшие затруднения. Для тренировки и самоподготовки к ЕГЭ предлагаются задания с развернутым ответом различного уровня сложности по всем содержательным блокам.

Пособие адресовано старшеклассникам, преподавателям и родителям. Оно поможет школьникам проверить свои знания и умения по предмету, а учителям – оценить степень достижения требований образовательных стандартов отдельными учащимися и обеспечить их целенаправленную подготовку к экзамену.

Издание прошло экспертизу Федерального института педагогических измерений.

УДК 373.167.1:53
ББК 22.3я721

Ответственный за выпуск
исполнительный директор *О.С. Ильясов*

Редактор *Д.П. Локтионов*
Художественный редактор *Е.Ю. Воробьева*
Компьютерная верстка и макет *В.С. Торгашова*

Подписано в печать 22.10.2014. Формат 60х84/8.
Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 27,0.
Тираж 3000 экз. Заказ № 1410480.

Издательство «Интеллект-Центр»
125445, Москва, ул. Смольная, д. 24, оф. 712

arvato
BERTELSMANN

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленного электронного оригинал-макета
в ОАО «Ярославский полиграфический комбинат»
150049, Ярославль, ул. Свободы, 97

ISBN 978-5-00026-105-7

© «Интеллект-Центр», 2015
© Н.К. Ханнанов, 2014

ПРЕДИСЛОВИЕ

Единый государственный экзамен существует уже 13 лет. Сначала, пока в 2001-2007 годах он шел в режиме эксперимента в различных регионах РФ в его реальность не верили, потом с ним боролись, сейчас пытаются его дискредитировать путем демонстрации уязвимости процедур его проведения и организации.

ЕГЭ 2015 года прошло с минимальным числом нарушений процедуры и это, без сомнения, подстегнет желание учащихся сдающих ЕГЭ по физике изучать не процедуры «получения хорошей оценки при полном отсутствии знаний», а методы решения задач по физике. В помощь именно таким учащимся и их преподавателям эта книга.

За последние годы ЕГЭ по физике, наряду с потребностью технических вузов страны получать абитуриентов, способных к восприятию вузовского курса физики и ряда специальных предметов, стал единственным инструментом, стимулирующим учащихся к изучению предмета в старшей школе. Банк ЕГЭ за эти годы существенно обогатился новыми заданиями и по форме, и по подходам к контролю знаний. Богатые традиции российского физического образования в области контроля знаний и методики обучения решению физических задач также не были потеряны, поскольку задания, требующие развернутого ответа, в вариантах ЕГЭ состоит из задач, которые в значительной степени используют идеи приемных экзаменов в технические вузы, существовавших до ЕГЭ. Уровень трудности этих заданий год от года варьируется, поскольку в ходе ЕГЭ ведется составление относительного рейтинга учащихся данного года выпуска, а при составлении новых вариантов учитываются результаты ЕГЭ предыдущего года.

По мнению специалистов варианты ЕГЭ по физике и математике наиболее грамотно выстроены с точки зрения тестологии, то есть наиболее эффективны в составлении относительного рейтинга учащихся. В настоящее время часть банка заданий ЕГЭ переведена Федеральным институтом педагогических измерений в открытый режим <http://www.fipi.ru> для ознакомления учащихся и преподавателей с уровнем и типом заданий в различных темах курса физики.

Многие преподаватели уже поняли, что тематические подборки заданий ЕГЭ различного уровня сложности с успехом могут быть использованы в текущей работе при изучении предмета в школе и при целевой подготовке к ЕГЭ в рамках школьных факультативных курсов, курсов подготовки в вузах и при работе репетиторов. Поэтому издательство «Интеллект центр» все годы существования ЕГЭ ежегодно выпускает сборники с тематическими подборками и с вариантами на основе открытых вариантов ЕГЭ по физике.

- Орлов В.А., Демидова М.Ю., Никифоров Г.Г., Ханнанов Н.К., Учебно-тренировочные материалы для подготовки к ЕГЭ. Физика, М.: Интеллект-центр, 2003
- Орлов В.А., Демидова М.Ю., Никифоров Г.Г., Ханнанов Н.К., Учебно-тренировочные материалы для подготовки к ЕГЭ -2004. Физика, М.: Интеллект-центр, 2004
- Орлов В.А., Демидова М.Ю., Никифоров Г.Г., Ханнанов Н.К., Учебно-тренировочные материалы для подготовки к ЕГЭ -2005. Физика., М.: Интеллект-центр, 2004

- Орлов В.А., Демидова М.Ю., Никифоров Г.Г., Ханнанов Н.К., Единый государственный экзамен 2006. Учебно-тренировочные материалы для подготовки учащихся, М.: Интеллект-центр, 2006
- Орлов В.А., Демидова М.Ю., Никифоров Г.Г., Ханнанов Н.К., Единый государственный экзамен 2007. Физика. Учебно – тренировочные материалы для подготовки учащихся, М.: ФИПИ – Интеллект-центр, 2006
- Орлов В.А., Демидова М.Ю., Никифоров Г.Г., Ханнанов Н.К., Единый государственный экзамен 2008. Физика. Учебно – тренировочные материалы для подготовки учащихся, М.: ФИПИ – Интеллект-центр, 2007
- Орлов В.А., Демидова М.Ю., Никифоров Г.Г., Ханнанов Н.К., Единый государственный экзамен 2009. Физика. Универсальные материалы для подготовки учащихся, М.: ФИПИ – Интеллект-центр, 2009
- Орлов В.А., Демидова М.Ю., Никифоров Г.Г., Ханнанов Н.К., Единый государственный экзамен 2010. Физика. Универсальные материалы для подготовки учащихся, М.: ФИПИ – Интеллект-центр, 2010
- Орлов В.А., Демидова М.Ю., Никифоров Г.Г., Ханнанов Н.К., Единый государственный экзамен 2011. Физика. Универсальные материалы для подготовки учащихся, М.: ФИПИ – Интеллект-центр, 2011
- Орлов В.А., Демидова М.Ю., Никифоров Г.Г., Ханнанов Н.К., Оптимальный банк заданий для подготовки учащихся. Единый государственный экзамен 2012. Физика, М.: Интеллект-центр, 2012
- Орлов В.А., Демидова М.Ю., Никифоров Г.Г., Ханнанов Н.К., Оптимальный банк заданий для подготовки учащихся. Единый государственный экзамен 2013. Физика, М.: Интеллект-центр, 2013
- Орлов В.А., Демидова М.Ю., Никифоров Г.Г., Ханнанов Н.К., Оптимальный банк заданий для подготовки учащихся. Единый государственный экзамен 2014. Физика, М.: Интеллект-центр, 2014

Особенность этих пособий в том, что они ежегодно обновляются и содержат множество новых заданий, появившихся в вариантах ЕГЭ очередного года. Преподаватели, владеющие сборниками заданий издательства «Интеллект – центр», могут составить полную картину изменений в вариантах ЕГЭ за эти годы. Однако ежегодное обновление сборников имеет и обратную сторону – задания прошлых лет, остающиеся в банке ЕГЭ, постепенно исчезают со страниц сборников, хотя многие из них содержат интересные методические идеи и могут быть использованы при составлении вариантов в будущем. Большой объем заданий мог бы помочь и в системном анализе банка для создания методики обучения решению задач в различных темах курса физики.

Данная книга является, наверное, первым изданием, в котором делается попытка провести анализ наиболее сложных заданий ЕГЭ, опубликованных в разные годы в перечисленных сборниках за 10 лет с 2003 по 2013 год. В ней использован методический опыт автора, накопленный при работе в школе, в репетиторской практике и групповых занятий на курсах по подготовке к ЕГЭ. Помимо разбора решений около 200 задач по всем темам курса она включает и небольшие фрагменты справочного теоретического материала, необходимого для решения заданий определенной темы. Задания внутри глав разбиты на более мелкие темы, чтобы заострить внимание на том, знание каких разделов физики комбинируются и проверяются в данной мелко-тематической подборке. Последователь-

ность заданий выстроена так, чтобы в текущем разделе использовались только понятия, рассмотренные в предыдущих частях. Перед группами заданий даются краткие характеристики группы, методические рекомендации по направлениям поиска при решении этой группы задач. То есть сборник рассчитан на системное изучение материала с нарастающей сложностью. Полезно его использовать после работы с пособием «Оптимальный банк заданий для подготовки учащихся. Единый государственный экзамен 2015. Физика», выпущенным издательством Интеллект центр» в этом году.

При анализе сложных заданий банка ЕГЭ мы старались ограничиваться только банком заданий, требующих развернутого ответа (в вариантах 2015 года это задания № 28-32), однако в ряде мест даны сложные задания, которые в вариантах 2002-2014 годов оказывались и среди заданий с выбором ответа, и среди заданий с получением числового ответа.

Мы также сочли необходимым обратить внимание на задания, которые по выбору модели явления являются не совсем удачными или молчаливо используют математический формализм, не рассматриваемый или не доказываемый в школьных учебниках физики даже для углубленного изучения. Эти задания зачастую уже так привычны для преподавателей вузов, многие годы включавших их в сборники заданий для абитуриентов, что их решение кажется очевидным. Однако выясняется, что применимость того или иного закона приходится доказывать в ходе решения. А иногда выбранная модель, когда-то кем-то предложенная для описания конкретного явления и вошедшая затем в множество сборников задач, при применении общего подхода к анализу механического явления кажется весьма натянутой.

Также даются разъяснения некоторых «старых» терминов по инерции используемых вузовскими преподавателями и абсолютно незнакомые современным школьникам.

Решение заданий для самостоятельной работы, в основном, использует ситуации и методы, разобранные при анализе задач соответствующего раздела. К этим заданиям даются только ответы, чтобы учащийся закрепил метод решения, разобрав сходную задачу самостоятельно.

Желаем удачи на экзамене! Будем рады, если эта книга помогла Вам при подготовке к нему. Также с благодарностью примем замечания за наверняка оставшиеся опечатки, пожелания по улучшению пособия в следующих изданиях. Не ошибается, как известно, только тот, кто ничего не делает.

С уважением, автор и издатели

Кинематика

В школьном курсе кинематики рассматриваются 5 моделей движения, отличающихся видом траектории и характером движения вдоль этой траектории:

- равномерное по прямой;
- равномерное по окружности;
- равноускоренное по прямой;
- равноускоренное по параболе;
- гармонические колебания по прямой.

Равномерное прямолинейное движение (скорость $\vec{v} = const$) в заданиях ЕГЭ редко вызывает затруднения. Координата тела растет линейно с течением времени $x(t) = x_0 + v_x$ (v_x – проекция на ось Ox), пройденный путь s вычисляется умножением модуля скорости v на время $s(t) = vt$. Если тело в одной системе отсчета (например относительно палубы теплохода) движется со скоростью $\vec{v}_0$, а сама система отсчета (связанная с теплоходом) движется относительно второй (относительно берега) со скоростью $\vec{v}'$, то скорость v тела во второй системе отсчета (относительно берега) равна $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0$.

Наиболее сложные задачи на этот тип движения являются заданиями на анализ графиков $x(t)$ даются в ЕГЭ обычно в совокупности с графиками $x(t)$ и $v_x(t)$ для прямолинейного равноускоренного движения. Поэтому рассмотрим их после рассмотрения модели равноускоренного прямолинейного движения.

Равномерное движение по окружности без сочетания его с законами Ньютона, также не представляет особой трудности. Следует только помнить, при таком движении скорость все время меняет знак и направлена по касательной, а вектор ускорения, модуль которого показывает, как быстро вектор скорости меняет свое направление, также постоянно меняет направление. При движении точки по окружности он постоянно направлен в центр окружности, поэтому называется центростремительным. Если за время одного оборота – период обращения T , тело проходит по окружности радиуса R , путь равный длине окружности

$2\pi R$, то модуль скорости $v = \frac{s}{T} = \frac{2\pi R}{T}$. Модуль центростремительного ускорения

$a_{uc} = \frac{v^2}{R}$. Равномерное движение по окружности также принято характеризовать частотой обращения ν , показывающей сколько оборотов N совершает тело за время t

($\nu = \frac{N}{t} = \frac{1}{T}$) и угловой скоростью ω , показывающей на какой угол φ поворачивается радиус, соединяющий движущуюся по окружности точку с ее центром, за

время t ($\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T}$). Можно, естественно, выразить модуль центростремительно-

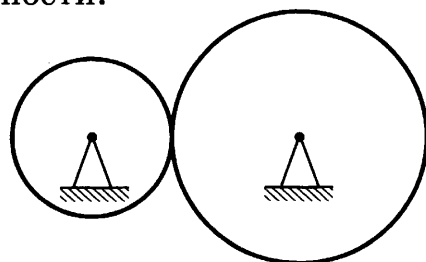
го ускорения через эти величины, однако мы будем стараться давать как можно меньше формул для запоминания, полагая, что зная определения основных величин, Вы сможете использовать свои знания по алгебре и выразите одну величину через другую.

Главная задача физики, это от словесного описания явления (текст задачи) перейти к известной физической модели, вспомнить законы, которые исполь-

зуются для ее описания, и на основе формульных выражений для этих законов составить систему уравнений, решая которую, можно получить ответ на вопрос задачи. Предполагается, что систему уравнений вы можете решить и в буквенном и в числовом виде. В демоверсии ЕГЭ 2015 года дано прямое указание *«Полное правильное решение каждой из задач 29–32 должно содержать законы и формулы, применение которых необходимо и достаточно для решения задачи, а также математические преобразования...»*.

Прежде, чем приступить к рассмотрению равноускоренного движения по прямой, решим одну задачу из открытого банка ЕГЭ, требующую применения знания закономерностей равномерного движения по окружности.

Пример 1.1. Две шестерни, сцепленные друг с другом, вращаются вокруг неподвижных осей (см. рисунок)¹. Большая шестерня радиусом 20 см делает 20 оборотов за 10 с. Сколько оборотов в секунду делает шестерня радиусом 10 см?



Решение. Читая условие, записываем известные характеристики движения точек на ободе каждой шестерни:

$$R_1 = 20 \text{ см} = 0,2 \text{ м}; \quad T_1 = \frac{10 \text{ с}}{20} = 0,5 \text{ с}; \quad R_2 = 10 \text{ см} = 0,1 \text{ м};$$

Читая вопрос, переводим его: требуется найти частоту вращения второй шестеренки: $\nu_2 = ?$

Для решения главное понять, что в точке соприкосновения шестерней нет проскальзывания, а, значит, в точке соприкосновения точки обеих шестеренок движутся с одинаковой скоростью.

$$\nu_1 = \frac{2\pi R_1}{T_1}, \quad \nu_2 = \frac{2\pi R_2}{T_2} \quad \text{и} \quad \nu_1 = \nu_2,$$

Отсюда легко найти период вращения точек на ободе второй шестеренки: $\frac{2\pi R_1}{T_1} = \frac{2\pi R_2}{T_2}$ или $T_2 = \frac{T_1 R_2}{R_1}$. А период обращения связан с искомой частотой обращения соотношением

$$\nu_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{R_1}{T_1 R_2} = \frac{0,2 \text{ м}}{0,5 \text{ с} \cdot 0,1 \text{ м}} = 4 \frac{1}{\text{с}} = 4 \text{ об / с}$$

Равномерное прямолинейное и равноускоренное прямолинейное движения – наиболее часто встречающиеся виды движения в заданиях ЕГЭ. Причем обычно требуется провести сравнение разных характеристик этих видов движения. Заметим, что если говорить о формульном виде описания движения, то при прямолинейном движении можно вместо векторной записи выражений для величин скорости ($\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$), ускорения ($\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}$) и перемещения ($\vec{s} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$) можно

¹ Конечно, неприятно, что авторы задачи произносят слово «шестерня» (зубчатое колесо), а художник рисует «лысое колесо». Будем думать, что он помог нам, нарисовав упрощенную модель шестерни.

обойтись выражениями для координат и проекций этих величин на ось Ox , направляя ось вдоль прямолинейной траектории.

Итак, если ускорение постоянно и не равно нулю, то движение равноускоренное и

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

$$x = x_0 + v_{0x} t + a_x \frac{t^2}{2}$$

Из двух уравнений легко получить соотношение для связи пройденного пути с начальной и конечной скоростями на этом отрезке пути $v_x^2 - v_{0x}^2 = 2a(x - x_0) = 2as$, которое сокращает решение многих задач.

Если ускорение равно нулю, движение равномерное и

$$v_x = v_{0x}$$

$$x = x_0 + v_{0x} t$$

Проанализируем сначала, как знание этих соотношений проверяется в задачах с графическим отображением информации.

При равномерном движении, график $v_x(t)$, прямая, параллельная оси времени, лежащая выше оси, если тело движется по направлению оси ($v_{0x} > 0$) и ниже оси времени, если ($v_{0x} < 0$), то есть тело движется в направлении противоположном оси Ox (рис. 1а). График $x(t) = x_0 + v_{0x} t$ это прямая, наклоненная под острым углом к оси времени («растущая прямая»), если $v_{0x} > 0$ и тело движется вдоль оси; наклоненная под тупым углом к оси времени («спадающая прямая»), если $v_{0x} < 0$; параллельная оси времени, если $v_{0x} = 0$, то есть тело покоится (рис. 1б).

При равноускоренном движении график $v_x(t) = v_{0x} + a_x t$, график «нарастающая» или «убывающая» прямая, в зависимости от направления ускорение по отношению к оси Ox , то есть в зависимости от знака a_x (рис. 1в), а зависимость

$x(t) = x_0 + v_{0x} t + a_x \frac{t^2}{2}$ — это парабола, глядящая ветвями вверх или вниз в зависимости от знака a_x (рис. 1г).

а

б

в

г

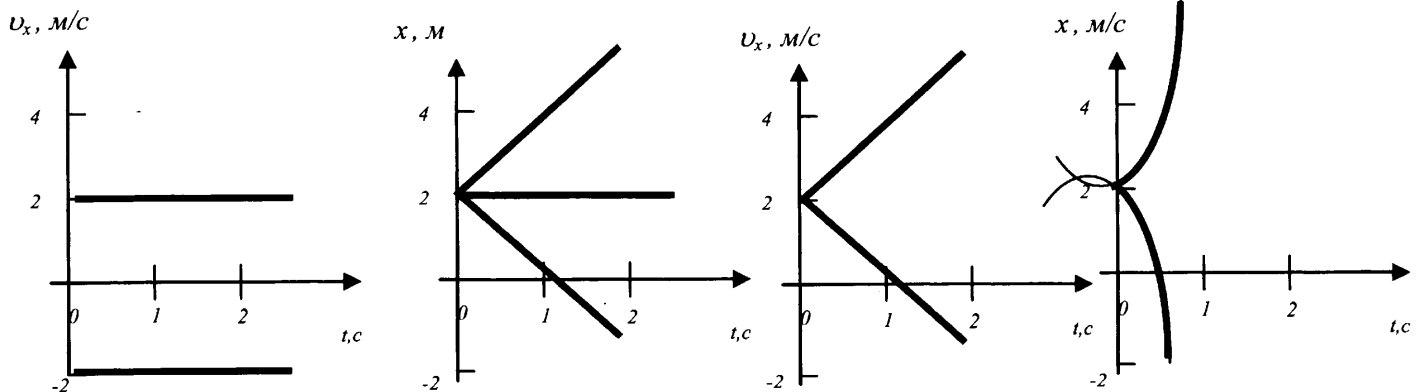


рис. 1

Эти знания, проверяемые на экзамене, в основном в заданиях с выбором ответа, необходимы для решения более сложных заданий. Среди заданий, требующих развернутого ответа, задания, использующие только кинематическое рассмотрение движения встречаются крайне редко. Они относятся, в основном, к рассмотрению относительности движения или свободному падению тел по прямой или по параболе.

Разберем ряд заданий. Обратим внимание, что в этих задачах при введении буквенных обозначений величин следует либо давать словами описание этих обозначений, либо наносить их на чертеж, из которого будет ясен смысл этого обозначения.

Пример 1.2. В безветренную погоду самолет затрачивает на перелет между городами 6 часов. Если во время полета дует боковой ветер перпендикулярно линии полета, то самолет затрачивает на перелет на 9 минут больше. Найдите скорость ветра, если скорость самолета относительно воздуха постоянна и равна 328 км/ч.

Решение. На рис. I показан вектор скорости для перелета в первом случае.

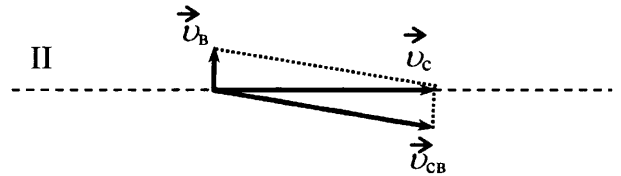


Расстояние между городами тогда:

$$s = v_{CB} t_1,$$

где v_{CB} – скорость самолета относительно воздуха.

Для того, чтобы самолету во время ветра держать курс в том же направлении, он должен относительно воздуха двигаться не четко по курсу, а отклоняясь от него (рис. II).



Закон сложения скоростей в векторном виде для перелета в этом случае:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{CB} + \vec{v}_B,$$

где $\vec{v}_C$ – скорость самолета относительно Земли, $\vec{v}_B$ – скорость ветра.

Выражение для скорости самолета относительно Земли во втором случае имеет вид:

$$v_C = \sqrt{v_{CB}^2 - v_B^2}.$$

Тогда уравнение выражение для пути для второго перелета:

$$s = v_C t_2 = \sqrt{v_{CB}^2 - v_B^2} \cdot t_2.$$

Сравнивая пути во время первого и второго перелетов, получим уравнение:

$$v_{CB} t_1 = \sqrt{v_{CB}^2 - v_B^2} \cdot t_2.$$

Решая это уравнение, получим:

$$v_B = \frac{v_{CB} \sqrt{t_2^2 - t_1^2}}{t_2} = 72 \text{ (км / ч)} = 20 \text{ (м / с)}.$$

Ответ: $v_B = 72 \text{ км/ч} = 20 \text{ м/с}$.

Задачи на полет тела по вертикали вблизи поверхности Земли – это частный случай задач на равноускоренное движение по прямой, с той лишь разницей, что

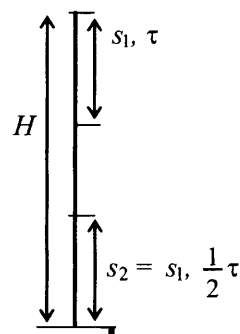
модуль ускорения в этих задачах всегда известен и называется *ускорением свободного падения* $a = g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \approx 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Пример 1.3. Тело, свободно падающее с некоторой высоты, первый участок пути проходит за время $\tau = 1$ с, а такой же последний – за время $\frac{1}{2}\tau$. Найдите полное время падения t , если начальная скорость равна нулю.

Решение. Если t – полное время падения с высоты H , то

$$\begin{cases} H = \frac{gt^2}{2}; \\ s_1 = \frac{g\tau^2}{2}. \end{cases} \Rightarrow H - s_2 = H - s_1 = \frac{g\left(t - \frac{1}{2}\tau\right)^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{gt^2}{2} - \frac{g\tau^2}{2} = \frac{g\left(t - \frac{1}{2}\tau\right)^2}{2} \Rightarrow t^2 - \tau^2 = \left(t - \frac{1}{2}\tau\right)^2 \Rightarrow t = \frac{5\tau}{4} = 1,25 \text{ с}$$



В последние годы в заданиях на сопоставление и в заданиях, требующих развернутого ответа, единого экзамена по физике, стали появляться задания о полете тела, брошенного под углом к горизонту. При решении таких задач следует понимать, что движение вдоль горизонтальной оси представляет собой равномерное движение со скоростью v_{0x} (проекция начальной скорости на горизонтальную ось Ox), а по вертикали равноускоренное движение с ускорением свободного падения g и начальной скоростью v_{0y} (проекция начальной скорости на вертикальную ось Oy). Таким образом, зависимость координаты и проекции скорости на две оси для тела выпущенного из точки $(x_0; y_0)$ со скоростью v_0 под углом α к горизонту (рис. 2) будут описываться уравнениями:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0 \cos \alpha \cdot t & (1) \\ v_{0x} = v_0 \cos \alpha & (2) \\ y = y_0 + v_0 \sin \alpha \cdot t + a_y \frac{t^2}{2} & (3) \\ v_{0y} = v_0 \sin \alpha + a_y t & (4) \end{cases}$$

где $a_y = \pm g$ (знак зависит от направления оси Oy). На рис. 2 система координат выбрана так, что $x_0 = 0$ и $a_y = -g$.

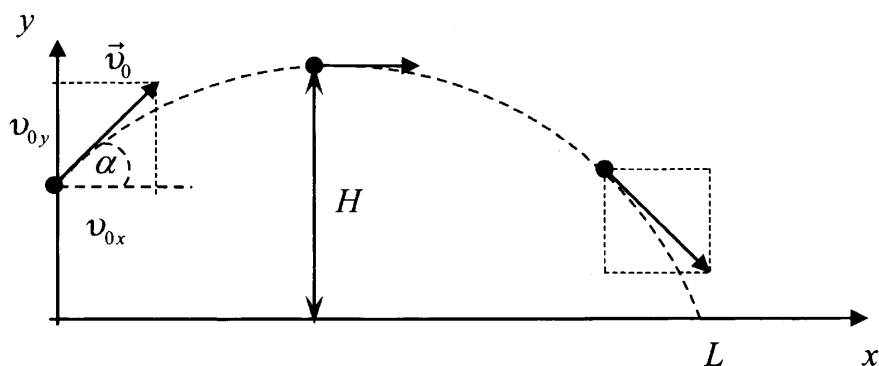
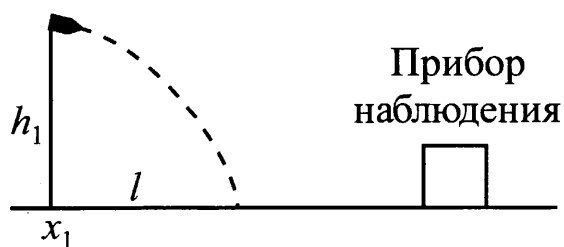


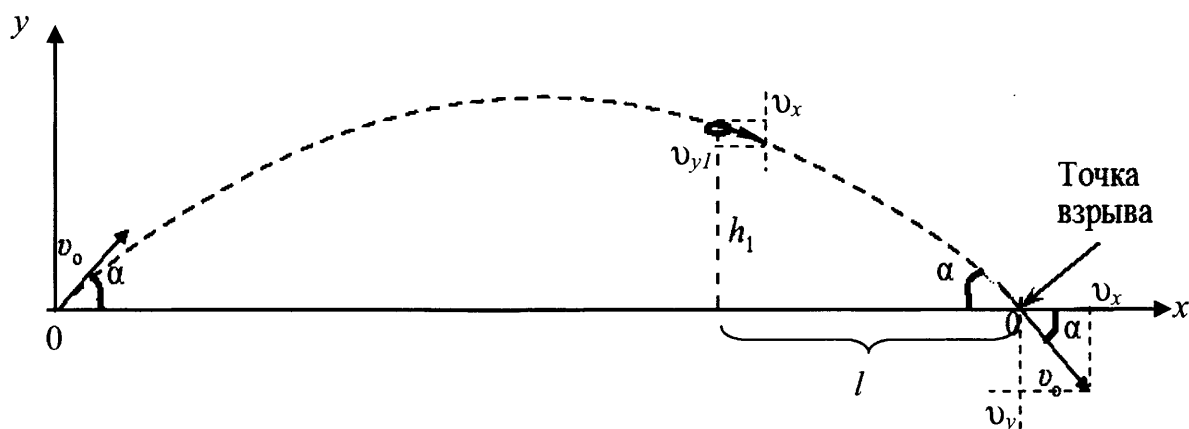
Рис. 2

Все задачи о свободном полете тела, брошенного под углом к горизонту, можно решить с использованием этих 4-х уравнений. В приведенном ниже примере, использованы только кинематические соотношения.

Пример 1.4. Прибор наблюдения обнаружил летящий снаряд и зафиксировал его горизонтальную координату x_1 и высоту $h_1 = 1655$ м над Землёй (см. рисунок). Через 3 с снаряд упал на Землю и взорвался на расстоянии $l = 1700$ м от места его обнаружения. Чему равнялось время полёта снаряда от пушки до места взрыва, если считать, что сопротивление воздуха пренебрежимо мало? Пушка и место взрыва находятся на одной горизонтали.



Решение. При отсутствии сопротивления воздуха траектория снаряда — парабола, и в точке падения на Землю снаряд должен иметь ту же по модулю скорость v_0 , составляющую с горизонталью тот же угол α , что и в точке вылета. Тогда проекции начальной и конечной скоростей снаряда можно обозначить как v_x и v_y .



Проведём горизонтальную ось Ox с началом в точке выстрела (рис.). На этой оси координата точки, где снаряд был обнаружен, $l = 1700$ м, а по вертикальной оси её координата $h = h_1$. Время полёта от этой точки до точки взрыва $t_1 = 3$ с. Согласно законам равноускоренного движения с учетом ускорения g снаряд движется вдоль оси Ox равномерно

$$l = v_x t_1; \quad (1)$$

В течение того же времени вертикальная составляющая скорости нарастает от v_{y1} до v_y , поэтому

$$v_y = v_{y1} + g t_1 \quad (2)$$

Для равноускоренного полета вдоль оси y от точки обнаружения до точки падения скорости и пройденный путь связаны соотношением (аналог выражения $v^2 - v_0^2 = 2as$, см. стр. 8)

$$v_y^2 - v_{y1}^2 = 2gh_1 \quad (3)$$

Из уравнения (1) $v_x = \frac{l}{t_1}$, а совместное решение системы уравнений (2) и (3) дает

$$v_y = \frac{h_1}{t_1} + \frac{gt_1^2}{2}.$$

Для нахождения времени полёта снаряда τ достаточно уравнение для координаты y брошенного под углом к горизонту приравнять в нашей системе отсчета нулю:

$$y(\tau) = v_y \cdot \tau - \frac{1}{2} g \tau^2 = 0,$$

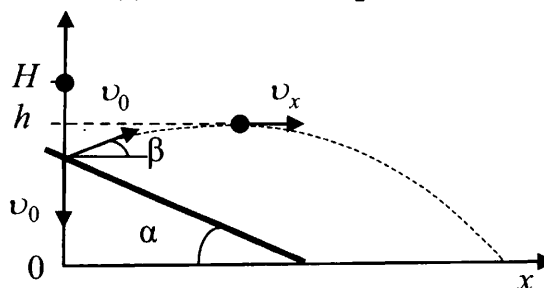
откуда

$$\tau = \frac{2v_y}{g} = \frac{2h_1}{gt_1} + gt_1 \approx 140,3(c).$$

Ответ: $\tau \approx 140$ с

Пример. 1.5. С высоты H над землёй начинает свободно падать стальной шарик, который через время $t = 0,4$ с сталкивается с плитой, наклонённой под углом 30° к горизонту. После абсолютно упругого удара он движется по траектории, верхняя точка которой находится на высоте $h = 1,4$ м над землёй. Чему равна высота H ? Сделайте схематический рисунок, поясняющий решение

Решение. Сделаем чертеж, указав на нем систему координат, в которой будут записываться уравнения движения и проекции скоростей на оси (рис.).



Перед столкновением с плитой скорость шарика направлена вертикально вниз и равна $v_0 = gt$. За это время шарик достигает точки с координатой $y = y_0$, пролетая расстояние $s = \frac{gt^2}{2}$. После упругого соударения с плитой (угол падения шарика при упругом ударе равен углу отражения) её модуль не изменяется, а направление составляет угол $\beta = 90^\circ - 2\alpha$ с горизонтом.

При движении после соударения горизонтальная составляющая скорости не изменяется, так как шарик находится в свободном падении, т. е. $v_x = v_0 \cos \beta = v_0 \sin 2\alpha = \text{const}$.

Время подъема на максимальную высоту после отскока, в точке с координатой y_0 , определяется вертикальной составляющей скорости

$t_{\text{под}} = \frac{v_0 \sin \beta}{g} = \frac{v_0 \cos 2\alpha}{g}$. Высота подъема определяется зависимостью координаты y от времени:

$$h = y(t_{\text{нод}}) = y_0 + v_{y0}t_{\text{нод}} - \frac{gt_{\text{нод}}^2}{2} = y_0 + \frac{(v_0 \cos 2\alpha)^2}{2g}$$

$$\text{откуда } y_0 = h - \frac{(v_0 \cos 2\alpha)^2}{2g} = h - \frac{g^2 t^2 \cos^2 2\alpha}{2g} = h - \frac{gt^2 \cos^2 2\alpha}{2}$$

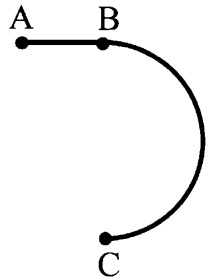
Высота, с которой упал шарик,

$$H = y_0 + s = h - \frac{gt^2 \cos^2 2\alpha}{2} + \frac{gt^2}{2} = h + \frac{gt^2(1 - \cos^2 2\alpha)}{2} = h + \frac{gt^2 \sin^2 2\alpha}{2}$$

Подставляя сюда значения величин, получаем ответ: $H = 2$ м.

Завершим анализ задач по кинематике заданием, в котором требуется одновременное использование уравнений, описывающих равноускоренное движение по прямой и равномерное по окружности.

Пример 1.6. Стартуя из точки А (см. рисунок), спортсмен движется равноускоренно до точки В, после которой модуль скорости спортсмена остаётся постоянным вплоть до точки С. Во сколько раз время, затраченное спортсменом на участок ВС, больше, чем на участок АВ, если модуль ускорения на обоих участках одинаков? Траектория ВС – полуокружность.



Решение. Ускорение на прямолинейном участке определяется по формуле

$$a_1 = \frac{v}{t_1},$$

где v – скорость в точке В, а t_1 – время движения по прямолинейному участку.

Ускорение при движении по дуге окружности есть центростремительное ускорение и определяется по формуле

$$a_2 = \frac{v^2}{R},$$

где R – радиус окружности с дугой ВС.

С учётом того, что при равномерном движении по окружности с периодом $T = 2t_2$

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{\pi R}{t_2},$$

$$\text{получим } a_2 = \frac{v \pi}{t_2}.$$

Приравнивая выражения для ускорений, получим $\frac{v}{t_1} = \frac{v \pi}{t_2}$, откуда $\frac{t_2}{t_1} = \pi$.

Ответ: $\frac{t_2}{t_1} = \pi$.

Динамика

Решение сложных задач по динамике требует знания трех законов Ньютона – аксиом динамики, и зависимости нескольких сил от параметров тел, которые взаимодействуют. Конечно, помимо этого раздела, они используются и во всех остальных разделах физики, поскольку являются краеугольным камнем всей классической физики. Пока мы постараемся добавить их в свой арсенал, не забывая о том, чему мы научились, разбирая задачи раздела «Кинематика».

К сожалению, в школьных учебниках формулировки законов Ньютона слабо связаны с решением задач. Поэтому дадим их менее академичные формулировки, позволяющие записать их содержимое и в аналитическом виде (в виде формул). Заметим только, что эти законы, строго говоря, следует применять к материальным точкам, то есть к телам, которые в данной задаче можно считать точками.

I закон Ньютона. Если в инерциальной системе отсчета, связанной с поверхностью Земли, сумма всех сил, действующих на тело, равна нулю ($\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = 0$), то тело движется прямолинейно и равномерно ($\vec{v} = \text{const}$).

Системы отсчета, в которых выполняется первый закон – закон, формулирующий, когда тела движутся «по инерции», называют инерциальными. К ним относится не только система отсчета, привязанная к поверхности земли или телам, которые покоятся на ней. Мы внесли ее в определение только потому, что большинство задач, которые мы будем разбирать решаются в этой системе отсчета. Инерциальными также являются

- системы отсчета, связанные с телами, движущимися относительно нее с постоянной по направлению и модулю скоростью (например, вагон движущийся по прямолинейному участку равномерно);
- система отсчета, связанная с центром Земли, и осями координат, направленными на Полярную звезду и другие неподвижные относительно земли звезды;
- система отсчета, связанная с центром Солнца, и осями, направленными на неподвижные относительно Солнца звезды.

Эти системы отсчета являются «более инерциальными», чем поверхность Земли, в них I закон Ньютона выполняется более точно.

II закон Ньютона. Если в инерциальной системе отсчета сумма всех сил, действующих на тело массой m , НЕ равна нулю, а равна вектору, называемому равнодействующей всех сил ($\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \vec{R} \neq 0$), то тело движется с ускорением, направленным вдоль равнодействующей и равным по модулю R/m ($\vec{a} = \frac{\vec{R}}{m}$).

Таким образом, если векторная сумма сил постоянна, то тело движется равноускоренно ($\vec{a} = \text{const}$), если сила постоянна по модулю и все время меняет направление, то и ускорение меняет направление. Если ускорение постоянно, значит силы не компенсируют друг друга, и равнодействующая сил направлена туда же куда и ускорение (а не скорость, например).

III закон Ньютона. С какой силой одно тело воздействует на второе, с такой же по модулю, но противоположно направленной второе тело воздействует на первое ($\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$).

Таким образом, обе силы взаимодействия лежат на одной прямой, соединяющей точечные тела, если их можно считать точками. С какой силой Земля притягивает Луну, с такой же силой Луна притягивает Землю. С какой силой Земля притягивает яблоко, с такой же силой и яблоко притягивает Землю.

Ниже приводятся формульные формулировки законов, конкретизирующих как можно вычислить силы, воздействия одних тел на другие в 4-х случаях:

- 1) когда два шарообразных тела (или материальные точки) массами m_1 и m_2 находятся на расстоянии r между их центрами;
- 2) когда пружину тянут за один конец, второй прикрепив к неподвижной точке;
- 3) когда два тела, движутся относительно друг друга или их пытаются сдвинуть;
- 4) когда тело погружено в жидкость.

1. Закон всемирного тяготения, сила тяжести	$F_{тяг} = F_{грав} = G \frac{m_1 m_2}{R^2}$ или на поверхности Земли $F_{тяж} = mg$	$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$ – гравитационная постоянная $g = 9,8 \text{ м/с}^2 \approx 10 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения
2. Закон Гука	$F_{упр} = -k(l - l_0)$	k – жесткость пружины, l – длина, l_0 – начальная длина пружины
3. Закон сухого трения	$F_{тр} \leq \mu N$	N перпендикулярная поверхности сила реакции опоры, μ – коэффициент трения
4. Закон Архимеда	$F_A = \rho_{ж} V_m g$	$\rho_{ж}$ – плотность жидкости, V_m – объем тела в жидкости

Задания ЕГЭ, которые требуют только использования формул для вычисления сил (то есть 4-х последних соотношений) или проверяют понимание одного из законов Ньютона, встречаются, чаще всего, в заданиях, требующих выбора одного из приведенных вариантов ответа. Их анализ не входит в задачи настоящего издания, хотя и среди них встречаются достаточно сложные задания.

Мы рассмотрим применение этих формул в более сложных задачах, где требуется получить числовой или формульный ответ, рассматривая покой, равномерное или равноускоренное движение тела под действием постоянных во времени сил. В них нужно либо найти ускорение тела, пользуясь вторым законом Ньютона (прямая задача динамики), либо пользуясь первым, вторым, а иногда и третьим законом Ньютона, найти одну из сил, действующих на тело.

В таких заданиях, где требуется применить законы Ньютона, следует придерживаться следующего алгоритма решения задачи:

- 1) нарисовать все силы действующие на тело;
- 2) указать на чертеже направления скорости в рассматриваемый момент времени и ускорения, если это возможно определить, анализируя текст;
- 3) Записать в векторном виде формулировку первого или второго закона Ньютона;
- 4) Выбрать систему отсчета и переписать закон Ньютона в проекциях на выбранные оси, получив систему скалярных уравнений. Одну из осей лучше выбрать вдоль направления ускорения или скорости, тогда в проекции на вторую ось в уравнении справа будет стоять 0.

- 5) Добавить к полученной системе уравнений уравнения, описывающие связь сил, нарисованных на чертеже, с параметрами тела (закон Гука, всемирного тяготения, Архимеда) или сил между собой (закон сухого трения)
- 6) Решить систему уравнений в буквенном виде
- 7) Перевести все единицы измерений исходных величин в единицы системы СИ и получить числовой ответ, подставив числовые значения величин, данных в условии или взятых в справочных таблицах.

Рассмотрим два примера, в которых известные взаимно перпендикулярные силы оказываются необычно направленными. Формальный подход к их решению ровно такой же, какой будет применяться в более сложных задачах: рисуем все силы, записываем второй закон Ньютона в векторном виде, выбираем оси, записываем второй закон Ньютона в проекциях на выбранные оси, решаем получившуюся систему уравнений, добавив к ней знание зависимости сил от параметров тел, подставляем в буквенный ответ числовые значения, переводя их в СИ.

Пример 1.7. Брусок массой 0,5 кг прижат к вертикальной стене силой 10 Н, направленной горизонтально. Коэффициент трения скольжения между бруском и стеной 0,4. Какую минимальную силу надо приложить к бруску по вертикали, чтобы равномерно поднимать его вертикально вверх?

Решение. Поскольку тело движется равномерно, то по первому закону Ньютона

$$\vec{mg} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_{mp} + \vec{F}_{min} = 0,$$

а по закону сухого трения

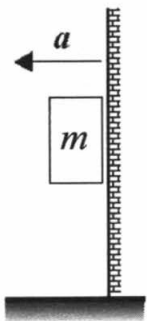
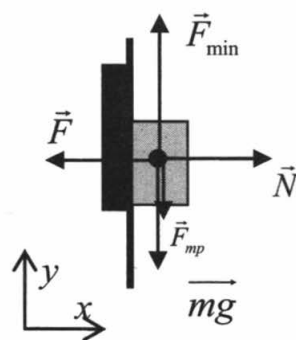
$$F_{mp} = \mu N.$$

Записывая векторное уравнение, отражающее первый закон Ньютона, в проекциях на оси координат, связанные со стеной, получим систему уравнений

$$\begin{cases} x: N - F = 0 \\ y: F_{min} - mg - F_{mp} = 0 \\ F_{mp} = \mu N \end{cases}$$

Решая ее, получаем

$$F_{min} = mg + F_{mp} = mg + \mu N = mg + \mu F = 0,5 \cdot 10 + 0,4 \cdot 10 = 9(H)$$



Пример 1.8. К подвижной вертикальной стенке приложили груз массой 10 кг. Коэффициент трения между грузом и стенкой равен 0,4. С каким минимальным ускорением надо передвигать стенку влево, чтобы груз не соскользнул вниз?

Решение. Самое трудное в этой задаче нарисовать только реальные силы, действующие на тело и не нарисовать лишних, поскольку задача далека от вашего реального опыта (впрочем, возьмите книжку, прислоните к ней тетрадку и не касаясь тетрадки попробуйте двигать книгу так быстро, чтобы тетрадь не соскользнула вдоль книжки).

Чтобы сделать это правильно, следует помнить, что сила – это мера воздействия одного тела на другое. На расстоянии на тело может воздействовать (если не брать задачи, где действует магнитное и электрическое поле) только Земля своим притяжением – это сила тяжести.

Остальные тела действуют только в точке непосредственного контакта. С бруском «контактит» только стена, значит можно нарисовать силу ее воздействия в перпендикулярном стене направлении (сила нормальной реакции $\vec{N}$) и в направлении вдоль стены (это сила трения). Никаких демонических «движущих», «центробежных», «скатывающих» сил в механике Ньютона (верной только для инерциальных систем отсчета) не существует!!!

Поэтому нельзя решать задачу в системе отсчета связанной со стеной, системе отсчета свяжем с поверхностью Земли. Конечно, чтобы описанное движение реализовалось, кто-то должен действовать с какой-то силой на стену. Однако мы хотим записать второй закон Ньютона для бруска, и рисуем силы, действующие только на брусок (рис.). Тогда согласно второго закона Ньютона

$$\vec{mg} + \vec{N} + \vec{F}_{mp} = m\vec{a},$$

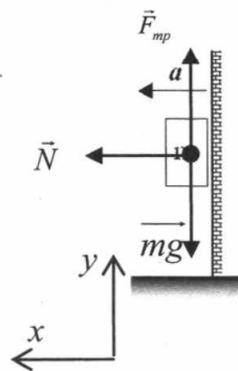
Если рассматривается предельный случай, когда ускорение стенки таково, что брусок вот-вот начнет скользить вдоль стены вниз, можно утверждать, что верно и соотношение из закона сухого трения

$$F_{mp} = \mu N.$$

Расписывая векторное уравнение в проекциях на оси выбранной системы отсчета, получим систему уравнений

$$\begin{cases} x: N = ma \\ y: F_{mp} - mg = 0 \\ F_{mp} = \mu N \end{cases}$$

Решив систему, получим $a = \frac{N}{m} = \frac{F_{mp}}{\mu m} = \frac{mg}{\mu m} = \frac{g}{\mu} = \frac{10}{0,4} = 25 \text{ (м/с}^2\text{)}$

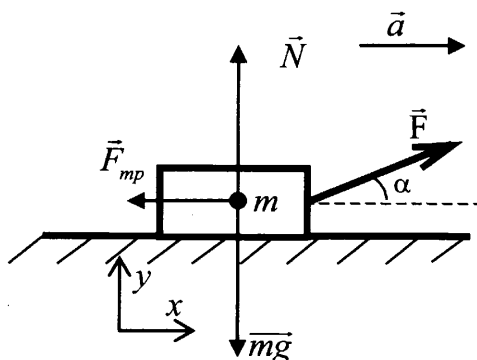


Если силы не взаимно перпендикулярны, требуется применить знания тригонометрии, отыскивая прямоугольные треугольники, образованные векторами сил и их проекциями.

Пример 1.9. По горизонтальной дороге мальчик тянет сани массой 30 кг за веревку, направленную под углом 60° к плоскости дороги, с силой $F = 100$ Н. Коэффициент трения $\mu = 0,12$. Каков путь, пройденный санями за 5 с, если в начальный момент их скорость была равна нулю?

Решение.

Силы, направление ускорения и система отсчета показаны на рисунке.



Поскольку тело движется равноускоренно, то по второму закону Ньютона

$$\vec{mg} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_{mp} = m\vec{a},$$

а по закону сухого трения

$$F_{mp} = \mu N.$$

В проекции на оси в совокупности с законом сухого трения это дает систему уравнений

$$\begin{cases} x: F \cos \alpha - F_{mp} = ma \\ y: N + F \sin \alpha - mg = 0 \\ F_{mp} = \mu N \end{cases}$$

Решая систему получаем:

$$N = mg - F \sin \alpha$$

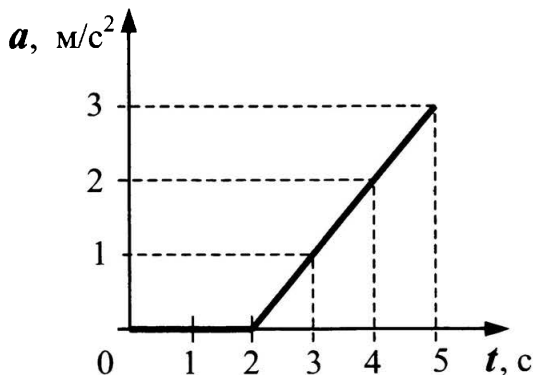
$$F_{mp} = \mu N = \mu(mg - F \sin \alpha)$$

$$a = (F \cos \alpha - F_{mp}) / m = (F \cos \alpha - \mu mg + \mu F \sin \alpha) / m =$$

$$= (100 \cdot 0,5 - 0,12 \cdot 30 \cdot 10 + 0,12 \cdot 100 \cdot 0,87) / 30 \approx 0,8 (\text{м} / \text{с}^2)$$

Используя закон равноускоренного движения для случая начальной скорости равной нулю получим $s = at^2/2 = 0,8 \cdot 5^2/2 = 10 (\text{м})$

Рассмотрение стандартной ситуации о движении бруска по горизонтальной поверхности может быть усложнено использованием второго закона для случая переменной силы. В этом случае следует только помнить, что этот закон выполняется в каждый момент времени. Зная силы, действующие на тело в определенный момент времени можно вычислить ускорение тела в тот же момент времени. Если сила меняется во времени по модулю или по направлению, то и ускорение будет меняться по модулю или по направлению (или и по модулю, и по направлению).



Пример 1.10. К покоящемуся на шероховатой горизонтальной поверхности телу приложена нарастающая с течением времени горизонтальная сила тяги $F = bt$, где b – постоянная величина. На рисунке представлен график зависимости ускорения тела от времени действия силы. Определите коэффициент трения скольжения.

Перелом на графике в момент времени $t = 2$ с, следует трактовать как начало движения бруска. После начала движения применим к описанию движения бруска второй закон Ньютона

$$\vec{mg} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_{mp} = m\vec{a}$$

Используя результат Примера 33 с учетом $\alpha=0$, получим, что для любого момента времени (!) для ускорения должно выполняться соотношение

$$a = (F \cos \alpha - \mu mg + \mu F \sin \alpha) / m = (F - \mu mg) / m$$

С учетом $F = bt$ запишем его для двух моментов времени

$$a_1 = (bt_1 - \mu mg) / m = \frac{b}{m} t_1 - \mu g$$

$$a_2 = \frac{b}{m} t_2 - \mu g$$

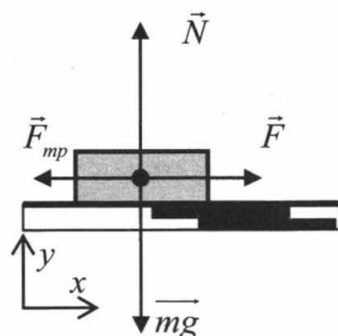
Вычитая из второго уравнения первое получим $a_2 - a_1 = \frac{b}{m} (t_2 - t_1)$ что дает возможность, используя график рассчитать коэффициент $\frac{b}{m}$. Например,

используя моменты времени 3с и 5с, получим

$$\frac{b}{m} = \frac{a_2 - a_1}{t_2 - t_1} = \frac{3 \text{ м/с}^2 - 1 \text{ м/с}^2}{5 \text{ с} - 3 \text{ с}} = 1 \text{ м/с}^3$$

Тогда из уравнения для ускорения для момента времени 3с $a_1 = \frac{b}{m} t_1 - \mu g$ получим $\mu g = \frac{b}{m} t_1 - a_1$ или

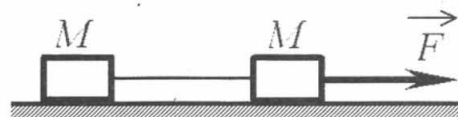
$$\mu = \frac{b}{m} \frac{t_1}{g} - \frac{a_1}{g} = 1 \cdot \frac{3}{10} - \frac{1}{10} = 0,2$$



Более сложными являются задания, в которых рассматривается движение связки тел. Важно понимать, что если тела связаны нерастяжимой нитью, то перемещения их за единицу времени в каждый промежуток времени одинаковы, значит равны по модулю и скорости и ускорения тел. Если к тому же тела в связке (сцепке) не меняют своего положения относительно друг друга, то их можно рассматривать как движение единого тела с массой равной сумме масс. При этом во второй закон Ньютона войдут все внешние силы, действующие на каждое из тел. Силы взаимного действия составных частей такой системы тел будут вну-

треними и в силу третьего закона Ньютона дадут в сумме всех сил, действующих на систему ноль. Но можно рассматривать и движение каждого тела в связке по отдельности, записывая второй закон Ньютона с участием сил, действующих только на данное тело. В этом случае следует во второй закон для отдельного тела включить и силы, которые для связки в целом являются внутренними. При этом важно, что при расписывании законов Ньютона на каждое из тел в проекциях на оси системы координат можно для каждого тела выбирать свою, наиболее удобную систему координат.

Пример 1.11. Два груза одинаковой массы M , связанные нерастяжимой и невесомой нитью, движутся прямолинейно по гладкой горизонтальной поверхности под действием



горизонтальной силы $\vec{F}$, приложенной к одному из грузов (см. рисунок). Минимальная сила F , при которой нить обрывается, равна 12 Н. При какой силе натяжения нить обрывается?

Решение. Читая условие и вопрос задачи, следует понять, что нужно определить силу натяжения нити между грузами, когда сила 12 Н тянет связку вправо, при этом нить еще цела и грузы движутся как единое целое. Поскольку задание с выбором ответа, не требующее строго оформления решения, попробуем рассуждать, не рисуя никаких сил.

Рассмотрим движение связки в целом, на нее действуют силы тяжести грузов и силы реакции опоры на каждый из грузов, и они компенсируют друг друга, то есть в векторной форме закона Ньютона в сумме дают ноль. Сила натяжения нити, тянущая один груз вправо, другой влево, является внутренней. Поэтому сила $F=12$ Н, приложенная к системе тел, и есть равнодействующая всех сил, действующих на систему. Масса системы тел равна $2M$, поэтому ускорение связки, а значит и ускорение каждого груза равно $a=F/2M$.

Если рассмотреть движение только левого груза, то для него силы тяжести и сила нормальной реакции опоры скомпенсированы и равнодействующей всех сил, сообщающей ускорение a , является сила натяжения нити $T=Ma=M \cdot (F/2M)=F/2=6$ Н.

Можно решить задачу и рассматривая движение каждого тела. В проекции на ось x , направленную слева направо, второй закон для них запишется следующим образом (учитывая одинаковость ускорений двух тел и компенсацию сил тяжести и реакции опоры)

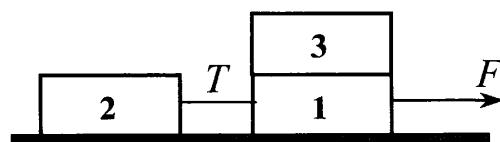
$$F-T=Ma,$$

$$T=Ma.$$

Откуда, вычитая из первого уравнения второе, получим

$$F-2T=0 \Rightarrow T=F/2=6 \text{ Н.}$$

Пример 1.12. Одинаковые бруски, связанные нитью, движутся под действием внешней силы F по гладкой горизонтальной поверхности (см. рисунок). Как изменится сила натяжения нити T , если третий брусок переложить с первого на второй?



Решение. По аналогии с рассуждением в *Примере 1.12*, для связки в целом ускорение грузов, рассчитывается исходя из того, что равнодействующая всех сил, действующих на связку – это сила F . Поэтому ускорение при любом расположении верхнего груза будет равно $a = F/3M$. Сила натяжения нити, является равнодействующей всех сил для груза (грузов) находящихся сзади (слева). Поэтому в первом случае

$$T_1 = Ma = M(F/3M) = F/3,$$

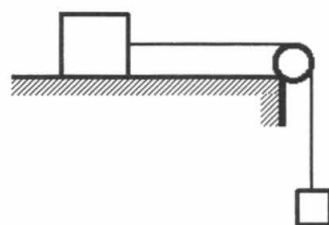
а во втором случае (когда сзади два груза друг на друге)

$$T_2 = 2Ma = 2M(F/3M) = 2F/3.$$

Поэтому сила натяжения увеличится в 2 раза.

Заметим, что при всей изящности условия задачи, авторам следовало бы оговорить, что между бруском и нижними грузами трение столь велико, что обеспечивает движение третьего груза с нижними как единого целого. В противном случае при гладких брусках и большой силе F связка нижних брусков «выскочит» из-под груза 3. Если рассмотреть движение груза 3 отдельно, то выяснится, что единственной силой, сообщающей ему ускорение в горизонтальном направлении, может быть сила трения между нижним и верхним грузом (см. *Пример 1.14*)

Пример 1.13. По горизонтальному столу из состояния покоя движется брусок массой 0,8 кг, соединенный с грузом массой 0,2 кг невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через гладкий невесомый блок (см. рисунок). Груз движется с ускорением $1,2 \text{ м/с}^2$. Чему равен коэффициент трения бруска о поверхность стола?



Решение. В этом примере второй закон Ньютона нужно писать для каждого тела связки, поскольку, хотя модули ускорений тел совпадают, их ускорения имеют разные направления. Поэтому для получения системы уравнений с одним неизвестным a придется использовать уравнения, следующие из векторной формулы второго закона, но спроецированной на разные оси. Силы, действующие на каждый из грузов, ускорения грузов, оси координат показаны на рисунке. Для того, чтобы не обозначать одной буквой вектора, равные по длине, но направленные в разные стороны, около векторов написаны только модули векторов.

Второй закон Ньютона для груза M в проекциях на две оси и для груза m на ось Oy (на ось Ox получается малоинформативное уравнение $0=0$) выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} T - F_{mp} = Ma \\ N - Mg = 0 \\ mg - T = ma \\ F_{mp} = \mu N \end{cases}$$

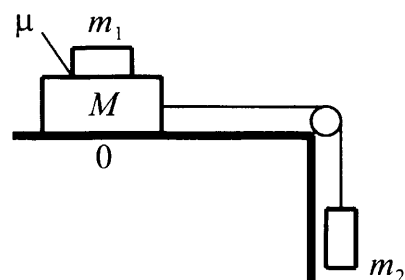
В систему уравнений приписан и закон сухого трения, поскольку брусок M по условию скользит с трением.

Решая эту систему для получения выражения для μ , получим

$$\mu = \frac{F_{\text{тр}}}{N} = \frac{T - Ma}{Mg} = \frac{mg - ma - Ma}{Mg} = 0,1$$

И, наконец, следующий пример требует рассмотрения связки из трех тел для определения общего модуля ускорения связки, а затем использования этого ускорения для описания сил, действующих на одно из тел связки.

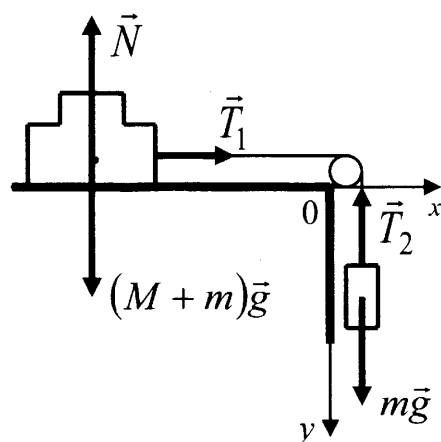
Пример 1.14. Система грузов M , m_1 и m_2 , показанная на рисунке, движется из состояния покоя. Поверхность стола – горизонтальная гладкая. Коэффициент трения между грузами M и m_1 равен $\mu = 0,2$. Грузы M и m_2 связаны легкой нерастяжимой нитью, которая скользит по блоку без трения. Пусть $M = 1,2$ кг, $m_1 = m_2 = m$. При каких значениях m грузы M и m_1 движутся как одно целое?



Решение. Пока грузы M и m_1 движутся как одно целое, будем считать их одним телом $M + m$ сложной формы. На рисунке показаны внешние силы, действующие на это тело и на груз m_2 .

Запишем второй закон Ньютона для каждого из тел в проекциях на оси Ox и Oy введенной системы координат:

$$\begin{cases} Ox: (M + m)a_1 = T_1 \\ Oy: ma_2 = mg - T_2 \end{cases}$$



С учетом того, что нить легкая, нерастяжимая и скользит по блоку без трения

$T_1 = T_2 = T$, $a_1 = a_2 = a$, поэтому

$$(M + m)a = T$$

$$ma = mg - T$$

Отсюда $a = g \frac{m}{M + 2m}$.

Если рассмотреть движение груза m_1 отдельно, то второй закон Ньютона в проекциях на оси Ox и Oy , получим

$$Ox: ma_1 = F_{\text{тр}}$$

$$Oy: mg - N_1 = 0$$

Поскольку максимальная сила трения, которая может сообщать ему ускорение:

$$F_{\text{тр}} \leq \mu N_1 = \mu mg, a_1 \leq \mu g.$$

Условие движения грузов как единого целого $a=a_1$

$$\text{значит } a = \frac{mg}{M+2m} \leq \mu g$$

$$\text{Откуда } m \leq \frac{\mu M}{1-2\mu} = 0,4(\text{кг})$$

Еще сложнее становится задача о движении связки тел, если одно из них находится на наклонной плоскости. Достаточно стандартная в свое время задача о движении груза на наклонной плоскости в последнее время также вызывает затруднение, поскольку при расписывании второго закона Ньютона в проекциях на оси требует использования геометрии и тригонометрии, а с владением этими частями школьного курса математики в настоящее время стало существенно хуже.

Для того чтобы определить ускорение тела на наклонной плоскости следует нарисовать силы, действующие на него (рис. 3). II закон Ньютона в векторном виде достаточно прост

$$\vec{mg} + \vec{N} + \vec{F}_{mp} = m\vec{a}.$$

Выбор осей системы отсчета рекомендуется осуществить так, чтобы ось x была направлена вдоль вектора ускорения (рис.). Тогда векторное уравнение запишется в проекциях на оси так, что модуль ускорения войдет только в одно из них. Проекция силы тяжести на эти оси помогает определить треугольник, показанный пунктиром, поскольку в нем модули проекции силы тяжести на оси x и y – это противолежащий и прилежащий к углу α катеты, а модуль силы тяжести гипотенуза.

$$\text{на ось } Ox: mg \sin \alpha - F_{mp} = ma$$

$$\text{на ось } Oy: N - mg \cos \alpha = 0$$

Добавляя закон сухого трения

$$F_{mp} = \mu N,$$

получают систему уравнений, из которой находится и сила трения

$$F_{mp} = \mu mg \cos \alpha,$$

и ускорение

$$a = g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha.$$

Как видно из этих выражений сила трения растет пропорционально массе, а ускорение не изменится при изменении массы груза.

В задании, требующем развернутого ответа, такая задача становится частью более сложной задачи о рассмотрении движения двух связанных тел.

Пример 1.15. Грузы массами $M = 1$ кг и m связаны лёгкой нерастяжимой нитью, переброшенной через блок, по которому нить может скользить без трения (см. рисунок). Груз массой M находится на шероховатой наклонной плоскости (угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30^\circ$, коэффициент трения

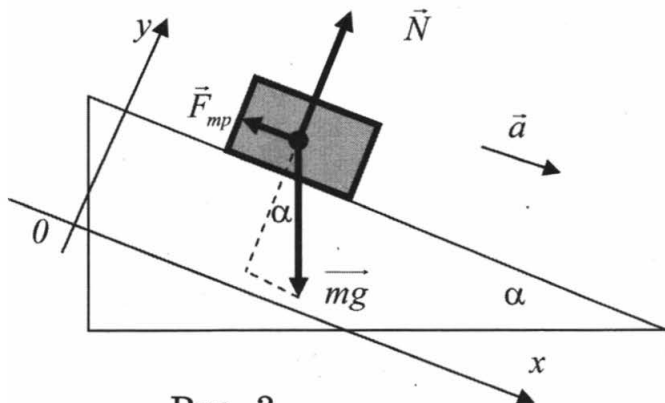
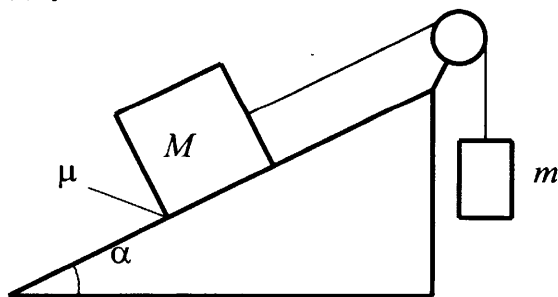
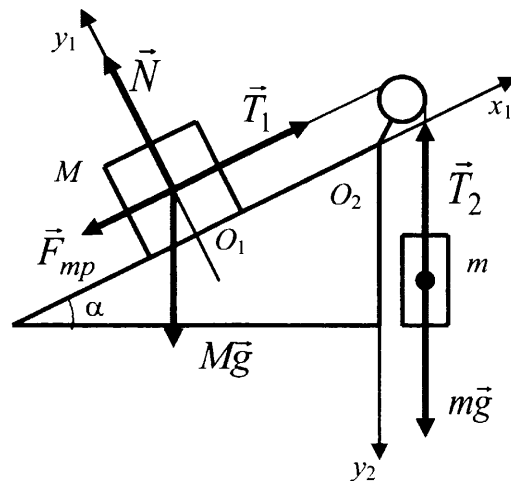


Рис. 3



$\mu = 0,3$). Чему равно максимальное значение массы m , при котором система грузов ещё не выходит из первоначального состояния покоя?

Решение. В этой задаче совмещено умение применять законы Ньютона на наклонной плоскости и учитывать законы движения для связки грузов. Впрочем, авторы пощадили учеников и попросили рассмотреть случай, когда грузы покоятся ($a = 0$), но вот-вот сдвинуться, что позволяет использовать закон сухого трения для вычисления силы трения. Важно при этом, что если масса m достаточно велика, но грузы ещё покоятся, то сила трения покоя, действующая на груз массой M , направлена вниз вдоль наклонной плоскости (см. рисунок).



Будем считать систему отсчета, связанную с наклонной плоскостью, инерциальной. Запишем второй закон Ньютона для каждого из покоящихся тел в проекциях на оси введенных систем координат (для груза m ось y_2 вертикальна, а для груза M перпендикулярна наклонной плоскости):

$$\begin{cases} O_1x_1: T_1 - Mgsin\alpha - F_{тр} = 0 \\ O_1y_1: N - Mgcos\alpha = 0 \\ O_2y_2: mg - T_2 = 0 \end{cases}$$

С учетом того, что $T_1 = T_2 = T$, получим

$$T = mg, F_{тр} = mg - Mgsin\alpha, N = Mgcos\alpha.$$

Так как в предельном случае $F_{тр} = \mu N$

$$mg - Mgsin\alpha = \mu Mgcos\alpha$$

Таким образом, в предельном случае, когда груз M еще покоится

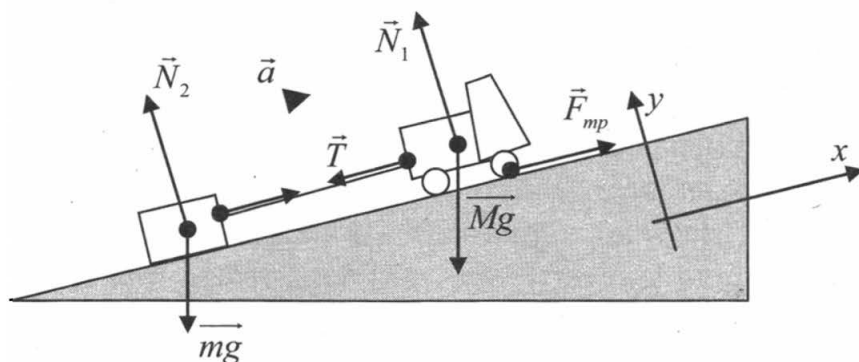
$$m = M(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \approx 0,76(\text{кг}).$$

Ответ: $m_{\max} \approx 0,76 \text{ кг}$.

Заметим, что текст условий Примеров 1.13 и 1.15 и рисунки к ним формируют у учеников, неверное представление о блоках, как технических устройствах. Следует говорить об отсутствии трения в оси блока, а не о скольжении нити вдоль углубления для нити в теле блока. Все-таки блок это не гладкий цилиндр, по которому нить проскальзывает.

Пример 1.16. Грузовой автомобиль с двумя ведущими осями массой $M = 4 \text{ т}$ тянет за нерастяжимый трос вверх по уклону легковой автомобиль, масса которого $m = 1 \text{ т}$, и у которого выключен двигатель. С каким максимальным ускорением могут двигаться автомобили, если угол уклона составляет $\alpha = \arcsin 0,1$, а коэффициент трения между шинами грузового автомобиля и дорогой $\mu = 0,2$? Силой трения качения, действующей на легковой автомобиль, пренебречь. Массой колес пренебречь.

Решение. В данной задаче самое трудное для школьника, на наш взгляд, понять, что сила трения для автомобиля – это и есть силы тяги. Этому вопросу, несмотря на всю его «практическую значимость» не уделяется должного внимания. Только в одном учебнике для углубленного изучения физики (Чижов Г.А., Ханнанов Н.К., Физика. 10 кл., М.: Дрофа, 2013) имеется параграф «Механика сухопутных транспортных средств», где показывается, что автомобиль движется благодаря силам трения, и решаются задачи, демонстрирующие связь силы трения с максимальной силой тяги и мощностью двигателя. Ведь согласно механики Ньютона, ускоренное движение автомобиля должно обеспечиваться воздействием внешних сил, а в роли такой силы, действующей вдоль полотна дороги может быть только сила трения. Если этот факт осознан и нарисован рисунок со всем силами, действующими на грузовик и прицепленный к нему легковой автомобиль, то задача сводится к применению второго закона Ньютона для связки тел, двигающихся с одинаковым ускорением



Запишем второй закон Ньютона для каждого из тел связки, учитывая, что на них действуют две силы тяжести, две силы нормальной реакции, сила трения между колесами грузовика и дорогой, а также сила натяжения троса, тянущая грузовик вниз, а легковой автомобиль вверх по наклонной плоскости (см.рис.)

$$\overline{Mg} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{mp} + \vec{T}_1 = M\vec{a}$$

$$\overline{mg} + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 = m\vec{a}$$

Учитывая третий закон Ньютона, $T_1 = T_2 = T$, запишем второй закон для обоих тел в проекциях на оси x и y системы отсчета, связанной с поверхностью земли. Для грузовика

$$Ox: -Mg \sin \alpha - T + F_{mp} = Ma$$

$$Oy: -Mg \cos \alpha + N_1 = 0$$

Для легкового автомобиля

$$Ox: -mg \sin \alpha + T = ma$$

$$Oy: -mg \cos \alpha + N_2 = 0$$

К этим уравнениям нужно добавить закон сухого трения, для связи предельной силы трения и силы нормальной реакции N_I :

$$F_{mp} = \mu N_1$$

Решая эту систему уравнений совместно, получим

$$F_{mp} = \mu Mg \cos \alpha$$

$$T = ma + mg \sin \alpha$$

$$-Mg \sin \alpha - ma - mg \sin \alpha + \mu Mg \cos \alpha = Ma$$

$$-Mg \sin \alpha - mg \sin \alpha + \mu Mg \cos \alpha = (M + m)a$$

$$a = \frac{\mu Mg \cos \alpha - Mg \sin \alpha - mg \sin \alpha}{M + m} = \frac{M(\mu \cos \alpha - \sin \alpha) - m \sin \alpha}{M + m} g$$

$$a = \frac{4000(0,2 \cdot 0,99 - 0,1) - 1000 \cdot 0,1}{5000} \cdot 10 \approx 0,58 \text{ (м / с}^2\text{)}$$

Теперь посмотрим, как законы Ньютона применяются для описания движения по окружности. При равномерном движении по окружности ускорение материальной точки направлено в центр окружности, поэтому равнодействующая всех сил, действующих на тело, направлена в каждый момент времени также в центр окружности. Выбрав систему отсчета так, что ее начало совпадает с центром окружности, а две оси располагаются вдоль радиусов, можно рассмотреть движение в этой системе координат.

Если второй закон Ньютона записывать в проекциях на эти оси координат, то проекции сил и ускорения будут меняться со временем, однако в тот момент времени, когда тело пересекает ось x , вид уравнения, отражающего второй закон Ньютона, будет очень простой

$$R_x = R = ma_{xc}$$

$$R_y = 0$$

Рассмотрим сначала самый простой случай, когда движение происходит под действием единственной силы. К таким заданиям относятся задания на движение искусственных спутников Земли, спутников планет, самих планет вокруг Солнца и даже выдуманных планет и их спутников. Следующий пример из варианта 2004, когда в сложных заданиях требуется записать ответ в определенном формате и внести в бланк ответов. Такие задания после некоторого перерыва с 2015 года вновь вернутся в варианты ЕГЭ.

Пример 1.17. Какое ускорение сообщает Солнце Земле своим притяжением? Расстояние до Солнца примерно в 24 тыс. раз больше, чем радиус Земли, а масса Солнца превышает массу Земли в 333 тыс. раз. Ответ выразить в мм/с^2 и округлить до целых.

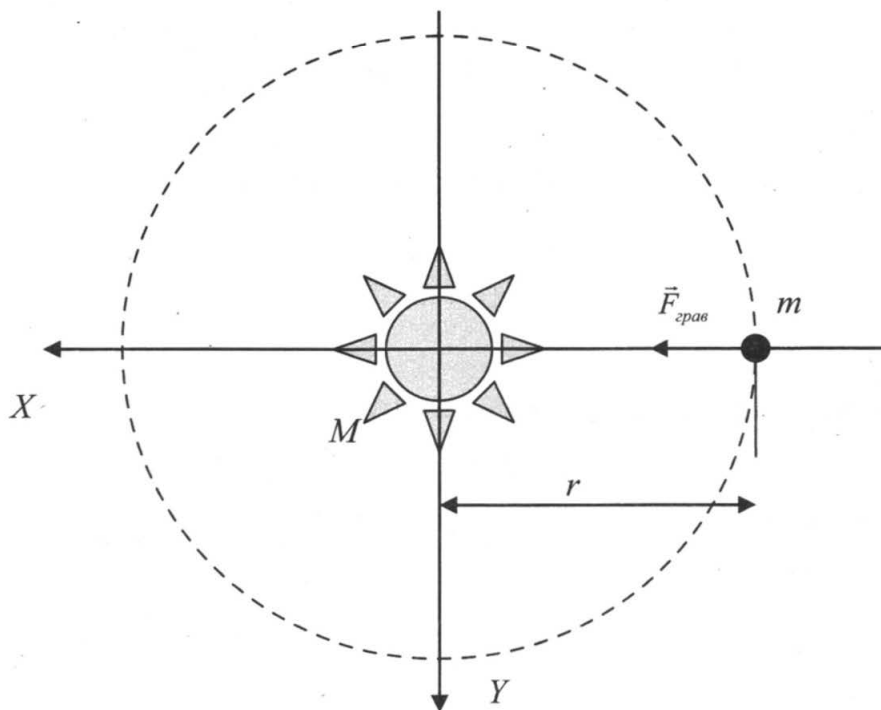


Рис.

Чертеж приведен на рисунке. Земля массой m движется под действием гравитационной силы

$$\vec{F}_{\text{грав}} = m\vec{a}_{\text{uc}}$$

В проекции на ось X второй закон Ньютона запишется в виде,

$$F_{\text{грав}} = ma_{\text{uc}},$$

а гравитационная сила по закону всемирного тяготения

$$F_{\text{грав}} = \frac{GmM}{r^2}$$

Второй закон Ньютона в проекции на ось X после подстановки этого выражения приобретает вид

$$\frac{GmM}{r^2} = ma_{\text{uc}} \text{ откуда искомое ускорение}$$

$$a_{\text{uc}} = \frac{GM}{r^2}$$

Дальнейшее решение зависит от того, какие справочные величины приведены в начале варианта ЕГЭ. Судя по тексту, в число этих констант входят масса Земли $M_3 = 6 \cdot 10^{24}$ кг и радиус Земли $R_3 = 6400$ км $= 6,4 \cdot 10^6$ м. Если это так, то масса Солнца $M = 333000M_3$ и $r = 24000R_3$. Тогда

$$\begin{aligned} a_{\text{uc}} &= \frac{GM}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 3,33 \cdot 10^5 \cdot 6 \cdot 10^{24}}{(2,4 \cdot 10^4 \cdot 6,4 \cdot 10^6)^2} \approx 56,5 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}^2 = 5,65 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^2 = \\ &= 5,65 \text{ мм/с}^2 \approx 6 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}^2 \end{aligned}$$

Что же делать, если массы Земли нет в справочных величинах, а есть только радиус Земли и ускорение свободного падения на поверхности Земли (впрочем его-то уж все школьники знают $g \approx 10 \text{ м/с}^2$)? Тогда придется вспомнить, что сила тяжести на Земле это сила гравитационного притяжения точечной массы (человек точка по сравнению с размером Земли) к шару, подчиняющийся закону всемирного тяготения в том же виде, где в знаменателе будет стоять расстояние от точки до центра шара, то есть радиус Земли. Таким образом,

$$mg = \frac{GmM_3}{R_3^2}, \text{ откуда } M_3 = \frac{gR_3^2}{G} \approx \frac{10 \cdot (6,4 \cdot 10^6)^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} \approx 6,14 \cdot 10^{24} \text{ кг}$$

Пример 1.18. Искусственный спутник обращается вокруг планеты по круговой орбите радиусом 4000 км со скоростью 3,4 км/с. Ускорение свободного падения на поверхности планеты равно 4 м/с². Чему равен радиус планеты?

Второй закон Ньютона для спутника, летающего на орбите радиуса r вокруг планеты массой M со скоростью v под действием силы всемирного тяготения:

$$\frac{GmM}{r^2} = ma_{uc} = m \frac{v^2}{r}, \text{ откуда } M = \frac{v^2 r}{G}$$

Приравнивая выражение для силы тяжести планеты и для силы всемирного тяготения, действующей на тело массой m на ее поверхности, получим

$$mg = \frac{GmM}{R^2} \text{ или } M = \frac{gR^2}{G}$$

$$\text{Тогда } \frac{v^2 r}{G} = \frac{gR^2}{G} \text{ откуда}$$

$$R = \sqrt{\frac{v^2 r}{g}} = v \sqrt{\frac{r}{g}} = 3400 \sqrt{\frac{4000000}{4}} = 3400000 \text{ м} = 3400 \text{ км}$$

Пример 1.19. В результате перехода с одной круговой орбиты на другую центростремительное ускорение спутника Земли уменьшается. Как в результате этого перехода изменятся скорость его движения по орбите и период обращения вокруг Земли?

Уменьшение модуля центростремительного ускорения $a_{uc} = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$ однозначно не определяет характер изменения радиуса орбиты, скорости и периода обращения. Требуется, анализируя полет спутника получить выражение, в которое бы входили параметры, не меняющиеся при переходе с орбиты на орбиту, одна из искомым величин и центростремительное ускорение. Второй закон Ньютона для движения спутника дает:

$$\frac{GmM}{r^2} = ma_{uc}$$

из которого следует, что радиус орбиты спутника $r = \sqrt{\frac{GM}{a_{uc}}}$. Так как масса

планеты и гравитационная постоянная величины постоянные, то уменьшение центростремительного ускорения означает увеличение радиуса орбиты. В этом случае говорят, что спутник перешел на более высокую орбиту.

Теперь в тот же закон Ньютона для спутника подставим выражение для

центростремительного ускорения $a_{uc} = \frac{v^2}{r}$

$$\frac{GmM}{r^2} = m \frac{v^2}{r}.$$

Отсюда следует, что $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$, и, так как радиус орбиты возрос, скорость на орбите должна была уменьшиться, поскольку в выражении остальные величины при переходе на орбиту не изменились.

Аналогично подставляя во второй закон Ньютона центростремительное уско-

рение, выраженное через период орбиты $a_{uc} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$, получим $\frac{GmM}{r^2} = m \frac{4\pi^2 r}{T^2}$.

Отсюда $T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM}$ или $T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}}$, что означает увеличение периода обращения спутника вокруг планеты при переходе его на более высокую орбиту.

Встречаются в вариантах ЕГЭ и задания – фантазии о несуществующих планетах, хотя, конечно, хотелось бы, чтобы задания по физике имели дело с реально существующими объектами.

Пример 1.20. Средняя плотность планеты Плюк равна средней плотности Земли, а первая космическая скорость для Плюка в 2 раза больше, чем для Земли. Чему равно отношение периода обращения спутника, движущегося вокруг Плюка по низкой круговой орбите, к периоду обращения аналогичного спутника Земли? Объем шара пропорционален кубу радиуса ($V \sim R^3$).

Второй закон Ньютона для спутников Земли и планеты Плюк, движущихся по орбитам с радиусом, совпадающим с радиусом планеты,

$$G \frac{M_{\Pi} \cdot m}{R_{\Pi}^2} = m \frac{v_{\Pi}^2}{R_{\Pi}}$$

$$G \frac{M_3 \cdot m}{R_3^2} = m \frac{v_3^2}{R_3},$$

где M_{Π} , M_3 и m – соответственно, массы Плюка, Земли и спутника. Отсюда

$$R_{\Pi} = \frac{GM_{\Pi}}{v_{\Pi}^2} \text{ и } R_3 = \frac{GM_3}{v_3^2}. \text{ Или } v_{\Pi}^2 = \frac{GM_{\Pi}}{R_{\Pi}} \text{ и } v_3^2 = \frac{GM_3}{R_3}$$

Массы планет связаны с их объемом V :

$$M_{\Pi} = \rho_{\Pi} \cdot V_{\Pi} \text{ и } M_3 = \rho_3 \cdot V_3.$$

При этом $V \sim R^3$. Следовательно,

$$\frac{v_{\Pi}^2}{v_3^2} = \frac{\frac{GM_{\Pi}}{R_{\Pi}}}{\frac{GM_3}{R_3}} = \frac{M_{\Pi}R_3}{R_{\Pi}M_3} = \frac{\rho_{\Pi}R_{\Pi}^2}{\rho_3R_3^2}$$

Так как плотности равны, $\frac{v_{\Pi}^2}{v_3^2} = \frac{R_{\Pi}^2}{R_3^2} = 4$ и $\frac{v_{\Pi}}{v_3} = \frac{R_{\Pi}}{R_3} = 2 \Rightarrow$

$$\frac{T_{\Pi}}{T_3} = \frac{\frac{2\pi R_{\Pi}}{v_{\Pi}}}{\frac{2\pi R_3}{v_3}} = \frac{R_{\Pi}v_3}{v_{\Pi}R_3} = \frac{2}{2} = 1$$

При переходе к рассмотрению равномерного движения по окружности в «земных условиях» мы вынуждены рассмотреть несколько сил, равнодействующая которых сообщает телу центростремительное ускорение. Это задания когда тело вращается на карусели, на диске, на конической поверхности и т.п.

Заметим и предупредим, что в этих случаях часто пытаются перейти в систему отсчета, вращающуюся вместе с каруселями, дисками и т.п. При этом приходится вводить различные «демонические» силы (отбрасывающие, центробежные и т.п.). Повторим, в механике Ньютона каждая сила, результат воздействия на рассматриваемое тело другого тела, поэтому мы по-прежнему будем оперировать знакомыми силами трения, реакции опоры, натяжения нити и силы тяжести.

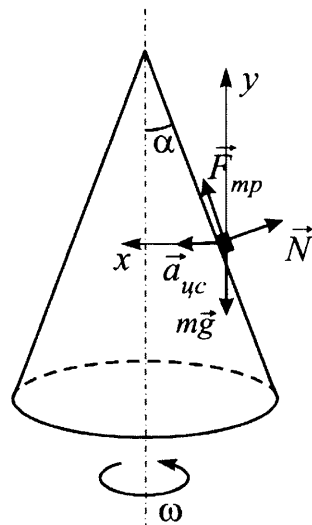
Пример 1.21. Полый конус с углом при вершине 2α вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, совпадающей с его осью симметрии. Вершина конуса обращена вверх. На внешней поверхности конуса находится небольшая шайба, коэффициент трения которой о поверхность конуса равен μ . При каком максимальном расстоянии L от вершины шайба будет неподвижна относительно конуса? Сделайте схематический рисунок с указанием сил, действующих на шайбу.

Шайба по условию движется равномерно по окружности, перпендикулярной оси конуса. Поэтому второй закон Ньютона в инерциальной системе отсчёта, связанной с Землёй для движения шайбы в векторном виде:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{mp} = m\vec{a}_{uc}.$$

Проекции уравнения на ось OX , направленную горизонтально к центру окружности, и вертикальную ось OY дают систему уравнений:

$$\begin{cases} F_{mp} \sin \alpha - N \cos \alpha = ma_{uc}, \\ F_{mp} \cos \alpha + N \sin \alpha - mg = 0. \end{cases}$$



Критерием «максимальности» расстояния, на котором шайба еще будет совершать такое движение будет достижение силой трения покоя своего максимального значения $F_{\text{тр. max}} = \mu N$. Тогда система уравнений примет вид

$$\begin{cases} N(\mu \sin \alpha - \cos \alpha) = ma_{\text{цс}}, \\ N(\mu \cos \alpha + \sin \alpha) - mg = 0, \end{cases}$$

откуда $a_{\text{цс}} = \frac{g(\mu \sin \alpha - \cos \alpha)}{\mu \cos \alpha + \sin \alpha}$.

Выражение для центростремительного ускорения через угловую скорость $\omega = \frac{2\pi}{T}$ дает возможность в это выражение ввести расстояние L от вершины конуса вдоль составляющей конуса до точки, где находится шайба т.к. $r/L = \sin \alpha$ (см. рис.): $a_{\text{цс}} = \omega^2 r = \omega^2 L \sin \alpha$.

Следовательно, $L = \frac{a_{\text{цс}}}{\omega^2 \sin \alpha} = \frac{g(\mu \sin \alpha - \cos \alpha)}{\omega^2 (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \sin \alpha} = \frac{g(\mu - \text{ctg} \alpha)}{\omega^2 (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}$.

В заключении рассмотрим еще одну задачу, которую трудно отнести к какой-либо из названных выше тем. Она требует не только анализа сил, действующих на тело, но правильного выбора осей координат системы отсчета, но и хорошего пространственного воображения, переноса опыта анализа законов движения в разных системах отсчета, исходя из проекций сил на эти оси.

Пример 1.22. Наклонная плоскость пересекается с горизонтальной плоскостью по прямой AB . Угол между плоскостями $\alpha = 30^\circ$. Маленькая шайба скользит вверх по наклонной плоскости из точки A с начальной скоростью $v_0 = 2 \text{ м/с}$, направленной под углом $\beta = 60^\circ$ к прямой AB . Найдите максимальное расстояние, на которое шайба удалится от прямой AB в ходе подъема по наклонной плоскости. Трением между шайбой и наклонной плоскостью пренебечь.

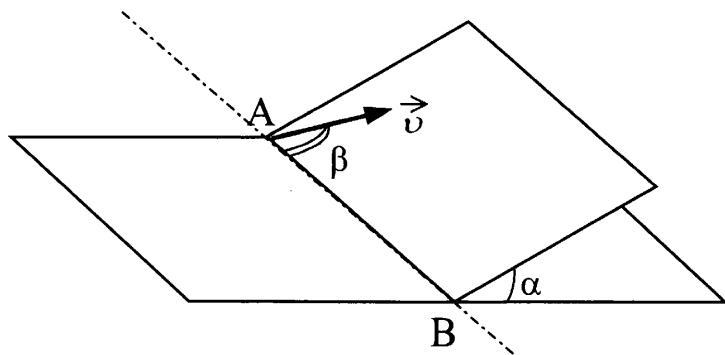


Рис. 1

Решение. Выберем следующую систему координат:

- ось x направлена по прямой AB ,
- ось y – вверх по наклонной плоскости перпендикулярно линии AB (см. рис. 1).
- ось z – перпендикулярно наклонной плоскости.

На телодвигающееся по наклонной плоскости действуют две силы: сила тяжести и сила нормальной реакции опоры (рис.)

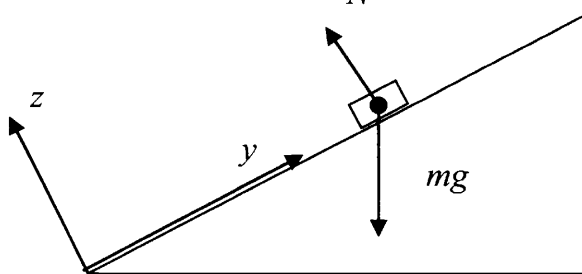


Рис. 2

Записывая второй закон Ньютона в проекциях на оси, получим:

$$ma_y = -mg \sin \alpha$$

$$ma_x = 0$$

$$ma_z = N - mg \cos \alpha$$

Понимая, что вдоль оси z тело не перемещается, то есть $a_z = 0$, приходим к выводу, что вдоль оси y тело движется с ускорением равным по модулю $a = g \sin \alpha$, а вдоль оси x равномерно со скоростью $v_{0x} = v_0 \cos \beta$

Такое движение аналогично движению тела, брошенного под углом β к горизонту, только ускорение тела вдоль оси y равно не g , а $g \sin \alpha$. Искомое расстояние это аналог высоты подъема тела при движении вверх под действием силы тяжести. Используя уравнения для рассмотрения движения тела, брошенного под углом к горизонту (см. стр. 10), получим, что время подъема до верхней точки траектории находится из условия

$$v_y(t_{\text{нод}}) = v_0 \sin \beta - g \sin \alpha \cdot t_{\text{нод}} = 0 \quad \text{или} \quad t_{\text{нод}} = \frac{v_0 \sin \beta}{g \sin \alpha}$$

Тогда максимальное удаление l от прямой AB на наклонной плоскости:

$$l = y(t_{\text{нод}}) = v_0 \sin \beta \cdot t_{\text{нод}} - \frac{g \sin \alpha}{2} t_{\text{нод}}^2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \beta}{2g \sin \alpha} = 0,3 \text{ м.}$$

Статика и гидростатика

Статика – раздел механики, в котором изучаются условия равновесия протяженных тел и механических систем под действием приложенных к ним сил. До недавнего времени этот раздел был исключен из школьной программы по физике, однако в течение последних 5 лет благодаря включению заданий, требующих знаний этого раздела в варианты ЕГЭ, постепенно возвращается в школьные учебники.

Для описания равновесия тел, которые нельзя считать материальными точками требуется ввести два новых понятия плечо силы и момент силы относительно выбранной оси. Проверка умения определять и вычислять эти величины проверяются обычно в части А ЕГЭ по физике.

Плечо силы относительно оси – расстояние между осью вращения и линией действия силы, т.е. длина общего перпендикуляра, соединяющего эти скрещивающиеся прямые (см. рис. 4).

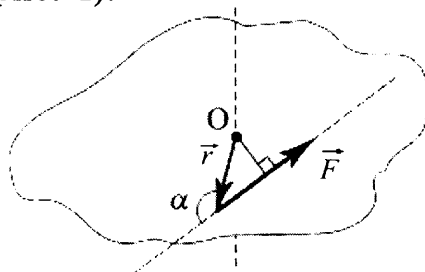


Рис. 4

На рисунке показана плоскость, соединяющая вектор $\vec{F}$ и перпендикулярная рассматриваемой вертикальной оси. Ось пересекает плоскость в точке O . Тогда плечо силы $\vec{F}$ – расстояние от точки O до линии действия силы, т.е. длина l перпендикуляра, опущенного в плоскости из точки O на линию действия силы $\vec{F}$.

Если $\vec{r}$ вектор проведенный из точки O в точку приложения силы $\vec{F}$, то плечо этой силы $l = r \sin \alpha$.

Момент силы относительно оси – это физическая величина, равная произведению модуля силы F на ее плечо l , взятому со знаком «+» или «-» относительно данной оси: $M = \pm Fl$.

Знак момента силы выбирается произвольно. Если, однако, на одно тело действуют две силы, то моменты сил, стремящихся повернуть тело против часовой стрелки, принято считать положительными, а моменты сил, стремящихся повернуть тело по часовой стрелке, – отрицательными.

Обычно в задачах рассматривают тела, на которые действуют силы, лежащие в одной плоскости (например, в вертикальной). В этом случае рассматривают плечо силы относительно оси, перпендикулярной этой плоскости и проходящей через точку O , лежащей в этой плоскости, в которой расположены векторы всех сил. В этом случае говорят о плече силы относительно точки O .

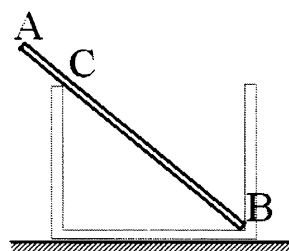
После введения понятия момент силы можно сформулировать условия, при котором силы, действующие на него, обеспечивают его неподвижность в данной системе отсчета. Для того чтобы твердое тело, находящееся в покое в начальный момент времени, оставалось в состоянии равновесия в инерциальной системе отсчета, необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:

1. Векторная сумма всех внешних сил, действующих на тело, должна быть равна нулю.
2. Алгебраическая сумма моментов этих сил относительно любой оси также должна быть равна нулю.

Заметим, что сила тяжести, действующая на протяженные тела (бревно, лестницу, стержень), – сила распределенная по всему телу. У нее нет определенной точки приложения. Замена воздействия земли на различные части твердого тела одной силой возможно после введения понятия *центр тяжести твердого тела* – геометрической точки, через которую проходит равнодействующая всех сил тяжести, действующих на каждую частицу данного тела, при любой его ориентации в пространстве.

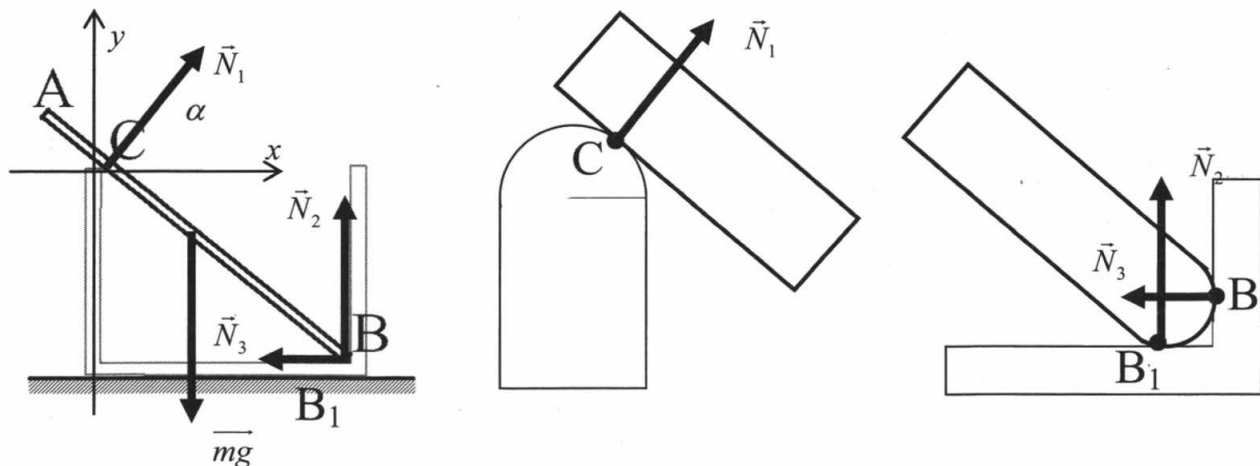
Центр тяжести однородного тела, имеющего центр симметрии: шар, прямоугольная или круглая пластины, цилиндр, находится в этом центре. При этом в задачах статики в условие равновесия записывается момент единой силы тяжести, приложенной в центре тяжести.

Пример 1.23. Однородный стержень АВ массой $m = 100$ г покоится, упираясь в стык дна и стенки банки концом В и опираясь на край банки в точке С (см. рисунок). Модуль силы, с которой стержень давит на стенку сосуда в точке С, равен $0,5$ Н. Чему равен модуль вертикальной составляющей силы, с которой стержень давит на сосуд в точке В, если модуль горизонтальной составляющей этой силы равен $0,3$ Н? Трением пренебречь.



Решение. Нарисуем все силы, действующие на стержень (рис.). Наибольшую сложность представляет выбор направления сил, действующих на стержень со стороны стакана. Когда соприкосновение двух тел происходит по плоскости, тогда сила реакции направляется перпендикулярно этой плоскости. На

рисунке показано, что плоскость стержня касается стакана в одной точке С, и соприкосновение стержня вблизи дна со стаканом происходит в двух точках В и В₁. В этом случае предполагают, что острые углы верхней кромки стакана и нижних кромок стержня представляют собой окружности и силы направляют перпендикулярно плоскости, касающейся этой окружности (рис.).



Именно о модулях сил $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3$ идет речь в условии задачи: $N_1 = 0.5\text{Н}$, $N_3 = 0.3\text{Н}$ (так как по III закону Ньютона, с какой силой стержень действует на стенку, с такой же но противоположно направленной силой стенка действует на стержень). Искомая сила воздействия стержня на дно сосуда по тому же закону Ньютона по модулю равна N_2 , поэтому нахождение этой величины и есть цель решения задачи.

Для начала проанализируем первое условие равновесия: векторная сумма всех сил, действующих на стержень, равна 0:

$$\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{N}_3 + \vec{mg} = 0$$

В проекциях на горизонтальную ось x и вертикальную ось y системы отсчета, связанной со столом это даст:

$$N_1 \cos \alpha - N_3 = 0$$

$$N_1 \sin \alpha + N_2 - mg = 0$$

Так как величины N_1 , N_3 , mg известны в этой системе два неизвестных α и

N_2 . Из первого уравнения находим $\cos \alpha = \frac{N_3}{N_1} = \frac{0,3}{0,5} = 0,6$, что позволяет вычислить $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = 0,8$. Тогда из второго уравнения

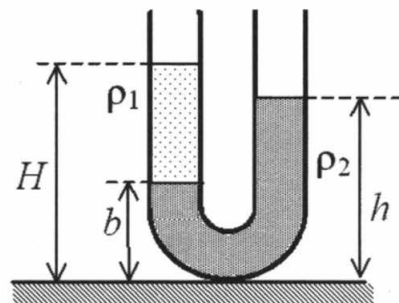
$$N_2 = mg - N_1 \sin \alpha = 0,1 \cdot 10 - 0,3 \cdot 0,8 = 0,76(\text{Н})$$

Как видим, при решении данной задачи нам не понадобилось писать второе условие равновесия твердого тела, связанное с равенством моментов сил, относительно выбранной оси. Его в данном случае можно было бы применить например для вычисления доли длины стержня, выступающего над уровнем среза банки. Так записав равенство моментов сил, вращающих стержень по и против часовой стрелки относительно оси, проходящей через нижний конец стержня, можно получить $N_1 \cdot l_1 = mg \frac{l}{2} \sin \alpha$ где l_1 — длина стержня внутри стакана, то есть расстояние от точки В до точки С.

Откуда $l_1 = \frac{mg \sin \alpha}{2N_1} l = \frac{1 \cdot 0,8}{2 \cdot 0,5} l = 0,8l$. Значит из банки высовывается часть стержня длиной $0,2l$, то есть его пятая часть.

Задания по гидростатике связаны в банке ЕГЭ с проверкой понимания законов Паскаля и умением вычислять давление создаваемое жидкостью на глубине h , а также применением закона Архимеда для вычисления выталкивающей силы тел, погруженных в жидкость. Наиболее сложные расчетные задачи на эту тему приведены ниже, хотя некоторые из них в вариантах ЕГЭ предыдущих лет встречались среди заданий с выбором ответа.

Пример 1.24. В широкую U-образную трубку с вертикальными прямыми коленами, схематично изображенную на рисунке, налиты керосин плотностью $\rho_1 = 0,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ и вода плотностью $\rho_2 = 1,0 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. На рисунке $b = 8 \text{ см}$, $h = 24 \text{ см}$. Чему равно расстояние H ?



Условие равновесия жидкости, связано с равенством давлений с двух сторон произвольно выбранного фрагмента жидкости. Так как выбор фрагмента жидкости, покой которого рассматривается при решении произволен, то удобнее всего в этом случае выбрать фрагмент жидкости нижней части сосуда, ограниченный горизонтальной плоскостью проходящей через границу раздела жидкостей. Давление в точках жидкости, находящихся на выбранной границе легко вычисляется и в правом и в левом колене сосуда

$$\begin{aligned} p_1 &= p_{атм} + \rho_1 g(H - b) \\ p_2 &= p_{атм} + \rho_2 g(h - b) \end{aligned}$$

так как равно давлению, создаваемому слоем жидкости над выбранной границей в сумме с атмосферным давлением над жидкостью.

Приравнявая эти давления легко находим ответ на вопрос задачи:

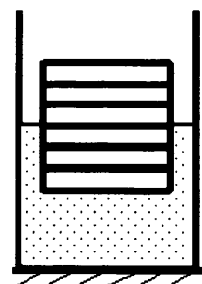
$$p_{атм} + \rho_1 g(H - b) = p_{атм} + \rho_2 g(h - b)$$

$$\rho_1 g(H - b) = \rho_2 g(h - b)$$

$$H - b = \frac{\rho_2(h - b)}{\rho_1}$$

$$H = \frac{\rho_2(h - b)}{\rho_1} + b = \frac{1000(0,24 - 0,08)}{800} + 0,08 = 0,28(\text{м}) = 28(\text{см})$$

Пример 1.25. Шесть одинаковых брусков толщиной h каждый, связанные в стопку, плавают в воде так, что уровень воды приходится на границу между двумя средними брусками. Как изменится глубина погружения стопки, если из стопки убрать верхний брусок?



Решение. Условие равновесия тела в жидкости – равенство силы тяжести и силы Архимеда, действующей на жидкость. Приведем сначала решение для любителей алгебры. Если плотность материала брусков ρ , объем каждого

бруска V , а плотность жидкости $\rho_{ж}$, то равенство сил тяжести и Архимеда дает для начального случая

$$6\rho Vg = \rho_{ж}g \cdot 3V,$$

А для конечного

$$5\rho Vg = \rho_{ж}g \cdot V_x.$$

Разделив одно уравнение на другое (или решая систему уравнений иным способом), получим

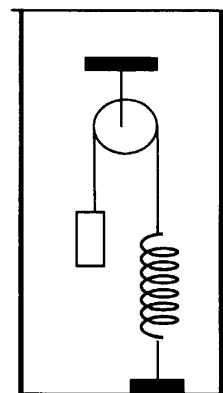
$$\frac{6\rho Vg}{5\rho Vg} = \frac{\rho_{ж}g \cdot 3V}{\rho_{ж}g \cdot V_x}$$

$$\frac{6}{5} = \frac{3V}{V_x}$$

Откуда $V_x = 2,5V$, то есть под водой окажутся 2,5 бруска, то есть глубина погружения уменьшится на 0,5 высоты бруска.

Можно рассуждать и проще. Если под водой была половина деревянного составного ли сплошного тела, то это определялось соотношением плотностей материала дерева и воды. После снятия любого количества брусков под водой останется половина тела. Если осталось 5 брусков, то под водой будет 2,5 бруска, значит, из-под воды поднялось 0,5 бруска.

Пример 1.26. В сосуде (см. рисунок) находится система тел, состоящая из блока с перекинутой через него нитью, к концам которой привязаны тело объёмом V и пружина жёсткостью k . Нижний конец пружины прикреплен ко дну сосуда. Как изменится сила натяжения нити, действующая на пружину, если эту систему целиком погрузить в жидкость плотностью ρ ? (Считать, что трение в оси блока отсутствует.)



С помощью второго закона Ньютона выразим силу натяжения нити T_1 до погружения системы в жидкость:

$$mg - T_1 = 0.$$

Для случая, когда система погружена в жидкость, с учетом силы Архимеда:

$$mg - T_2 - \rho Vg = 0.$$

Решая систему уравнений легко найти изменение силы натяжения нити:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = -\rho Vg.$$

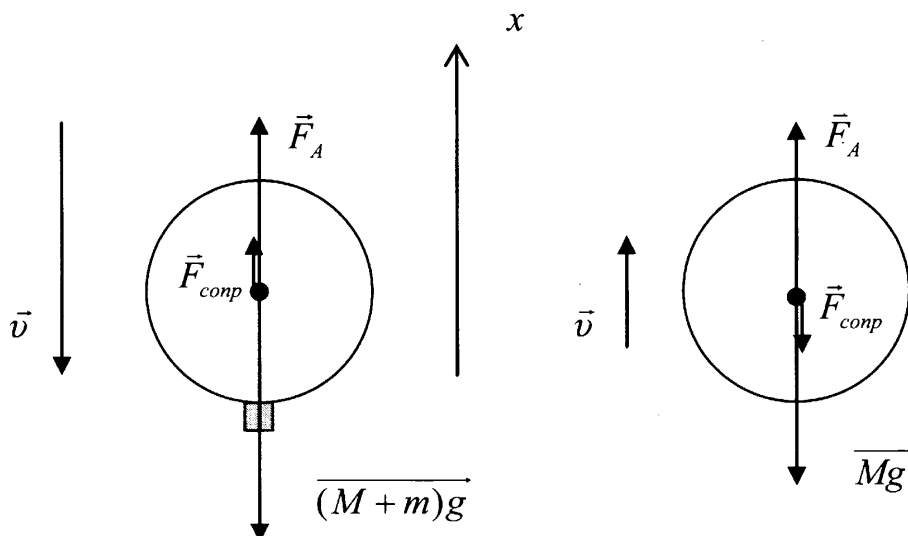
Пример 1.29. Определите массу груза, который нужно сбросить с аэростата массой 1100 кг, движущегося равномерно вниз, чтобы он стал двигаться с такой же по модулю скоростью вверх. Архимедова сила, действующая на аэростат, равна 104 Н. Силу сопротивления воздуха при подъеме и спуске считайте одинаковой, $g = 10 \text{ м/с}^2$.

При обсуждении воздухоплавания мы предполагаем, что на тела объёмом V в воздухе постоянной плотности $\rho_{возд}$ действует выталкивающая сила, аналогичная архимедовой силе, действующие на тела в жидкости $F_A = \rho_{возд} gV$. Эту силу в задачах о погружении тел в жидкость или иных задачах с телами, на-

ходящимися в воздухе, мы не учитываем, поскольку она мала по сравнению с иными силами. В задачах о воздухоплавании речь идет об устройствах, для которых выталкивающая сила на «дне воздушного океана» — атмосферы близка силе тяжести устройств.

На аэростат по условию действуют сила тяжести $Mg + mg$ (M — масса аэростата и газа, заполняющего аэростат, m — масса груза), Архимедова сила и сила сопротивления воздуха $F_{\text{сопр}}$. Причем равномерное движение аэростата означает, что сумма этих сил равна нулю.

Отличие движения вверх с постоянной скоростью от движения вниз с постоянной скоростью только в направлении силы сопротивления воздуха (рис.)



Таким образом, согласно закону Ньютона в проекции на вертикальную ось направленную вверх имеем для двух случаев движения:

$$F_A + F_{\text{сопр}} - Mg - mg = 0$$

$$F_A - F_{\text{сопр}} - Mg = 0$$

Откуда, вычитая из первого уравнения второе, получим $2F_{\text{сопр}} = mg$ или $F_{\text{сопр}} = \frac{mg}{2}$. Подставив это выражение в первое уравнение, получим

$$F_A + \frac{mg}{2} - Mg - mg = 0 \text{ или } mg = 2Mg - 2F_A. \text{ Откуда}$$

$$m = 2M - \frac{2F_A}{g} = 2200 - 2000 = 200(\text{кг})$$

Законы сохранения в механике

Закон сохранения импульса и закон сохранения энергии — это теоремы механики Ньютона, которые используются для вычисления скоростей тел при их взаимодействии тогда, когда ускорение тела меняется во времени. Например, при спрыгивании человека с лодки он давит на лодку (и она на него) со все более ослабевающей силой, и лодка и человек движутся с переменным ускорением. И напрямую применить второй закон Ньютона крайне сложно. То же самое можно сказать, когда санки катятся не с плоской горы, а выпуклой или вогнутой. Решение задач про движение тела по наклонной плоскости показывает, что смена наклона приведет к изменению действующих сил нормальной реакции и силы трения. Это означает, что постоянно меняется во времени равнодействующая всех

сил (и по модулю, и по направлению), ускорение тела, что не позволяет вычислить скорость санок в конце горки, даже если пренебречь силой трения. В ряде случаев задача может быть решена и с помощью законов Ньютона и с помощью законов сохранения, но решение с использованием законов сохранения оказывается более простым.

Итак, раз законы сохранения – теоремы, доказываемые с помощью законов Ньютона, значит, они выполняются только в инерциальных системах отсчета. В большинстве задач это будет система отсчета, связанная с поверхностью земли. Кроме того, для их выполнения требуется выполнение еще ряда условий. Однако, прежде чем их сформулировать, надо, естественно, вспомнить ряд понятий.

Закон сохранения импульса

Чтобы говорить о законе сохранения импульса, надо понимать, что такое импульс тела, что такое импульс системы тел и что такое внешние силы, действующие на систему тел.

Импульс тела (материальной точки) $\vec{p} = m\vec{v}$ – векторная физическая величина, равная произведению массы этого тела (материальной точки) на его скорость. *Импульсом системы тел* называется сумма векторов импульсов всех тел этой системы. Силы, действующие между телами системы, называются *внутренними*. Силы, характеризующие воздействие на тела системы тел, не входящих в систему, называются *внешними*.

На основе второго и третьего законов Ньютона может быть доказан *закон сохранения импульса системы тел*: в инерциальной системе отсчета импульс системы тел остается неизменным, если на систему не действуют внешние силы или их векторная сумма равна нулю.

Приблизительно он выполняется и для систем, когда внешние силы конечны, а процессы, происходящие в системе, являются быстрыми и вызваны большими внутренними силами (столкновение тел, взрывы, выстрелы и т. п.). Кроме того, если сумма внешних сил не равна нулю, но проекция суммы внешних сил на выбранную ось равна нулю, то сохраняется проекция импульса системы на эту ось.

На рисунке приведены примеры реальных процессов, в которых закон сохранения импульса системы тел выполняется точно (рис. 5а), приблизительно (рис. 5б) и в проекции на выбранную ось (рис. 5в).

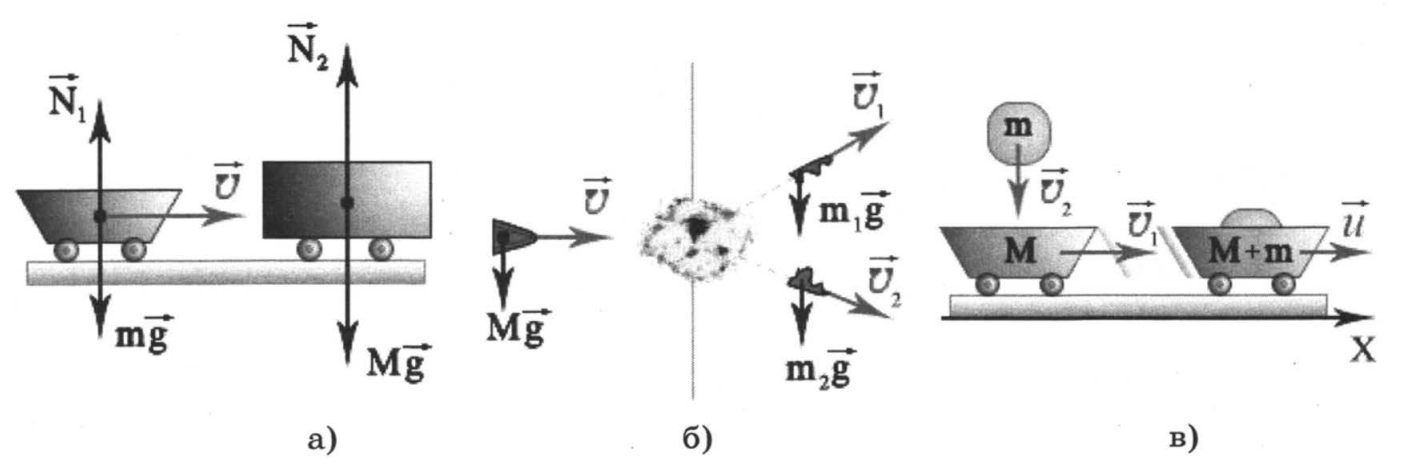


Рис. 5

В случае а) внешними силами являются силы нормальной реакции, действующие на вагоны со стороны рельсов (трением о рельсы пренебрегают) и силы тяжести вагонов. Они попарно уравнивают друг друга, значит сумма внешних сил равна нулю. Аналогично закон сохранения импульса можно применять в случаях когда сталкиваются или разлетаются тела находящиеся на гладком льду, на роликовых коньках или в лодках (считается, что сила трения лодки о воду также мала).

В случае б) где разрывается горизонтально летящий снаряд сумма внешних сил, действующих на куски снаряда и до и после разрыва не равна нулю, так как силу тяжести в этом случае никто не уравнивает. Однако, если расталкивание кусков снаряд происходит за малое время разрыва, то при конечной силе тяжести и большой скорости снаряда изменение импульса будет пренебрежимо мало по сравнению с исходным импульсом системы тел. Поэтому в таких случаях также применяют при решении задач закон сохранения импульса.

В случае в) закон сохранения импульса заведомо не выполняется. До падения камня на тележку его импульс был направлен вертикально, а импульс тележки горизонтально, значит, импульс системы двух тел был направлен вправо – вниз. После взаимодействия и камень, и тележка движутся горизонтально, поэтому импульс системы тел направлен также горизонтально. Поэтому векторы импульса системы тел до и после удар направлены в разных направлениях и не могут равняться друг другу. В этом случае доказывается теорема, согласно которой, если существует ось, проекция суммы внешних сил на которую равна нулю, то проекция импульса системы на эту ось будет сохраняться. В данном случае такой осью является горизонтальная ось, так как все внешние силы действуют оп вертикали и не дают проекций на эту ось. Значит, сумма проекций импульса камня и тележки будет одинакова и до после падения камня. Аналогична ситуация в задачах, когда пушка стреляет под углом к горизонту находясь на железнодорожной платформе, человек стреляет из ружья под углом к горизонту, находясь на лодке, или отбрасывает комок снега под углом, стоя на коньках на льду.

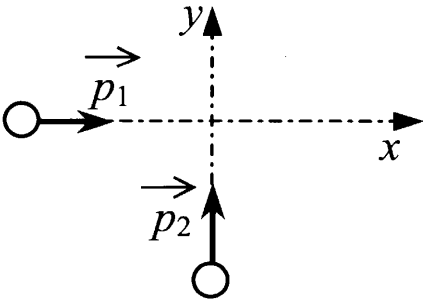
Следует иметь в виду, что импульс тела – векторная физическая величина и его сохранение в случае равенства нулю суммы внешних сил означает выполнение векторного равенства. Например, при взаимодействии двух тел, движущихся в одной плоскости, это означает выполнение двух скалярных уравнений для проекций импульсов одновременно. Примером может служить нецентральный удар бильярдных шаров:

$$\begin{aligned} m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} &= m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x} \\ m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} &= m_1 u_{1y} + m_2 u_{2y} \end{aligned}$$

В дальнейшем для краткости будем использовать аббревиатуру ЗСИ вместо выражения «закон сохранения импульса».

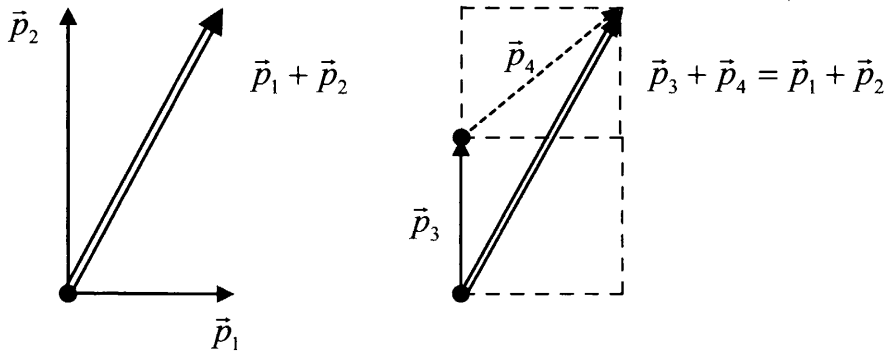
Рассмотрим сначала несколько расчетных задач, которые иллюстрируют ситуации, когда закон сохранения импульса выполняется либо в векторном виде, либо в проекции на одну ось.

Пример 1.30. По гладкой горизонтальной плоскости по осям x и y движутся две шайбы с импульсами, равными по модулю $p_1 = 2 \text{ кг}\cdot\text{м/с}$ и $p_2 = 3,5 \text{ кг}\cdot\text{м/с}$, как показано на рисунке. После соударения вторая шайба продолжает двигаться по оси y



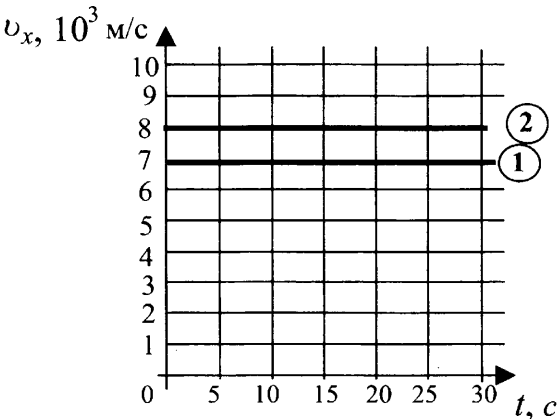
в прежнем направлении с импульсом, равным по модулю $p_3 = 2 \text{ кг}\cdot\text{м/с}$. Найдите модуль импульса первой шайбы после удара.

В данном случае внешние силы действуют в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа, и импульс системы тел направлен под углом к осям x и y и сохраняется в ходе удара. Если нарисовать импульсы тел до и после удара, то станет ясно как рассчитать искомый импульс p_4 .

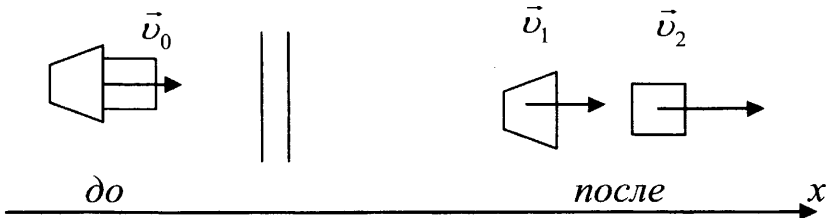


Можно воспользоваться тригонометрическими соотношениями и теоремой косинусов, а можно расчетом проекций искомого вектора. Как ясно из чертежа $p_{4x} = p_1 = 2 \text{ кг}\cdot\text{м/с}$, а $p_{4y} = p_2 - p_3 = 1,5 \text{ кг}\cdot\text{м/с}$. Откуда по теореме Пифагора $p_4 = \sqrt{p_{4x}^2 + p_{4y}^2} = \sqrt{2^2 + 1,5^2} = 2,5 (\text{кг}\cdot\text{м/с})$.

Пример 1.31. На экране монитора в Центре управления полетов отображены графики скоростей двух космических аппаратов после их расстыковки (см. рис.). Масса первого из них равна 10 т, масса второго равна 15 т. С какой скоростью двигались аппараты перед их расстыковкой?



Решение. Сделаем чертеж, внимательно изучая график. На графике приведены проекции скоростей аппаратов на ось x , и раз они имеют одинаковый знак, значит оба аппарата движутся в одном направлении. Значит, импульс системы двух тел после расстыковки направлен вдоль оси x , значит, он направлен туда же и до расстыковки, если импульс сохраняется. Конечно в данном случае, сумма сил, действующих на тела не равен нулю, но, видимо расстыковка происходит почти мгновенно путем расталкивания аппаратов пружиной или после срабатывания небольшого взрывного устройства между ними. Поэтому будем считать, что ЗСИ выполняется и сделаем чертеж



Тогда в векторном виде ЗСИ запишется так

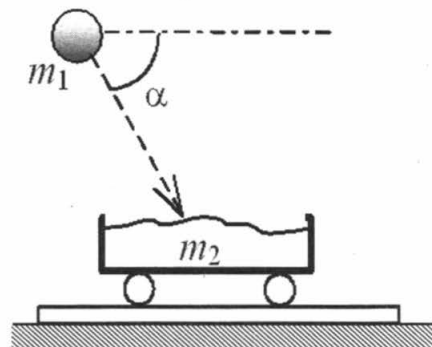
$$(m_1 + m_2)\vec{v}_0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2,$$

А в проекциях на ось x : $(m_1 + m_2)v_{0x} = m_1v_{1x} + m_2v_{2x}$, откуда

$$v_{0x} = \frac{m_1v_{1x} + m_2v_{2x}}{(m_1 + m_2)} = \frac{10000 \cdot 7 \cdot 10^3 + 15000 \cdot 8 \cdot 10^3}{25000} = 7,6 \cdot 10^3 \text{ (м/с)}.$$

Когда на движущуюся тележку падает сверху груз и далее едет вместе с тележкой, импульс системы явно «не сохраняется». В этом случае вектор импульса системы двух тел, равный векторной сумме их импульсов, до удара направлен под углом к горизонту, а после удара вдоль горизонта, то есть явно изменился по направлению. В этом случае следует вспомнить теорему о сохранении проекции импульса системы тел на ось, вдоль которой внешние силы не действуют, то есть сумма проекций внешних сил на которую равна нулю.

Пример 1.32. Камень массой $m_1 = 4$ кг падает под углом 60° к горизонту со скоростью 10 м/с в тележку с песком, покоящуюся на горизонтальных рельсах (см. рисунок). Чему равен импульс тележки с песком и камнем после падения камня?



Внешние силы, действующие на камень (сила тяжести) и на тележку (сила тяжести и сила нормальной реакции рельсов) направлены по вертикали, то есть сумма проекций этих сил на горизонтальную ось равна нулю. Сумма импульсов системы двух тел на эту ось до удара равен проекции импульса камня $p_{1x} = m_1 v \cos \alpha$, так как импульс тележки равен нулю. Значит проекция импульса на горизонтальную ось после удара также равна $p_{1x} = m_1 v \cos \alpha = 4 \cdot 10 \cdot 0,5 = 20 \text{ (кг} \cdot \text{м/с)}$. Так как импульс системы после удара направлен горизонтально, значит его модуль равен проекции на горизонтальную ось.

К заданиям, где закон сохранения импульса выполняется приближенно, следует отнести и задания и о реактивной тяге спутников, в ходе полета которых меняется масса ракеты за счет сгорания топлива, и, кроме того, сумма внешних сил явно не равна нулю, так как сила тяжести действует на ракету и на вылетающие продукты горения топлива постоянно. В этом случае важно, не стать жертвой «горя от ума», то есть применить простейшую модель явления, которая считается доступной школьникам. Задача имеет решение и более точное решение, однако решается в рамках вузовской программы общей физики. В рамках ЕГЭ такое решение не предполагается.

Пример 1.33. На космическом аппарате, находящемся вдали от Земли, начал работать реактивный двигатель. Из сопла ракеты каждую секунду выбрасывается 2 кг газа ($\frac{\Delta m}{\Delta t} = 2 \text{ кг/с}$) со скоростью $v = 500$ м/с. Исходная масса аппарата $M = 500$ кг. Какой будет скорость v_1

аппарата через $t = 6$ с после старта? Начальную скорость аппарата принять равной нулю. Изменением массы аппарата за время движения пренебречь.

Решение. Так как в условии предлагается пренебречь изменением массы за время t после старта, то видимо предполагается, что этот промежуток достаточно мал, чтобы массу ракеты считать постоянной (потери составят 12 кг на фоне 500 кг) с одной стороны, и изменение импульса системы «аппарат + выброшенный газ» за счет воздействия силы тяжести малым, что можно считать закон сохранения импульса для этой системы выполненным.

Тогда с учетом нулевого начального импульса системы тел и массы газа выброшенной за время t : $m = \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot t$ из ЗСИ получим:

$$0 = Mv_1 - mv = Mv_1 - \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot tv$$

$$\text{Откуда } v_1 = \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot \frac{vt}{M} = 12(\text{м/с})$$

Закон сохранения энергии

Обратимся теперь ко второй теореме механики Ньютона – *закону сохранения механической энергии*. Для доказательства этой теоремы вводят понятия *работа силы* и *кинетическая энергия тела*. Работа A постоянной силы $\vec{F}$ – это скалярная физическая величина, равная произведению модуля силы F , модуля перемещения s и косинуса угла между направлениями силы и перемещения (рис. 6).

$$A = Fs \cos \alpha,$$

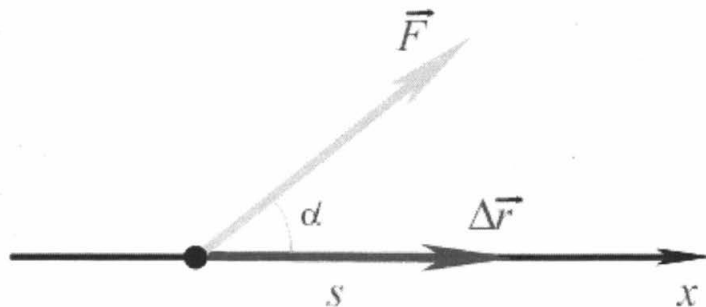


Рис. 6

Единица измерения работы – джоуль ($1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м}$). *Кинетическая энергия* материальной точки – скалярная физическая величина, характеризующая движущееся тело и равная половине произведения ее массы на квадрат ее скорости:

$$E_x = \frac{mv^2}{2}.$$

Единица кинетической энергии в СИ также джоуль (Дж).

Рассчитаем кинетическую энергию, которую приобретет материальная точка под действием постоянной силы F , действующей вдоль направления ее перемещения ($\alpha = 0^\circ$). Если в этом случае под действием силы материальная точка переместилась на расстояние s , то работа силы равна $A = Fs$

Используя кинематические соотношения между скоростью, ускорением, пройденным путем, а также второй закон Ньютона, связывающий ускорение и силу, действующую на материальную точку массой m , можно показать, что

$$A = Fs = mas = ma \cdot \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a} = \frac{mv_2^2 - mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

Таким образом, работа постоянной силы равна изменению кинетической энергии тела. Этот вывод, обобщается и на меняющуюся во времени силу, и на одновременное действие на материальную точку нескольких сил и носит название теоремы об изменении механической энергии: *изменение кинетической энергии материальной точки равно работе всех сил, действующих на нее при переходе из точки 1 в точку 2 траектории.*

Работа силы может быть как положительной, так и отрицательной, так и равной нулю. Это зависит от угла между направлениями перемещения и силы, которая, совершает работу. Поэтому, например, работа силы трения всегда отрицательна ($\alpha=180^\circ$, $\cos 180^\circ=-1$). а работа силы нормальной реакции $\vec{N}$ равна нулю ($\alpha=90^\circ$, $\cos 90^\circ=0$). И изменение кинетической энергии поэтому под действием силы трения отрицательно (тело замедляется), если работа всех остальных сил равна нулю. А изменения кинетической энергии на гладкой горизонтальной плоскости под действием силы нормальной реакции не происходит, если работа всех остальных сил (включая силу трения и силу тяжести) равны нулю.

Работа некоторых сил не зависит от траектории движения тела и может быть вычислена заранее. На основании этого с использованием теоремы об изменении кинетической энергии доказывается теорема о сохранении механической энергии. Так например, можно доказать, что работа постоянной вблизи поверхности Земли силы тяжести не зависит от траектории движения тела и определяется только высотой h относительно некоторого уровня над Землей. $A_{mg}=mgh=mg(h_2-h_1)$, если тело было на высоте h_2 и спустилось до высоты h_1 (относительно выбранного уровня), причем независимо от того, летело оно вертикально вниз, или сначала поднималось, потом опускалось или вовсе летело по дуге параболы. Это позволяет доказать, что

Если тело, двигаясь только под действием силы тяжести из точки 1 в точку 2, которые находятся на высоте h_1 и h_2 (относительно выбранного уровня), то

величина равная $E_{\text{мех}} = mgh + \frac{mv^2}{2}$ и называемая механической энергией тела

сохраняется, то есть в ходе движения, независимо от траектории

$$mgh_1 + \frac{mv_1^2}{2} = mgh_2 + \frac{mv_2^2}{2}.$$

Это и есть формулировка закона сохранения механической энергии в простейшем варианте. Эта величина сохраняется еще в ряде случаев часто встречающихся в задачах: когда тело колеблется на нити и когда тело съезжает с гладкой (без трения) произвольной формы горки (рис. 7). Сохранение механической энергии в этих случаях доказывается также на основании теоремы об изменении кинетической энергии, так как работа всех сил, кроме работы силы тяжести в этих системах равна нулю. Действительно, для шарика на нити работа силы натяжения $\vec{T}$ равна нулю, так как она направлена все время перпендикулярно перемещению шарика. Для гладкой горки работа силы нормальной реакции равна нулю по той же причине. Поэтому в запись теоремы об изменении кинетической энергии в

этих системах войдет только работа силы тяжести, как и в случае движения тела, брошенного под углом к горизонту.

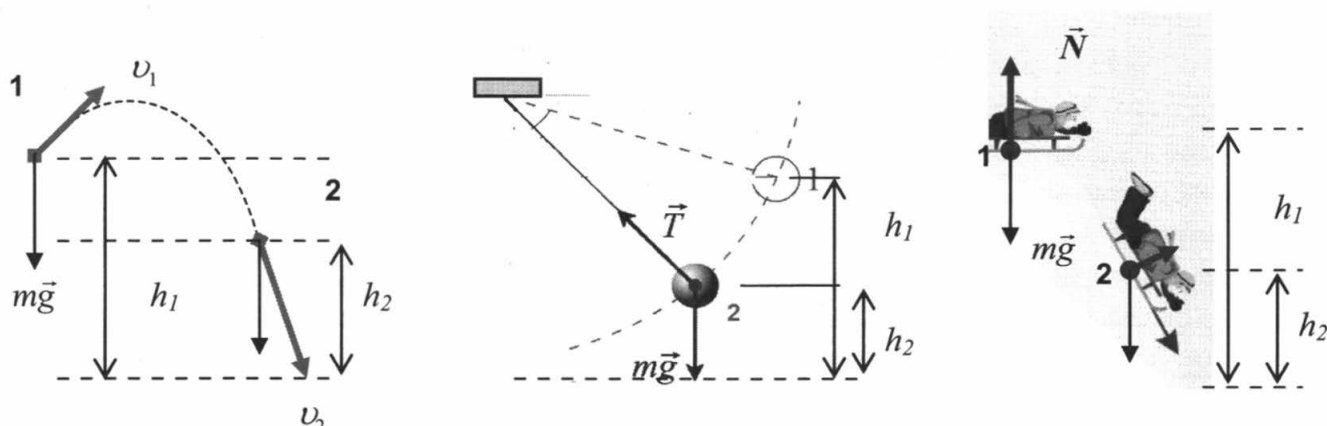
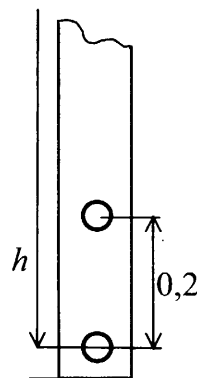


Рис. 7

Величина $E_n = mgh$, входящая слагаемым в механическую энергию тела, называется *потенциальной энергией* тела, поднятого над землей на высоту h (относительно произвольно выбранного начального уровня). Такая энергия вводится для сил, работа которых не зависит от траектории движения тела.

Использование этих соотношений проверяется во многих заданиях с выбором ответа. Рассмотрим только один пример.

Пример 1.34. На рисунке показаны положения свободно падающего шарика через интервалы времени равные $\frac{1}{30}$ с. Масса шарика 0,1 кг. Оцените, пользуясь законом сохранения энергии, высоту, с которой упал шарик.



Решение. Если использовать простейшую модель эксперимента, полагая что приведенные на рисунке 0,2 м он пролетел за $t = \frac{1}{30}$ с, и его средняя скорость на этом промежутке примерно равна мгновенной скорости в конце полета $v_2 \approx \frac{0,2 \cdot 30}{1} \frac{м}{с} = 6 \frac{м}{с}$, то применяя закон сохранения механической энергии для полета с высоты h , получим $mgh + 0 = 0 + \frac{mv_2^2}{2}$. Откуда $h = \frac{v_2^2}{2g} \approx \frac{36}{2 \cdot 9,8} \approx 1,84(м)$. Можно ли решить задачу, не предполагая «равномерного» движения на участке пути равном $\Delta h = 0,2$ м и найдя мгновенную скорость шарика в конце участка длиной h ? Да, можно, если есть время на экзамене. Записав закон сохранения энергии для двух нарисованных положений шарика, получим

$$mg\Delta h + \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2}$$

Добавив к этому выражению связь между скоростями при движении в течение времени $t = \frac{1}{30}$ с ускорением g , получим $v_2 = v_1 + gt$.

Сократив первое уравнение на g и решив систему двух уравнений с двумя неизвестными v_1 и v_2 , получим (полагая $g=9,8 \text{ м/с}^2$) $v_1=5,98 \text{ м/с}$ и $v_2=6,31 \text{ м/с}$. Как и следовало ожидать одна скорость чуть меньше средней, вторая – чуть больше средней скорости 6 м/с . Использование точного значения скорости v_2 в законе сохранения энергии $mgh = \frac{mv_2^2}{2}$, дает значение высоты $h \approx 2,0 \text{ м}$. Если вы решили задачу точно, а она была с выбором ответа и такого ответа нет, то выбираем ближайший к нашему. Заметим, однако, что если бы время между положениями шарика было несколько больше $1/30 \text{ с}$, то расхождения с авторским ответом были бы несколько больше. В этом случае можно дать совет «учитесь понимать других людей» или «вам следует пойти на апелляцию после объявления результатов экзамена».

Еще одной системой, в которой на основании теоремы об изменении кинетической энергии и понятия работа силы можно ввести понятие потенциальной энергии и сформулировать закон сохранения энергии, является груз на пружине, подчиняющийся закону Гука. Если в случае движения тела под действием силы тяжести – рассчитывается работа постоянной по модулю и направлению силы, то в случае груза на пружине, понятие потенциальной энергии в ходе колебания груза вводится на основании расчета работы непрерывно меняющейся силы. В ходе колебания груза постоянно меняется координата конца пружины, на которой колеблется груз, а значит постоянно меняется модуль силы упругости (рис. 8). Как видно из рисунка, после прохождения положения равновесия (когда пружина не сжата и растянута, $x=0$) меняется и направление силы. В ходе такого движения горизонтального маятника силы тяжести груза и реакции опоры уравновешены, движение происходит перпендикулярно этим силам, поэтому и ускорение груза и изменение его кинетической энергии происходит под действием только силы упругости пружины.

Рассчитаем *работу силы упругости пружины* при движении груза вправо от точки А до точки В (рис. 8). Согласно закона Гука

$$F_{\text{упр } x} = -kx.$$

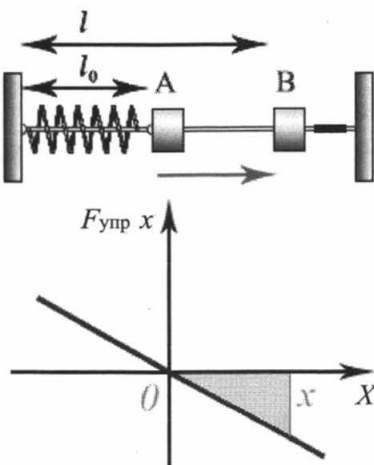


Рис. 8

Работу переменной силы упругости при движении тела лучше всего можно посчитать графически (это площадь заштрихованного треугольника рис. 3):

$$A = -\frac{kx^2}{2},$$

где $x = (l - l_0)$ – растяжение пружины.

Применяя для тела на пружине теорему об изменении кинетической энергии, получим:

$$\frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = A_{AB} = -\frac{kx_B^2}{2}$$

или

$$\frac{mv_B^2}{2} + \frac{kx_B^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2}.$$

Величину $\frac{kx_B^2}{2}$ называют *потенциальной энергией груза на пружине* или *потенциальной энергией пружины*, так как она связана с работой силы упругости.

Выражение

$$\frac{mv_B^2}{2} + \frac{kx_B^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2} + \frac{kx_A^2}{2}$$

рассматривают как закон сохранения полной механической энергии груза на пружине, где $x_A = 0$, т.е. смещение пружины равно нулю.

Аналогично можно показать, что это соотношение выполняется не только при растягивании пружины, но и при ее сжатии, то есть при движении влево от положения равновесия.

При заданной полной механической энергии груза на пружине кинетическая энергия груза, а следовательно, и его скорость, будет максимальна тогда, когда потенциальная энергия минимальна ($x = 0$), и минимальна ($v = 0$) тогда, когда потенциальная энергия максимальна (максимально растяжение пружины).

Закон сохранения полной механической энергии трактуют как изменение кинетической энергии на столько, на сколько меняется потенциальная энергия.

Особенно сложен анализ преобразования различных видов механической энергии друг в друга, когда груз подвешен к вертикальной пружине (вертикальный пружинный маятник), поскольку работу совершает не только сила упругости, но и сила тяжести. Поэтому при рассмотрении перемещения груза из точки A в точку B траектории придется учитывать обе работы. В этом случае используя теорему об изменении кинетической энергии легко показать, что будет сохраняться полная механическая энергия, включающая в точке A кинетическую энергию груза

$\frac{mv_A^2}{2}$, его потенциальную энергию как тела поднятого на высоту h относительно некоторого выбранного уровня mgh_A и потенциальную энергию пружины $\frac{kx_A^2}{2}$, где x_A – полное растяжение пружины в точке A (рис. 9)

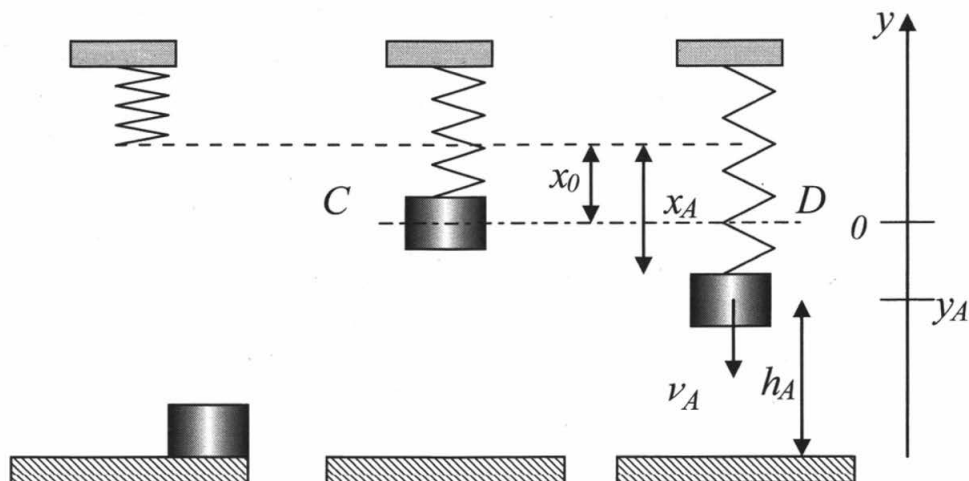


Рис. 9

То есть $\frac{mv^2}{2} + mgh + \frac{kx^2}{2} = E_{\text{мех}} = \text{const}$, если x отсчитывать от положения нерастянутой пружины.

Рассмотрим, например, для вертикального маятника задачу о том, как ведут себя потенциальная энергия пружины, кинетическая энергия груза, его потенциальная энергия в поле тяжести, когда груз движется вверх к положению равновесия.

На рисунке показано положение равновесия покоящегося груза, вокруг которого он колеблется. Если точка А самая нижняя точка траектории, то пружина в ней максимально растянута, значит потенциальная энергия пружины в этой точке максимальна и при движении к точке равновесия ($y = 0$) она может только уменьшаться. Потенциальная энергия груза в поле тяжести увеличивается, так как груз поднимается все выше относительно земли. Сложнее обстоит с анализом изменения кинетической энергии. Для этого следует доказать, что в точке равновесия кинетическая энергия максимальна. Проще всего показать это используя второй закон Ньютона, а не закон сохранения энергии. Точке равновесия определяется условием

$$kx_0 = mg$$

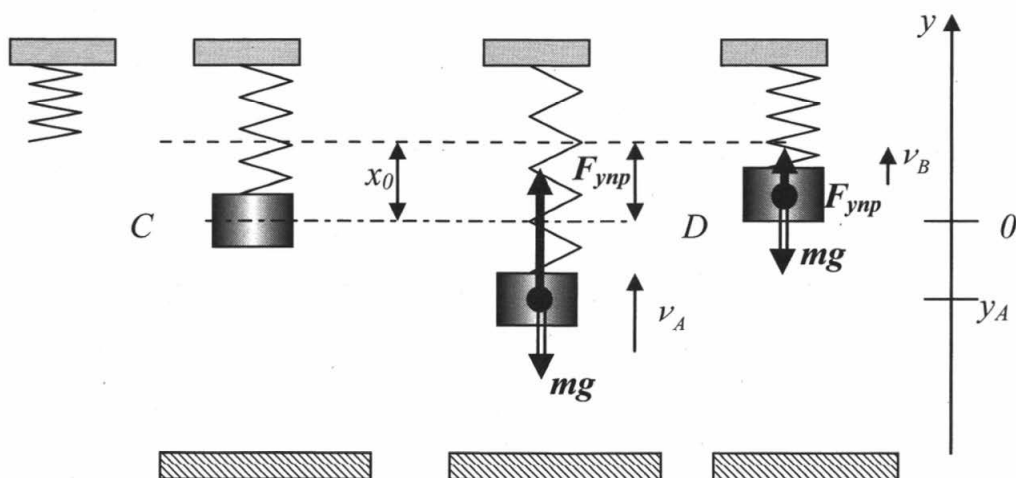


Рис. 10

В точках ниже этой точки пружина растянута сильнее, и сила упругости становится больше mg , то есть равнодействующая двух сил в точках ниже положения равновесия направлена вверх. Поэтому начиная с нижней точки траектории, где

скорость груза равна нулю, груз будет ускоряться вплоть до положения равновесия, поскольку скорость и равнодействующая всех сил и ускорение направлены в одну сторону. Ускорение будет убывать и в точке равновесия станет равным нулю.

Как только груз поднимется выше положения равновесия, сила упругости станет меньше mg , равнодействующая этих двух сил будет направлена вниз (то есть против скорости груза), и груз начнет замедляться, хотя будет еще продолжать двигаться вверх. Пока окончательно не остановится в верхней точке траектории. Поэтому в точке равновесия, скорость груза, а следовательно и его кинетическая энергия достигнут максимума. Значит, при движении груза снизу вверх к точке равновесия его кинетическая энергия возрастает.

Если при движении тела возникают внутренние или внешние силы трения, то работа силы трения приводит к уменьшению механической энергии. Работа силы трения эквивалентна переводу механической энергии во внутреннюю, то есть при трении тел друг о друга увеличивается суммарная кинетическая энергия движения молекул тел относительно их центра. Попросту говоря, трущиеся тела нагреваются, поэтому иногда в задачах «уменьшение механической энергии за счет внешнего или внутреннего трения» называют «выделением количества теплоты» или просто «выделившейся теплотой», что и вовсе является некорректным жаргонным выражением. Поскольку работа силы трения достаточно просто вычисляется $A_{F_{mp}} = F_{mp}s \cos 180^\circ = -F_{mp}s$, а уменьшение механической энергии в точности равно по модулю работе силы трения, то это упрощает решения ряда задач.

Рассмотрим пару примеров.

Пример 1.35. Из пружинного пистолета выстрелили вертикально вниз в мишень, находящуюся на расстоянии 2 м от него. Совершив работу 0,12 Дж, пуля застряла в мишени. Какова масса пули, если пружина была сжата перед выстрелом на 2 см, а ее жесткость 100 Н/м?

Решение. В данной задаче пренебрежем изменением длины пружины в ходе выстрела по сравнению с высотой, на которую переместилась пуля до удара о мишень. Будем считать, что вначале пуля в пистолете покоилась, а пружина была сжата, поэтому энергия системы «пружина+пуля» равнялась потенциальной энергии пружины и потенциальной энергии пули, расположенной на высоте h относительно уровня мишени. Перед ударом о мишень полная механическая энергия этой системы состоит только из кинетической энергии пули. Согласно закону сохранения механической энергии, имеем :

$$\frac{kx^2}{2} + mgh = \frac{mv_1^2}{2}, \quad (1)$$

где v_1 – скорость пули непосредственно перед мишенью.

Пуля при вхождении потеряла кинетическую энергию за счет работы силы трения, поэтому согласно теоремы об изменении кинетической энергии, изменение этой энергии равно работе силы трения. Модуль этой работы «зашифрован» в условии задачи как «работа пули», хотя в физике все-таки чаще говорят о работе силы, а не работе объекта.

$$0 - \frac{mv_1^2}{2} = A_{F_{mp}} < 0 \text{ или}$$

$$\frac{mv_1^2}{2} = -A_{F_{mp}} = A. \quad (2)$$

Решая полученную систему уравнений, находим массу пули:

$$m = \frac{2A - kx^2}{2gh} = 5 \text{ (г)}.$$

Пример 1.36. Лыжник массой 60 кг спустился с горы высотой 20 м. Какой была сила сопротивления его движению по горизонтальной лыжне после спуска, если он остановился, проехав 200 м? Считать, что по склону горы он скользил без трения.

Закон сохранения энергии для спуска с гладкой горы даст

$$mgh = \frac{mv^2}{2}, \quad (1)$$

где v – скорость лыжника сразу после спуска горы.

Изменение механической энергии на горизонтальном участке равно работе силы сопротивления, направленной против перемещения лыжника на расстояние s :

$$0 - \frac{mv^2}{2} = A_{F_{conp}} = -F_{conp}s \quad (2)$$

Решая полученную систему уравнений, получим $mgh = F_{conp}s$, откуда

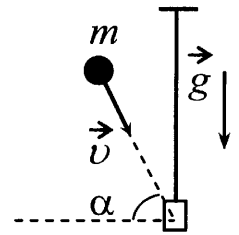
$$F_{conp} = \frac{mgh}{s} = 60(H)$$

Совместное применение закона сохранения импульса и энергии

Более сложны задания, в которых следует одновременно применить и закон сохранения импульса, и закон сохранения энергии. Прежде всего, следует понять, какой из этих законов можно применять на каком из этапов описанного механического процесса.

В заданиях, где требуется использовать закон сохранения импульса, часто используется термин *абсолютно неупругий удар*, который следует трактовать как то, что после удара тела «слипаются», движутся как единой целое. При этом как нетрудно показать, сумма кинетических энергий тел до удара оказывается больше, чем после удара, механической энергии переходит во внутреннюю энергию, соударяющихся тел, они нагреваются. При слипании части тел деформируются, слои двигаясь друг о друга подвергаются внутреннему трению, а наличие силы трения всегда приводит к потере суммарной механической энергии. *Абсолютно упругий удар* – это удар, при котором сохраняется и сумма импульсов соударяющихся тел и сумма их кинетических энергий – не происходит «потери» механической энергии.

Пример 1.37. Доска массой 0,5 кг шарнирно подвешена к потолку на легком стержне. На доску со скоростью 10 м/с налетает пластилиновый шарик массой 0,2 кг и прилипает к ней (см. рисунок). Скорость шарика перед ударом направлена под углом 60° к нормали к доске. Чему равна кинетическая энергия системы тел после соударения?



Текст задачи, конечно, далек от реалий, но надо «понять автора». Судя по рисунку, доска своей длинной стороной расположена в плоскости, перпендикулярной чертежу. В противном случае было бы необходимо учитывать особенности изменения кинетической энергии для движения твердых тел, а не материальных точек. Удар, когда шарик прилипает к доске, и они движутся с одинаковой скоростью, неупругий. Чтобы найти кинетическую энергию после удара, найдем скорость доски с шариком u после удара. Для этого нужно применить «закон сохранения» проекции импульса на горизонтальную ось. Импульс системы тел «шарик – доска» не сохраняется, так как до удара он направлен вправо вниз, а после удар точно вправо. Однако в данном случае горизонтальная ось – эта ось, на которую внешние силы (сила тяжести доски, шарика, сила натяжения нити) дают проекцию равную нулю, значит они не могут изменить проекцию импульса системы на эту ось, поэтому в проекциях на ось x , направленную горизонтально,

$$mv \cos \alpha = (m + M)u$$

так как скорость доски с шариком после удара направлена горизонтально (M – масса доски).

Откуда

$$u = \frac{mv \cos \alpha}{(m + M)},$$

а кинетическая энергия шарика и доски

$$E_k = \frac{(m + M)u^2}{2} = \frac{m^2 v^2 \cos^2 \alpha}{2(m + M)} \approx 0.71 \text{ (Дж)}.$$

Так как удар неупругий, что часть кинетической энергии шара ($E_{k0} = \frac{mv^2}{2} = 10 \text{ Дж}$) перешла во внутреннюю энергию шара и доски, которые нагрелись.

Пример 1.38. Брусок массой $m_1 = 600$ г, движущийся со скоростью 2 м/с, сталкивается с неподвижным бруском массой $m_2 = 200$ г. Какой будет скорость первого бруска после столкновения? Удар считать центральным и абсолютно упругим.

Решение. Термин «центральный удар» означает, что тела столкнулись так, что до удара и после него их скорости направлены вдоль одной и той же линии. Термин «абсолютно упругий удар» означает, что деформации брусков при столкновении были упругими, то есть не было внутренних сил трения и кинетическая энергия системы тел до удара и после нее одинакова, поскольку потенциальная энергия тел при движении по горизонтальной плоскости не меняется. Впрочем... в условии не сказано, что тела расположены на горизонтальной поверхности, однако в задаче мы будем оперировать очень коротким промежутком времени до и после удара, поэтому даже если такое столкновение произошло в воздухе, то тела практически не сдвинулись по

вертикали, поэтому их потенциальная энергия при столкновении не меняется, а сумма кинетических энергий сохраняется. Слово «удар» в условии, позволяет нам использовать и закон сохранения импульса, поскольку даже если бруски сталкиваются в воздухе, силы тяжести их конечны, а время столкновения можно считать очень кратким.

Тогда записав, законы сохранения импульса (в векторном виде) и энергии (в виде сумм кинетических энергий до и после удара) получим.

$$m_1 \vec{v}_1 + 0 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + 0 = \frac{m_1 v'^2_1}{2} + \frac{m_2 v'^2_2}{2}$$

Переписав первое уравнение в проекции на ось, расположенную вдоль начальной скорости первого бруска и учитывая, что удар центральный, получим

$$m_1 v_1 = m_1 v'_{1x} + m_2 v_{2x} \quad (1)$$

Поскольку модули проекций скоростей совпадают с модулями скоростей ($|v'_{1x}| = v'_1$ и $|v'_{2x}| = v'_2$, то закон сохранения энергии можно переписать в виде

$$m_1 v_1^2 = m_1 v'^2_{1x} + m_2 v'^2_{2x} \quad (2).$$

Система уравнений (1) и (2) содержит два неизвестных в виде проекций скоростей брусков после удара. Для решения системы удобно перенести слагаемые, содержащие массу первого бруска в левые части уравнений

$$\begin{cases} m_1(v_1 - v'_{1x}) = m_2 v_{2x} \\ m_1(v_1^2 - v'^2_{1x}) = m_2 v'^2_{2x} \end{cases}$$

Теперь поделив второе уравнение на первое и разлагая разность квадратов на множители получим

$$(v_1 + v'_{1x}) = v_{2x}$$

Остается подставить это выражение для v_{2x} в уравнение (1), чтобы выразить искомую величину:

$$v'_{1x} = \frac{(m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2} = 1 \text{ м / с}$$

Дальнейшее усложнение заданий, в которых одновременно нужно применить и закон сохранения (изменения) механической энергии и импульса идет по пути предварения удара процессом разгона одного из тел и анализом дальнейшего движения тел после удара. В этом случае закон сохранения импульса применяется для установления соотношения скоростей тел до и после удара, а определение скоростей в ходе последующего (или предваряющего удар) движения производится из законов сохранения энергии или ее изменения за счет работы силы трения.

Пример 1.39. От удара копра массой 450 кг, падающего свободно с высоты 5 м, свая массой 150 кг погружается в грунт на 10 см. Определите силу сопротивления грунта, считая ее постоянной, а удар – абсолютно неупругим. Изменением потенциальной энергии сваи пренебречь.

Решение. Тексты некоторых физических задач, предлагаемых на ЕГЭ, содержат технические термины, которые современные ученики слышат впервые. Такие задачи в современные сборники, в том числе и варианты ЕГЭ, попадают по инерции из старых задачников, написанных во времена, когда эти слова были на слуху, были новыми техническими устройствами. В данном случае речь идет о словосочетании «копра, падающего свободно с высоты». Копёр – строительная машина, предназначенная для установки свай. Вместо выражения «копра массой 450 кг» в тексте следует читать «молот копра массой 450 кг», хотя в технике эта падающая на сваю часть копра называется «баба копра».

Для неупругого удара молота массой m_1 , падающего на сваю массой m_2 со скоростью v_1 закон сохранения импульса в проекции на вертикальную ось (если удар происходит быстро и рассматривается скорость v_2 молота со свай сразу после удара, то предположение о сохранении величины импульса системы тел вполне справедливо):

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2$$

Закон сохранения механической энергии, примененный для падения молота с высоты h_1 до точки удара с верхним торцом сваи:

$$m_1 g h_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}$$

Теорема об изменении кинетической энергии молота со свай в ходе остановки за счет действия сил сопротивления грунта F при погружении сваи в грунт на глубину h_2 :

$$-\frac{(m_1 + m_2) v_2^2}{2} = -F_{mp} h_2$$

Решение этой системы из трех уравнений дает ответ:

$$F = \frac{m_1^2 g h_1}{(m_1 + m_2) h_2} \approx 169 \text{ кН}$$

Пример 1.40. Пластилиновый шар массой 0,1 кг имеет скорость 1 м/с. Он налетает на неподвижную тележку массой 0,1 кг, прикрепленную к пружине, и прилипает к тележке (см. рисунок). Чему равна максимальная кинетическая энергия системы при ее дальнейших колебаниях? Трением пренебречь. Удар считать мгновенным.



Решение. Важно понять, что при решении задачи описанный процесс следует разбить на 2 этапа: очень быстрый неупругий удар, при котором сохраняется импульс системы «шар-тележка» (но не сохраняется механическая

энергия) и движение (колебание) системы «шар-тележка», в ходе которого сохраняется механическая энергия системы (сумма кинетической энергии шара с тележкой и потенциальной энергии пружины).

После этого ясно, что закон сохранения импульса при неупругом ударе шара, летящего со скоростью v_1 на покоящуюся тележку, дает возможность вычислить скорость v_2 их совместного движения после удара

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2$$

Учитывая, что первоначально пружина не была сжата или растянута, так как тележка покоилась, можно понять, что в ходе дальнейшего движения к стене кинетическая энергия будет только снижаться и максимальная кинетическая энергия в ходе колебаний – это кинетическая энергия шара с тележкой сразу после удара

$$E_k = \frac{(m_1 + m_2) v_2^2}{2}$$

Подстановка числовых данных дает скорость объектов после удара $v_2 = 0,5$ м/с, и кинетическую энергию $E_k = 0,025$ Дж.

Пример 1.41. Брусок массой $m_1 = 500$ г соскальзывает по наклонной плоскости с высоты $h = 0,8$ м и, двигаясь по горизонтальной поверхности, сталкивается с неподвижным бруском массой $m_2 = 300$ г. Считая столкновение абсолютно неупругим, определите общую кинетическую энергию брусков после столкновения. Трением при движении пренебречь. Считать, что наклонная плоскость плавно переходит в горизонтальную.

Решение. Кинетическая энергия первого бруска перед столкновением определяется из закона сохранения полной энергии при скольжении по гладкой наклонной плоскости:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = m_1 g h.$$

Скорость системы v после удара, определяется из закона сохранения импульса на горизонтальном участке:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v.$$

Кинетическая энергия брусков после столкновения

$$E = \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2}.$$

Из системы уравнений получим:

$$E = \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot m_1 g h = 2,5 \text{ (Дж)}$$

Пример 1.42. Пуля летит горизонтально со скоростью $v_0 = 160$ м/с, пробивает стоящую на горизонтальной шероховатой поверхности коробку и продолжает движение в прежнем направлении со скоростью $\frac{1}{4} v_0$. Масса коробки в 12 раз больше массы пули. Коэффици-

ент трения скольжения между коробкой и поверхностью $\mu = 0,3$. На какое расстояние S переместится коробка к моменту, когда её скорость уменьшится на 20%?

Решение. Процесс следует разбить на два этапа: быстрое пробивание пулей коробки и торможение коробки с шершавую поверхность после получения ею скорости u_0 после вылета пули. Пусть m – масса пули, M – масса коробки. Согласно закону сохранения импульса

$$mv_0 = m \frac{1}{4} v_0 + Mu_0.$$

Так как $M = 12m$, то из этого уравнения следует, что $u_0 = \frac{1}{16} v_0$.

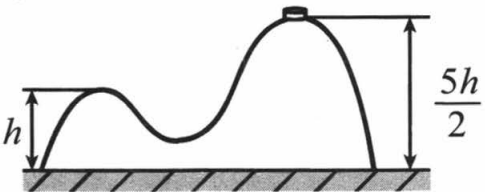
По условию конечная скорость коробки равна $u = 0,8u_0$. Теорема об изменении кинетической энергии за счет работы силы трения, равной на горизонтальной поверхности $F_{тр} = \mu N = \mu mg$ и действовавшей на пути s дает:

$$\frac{Mu^2}{2} - \frac{Mu_0^2}{2} = - \mu Mgs$$

Сокращая на M и подставляя выражения для u и u_0 , получим

$$s = \frac{0,36}{2} \cdot \frac{u_0^2}{\mu g} = \frac{0,36}{2} \cdot \left(\frac{v_0}{16}\right)^2 \cdot \frac{1}{\mu g} = 6 \text{ (м)}.$$

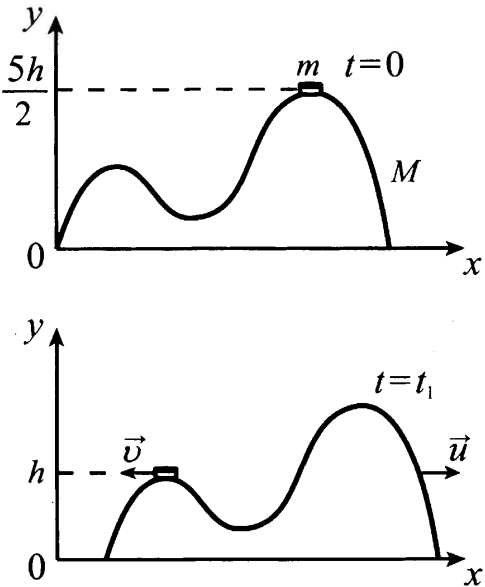
Пример 1.43. На гладкой горизонтальной поверхности стола покоится горка с двумя вершинами, высоты которых h и $\frac{5}{2} h$ (см. рисунок). На правой вершине горки находится шайба. От незначительного толчка шайба и горка



приходят в движение, причём шайба движется влево, не отрываясь от гладкой поверхности горки, а поступательно движущаяся горка не отрывается от стола. Скорость шайбы на левой вершине горки оказалась равной v . Найдите отношение масс шайбы и горки.

Решение. Ясно, что в ходе движения двух тел системы происходит изменение импульса и энергии каждого из тел. Потенциальная энергии шайбы уменьшается, а ее кинетическая энергия и кинетическая энергия горки увеличиваются. Так как второй закон Ньютона при анализе движения и шайбы и горки неприменим (действие силы давления шайбы на горку все время меняет и направление и модуль, то же можно сказать и про силу реакции горки, толкающей шайбу), требуется проанализировать возможность применения законов сохранения.

На систему тел «шайба + горка» действуют внешние силы (тяжести и реакции стола), направленные по вертикали, поэтому проекция



импульса системы на горизонтальную ось Ox системы отсчёта, связанной со столом, сохраняется.

Работа сил реакции равна нулю, так как поверхности и горки и стола гладкие, поэтому полная механическая энергия системы тел также сохраняется. Следует нарисовать два положения системы, для которых будут записываться законы сохранения. В условии задачи фигурируют два положения (рис.), когда шайба на вершине правой горки ($t=0$) и когда она на вершине левой ($t=t_1$).

Сохранения проекции импульса на ось x для перехода из первого состояния во второе дает :

$$0 = Mu - mv.$$

Так как потенциальная энергия горки не меняется, закон сохранения энергии дает

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} + mgh = \frac{5}{2}mgh.$$

Решая систему двух уравнений, получим искомое отношение масс шайбы m и горки M :

$$\frac{m}{M} = \frac{3gh}{v^2} - 1.$$

Пример 1.44. Снаряд, движущийся со скоростью v_0 , разрывается на две равные части, одна из которых продолжает движение по направлению движения снаряда, а другая – в противоположную сторону. В момент разрыва суммарная кинетическая энергия осколков увеличивается за счёт энергии взрыва на величину ΔE . Скорость осколка, движущегося вперёд по направлению движения снаряда, равна v_1 . Найдите массу m осколка.

Решение. При разрыве сохраняется импульс системы, так как внешние силы конечны, а разрыв происходит быстро. Записывая закон сохранения импульса в проекции на ось, направленную вдоль начальной скорости снаряда, и добавляя закон сохранения энергии с учетом вклада в нее энергии сгоревшего порохового заряда, получим:

$$\begin{cases} 2mv_0 = mv_1 - mv_2; \\ mv_0^2 + \Delta E = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}. \end{cases}$$

Здесь v_2 – модуль скорости летящего назад осколка снаряда.

Выражая его из первого уравнения и подставляя во второе (предварительно разделив его на m получаем:

$$\begin{aligned} v_2 &= v_1 - 2v_0 \\ (v_1^2 - 2v_0v_1 + v_0^2) - \frac{\Delta E}{m} &= 0. \end{aligned}$$

Откуда с учетом, что выражение в скобках – это квадрат разности двух величин, получим:

$$m = \frac{\Delta E}{(v_1 - v_0)^2}.$$

Пример 1.45. Начальная скорость снаряда, выпущенного из пушки вертикально вверх, равна 200 м/с. В точке максимального подъема снаряд разорвался на два одинаковых осколка. Первый упал на землю вблизи точки выстрела, имея скорость в 2 раза больше начальной скорости снаряда. До какой максимальной высоты поднялся второй осколок? Соппротивлением воздуха пренебречь.

Решение. В данном случае закон сохранения импульса нужен только для того, чтобы утверждать, что осколки разлетелись с одинаковыми скоростями:

$$0 = mv_1 - mv_2 \Rightarrow v_1 = v_2$$

Далее задача решается с использованием только закона сохранения энергии.

Согласно закона сохранения энергии, для движения снаряда с земли до точки разрыва

$$2mgh = \frac{2mv_0^2}{2}$$

Так как второй осколок на данной высоте имел скорость v_2 , то закон сохранения энергии для его перемещения из этой точки в точку максимального подъема дает:

$$mgh + \frac{mv_2^2}{2} = mgh_{\text{макс}}$$

Для первого осколка, который упал на землю со скоростью v_0 , стартовав на высоте h со скоростью $v_1 = v_2$:

$$mgh + \frac{mv_2^2}{2} = \frac{m(2v_0)^2}{2}$$

Решая систему из 3-х уравнений, получим

$$h_{\text{макс}} = h + \frac{v_2^2}{2g} = \frac{4v_0^2}{2g} = \frac{2v_0^2}{g} = 8000 \text{ м}$$

В заданиях о соударении двух шаров, подвешенных на нитях, или о подвешенном на нити шаре, в который попадает пуля, следует четко представлять, на каких этапах рассматриваемого движения следует применять закон сохранения импульса, а на каком закон сохранения энергии.

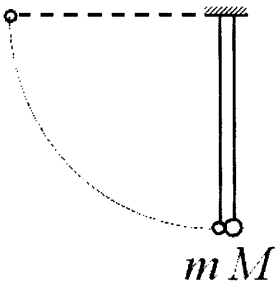
Если речь идет об упругом ударе шаров, то закон сохранения энергии выполняется и на стадии спуска шара, и на стадии соударения, и на стадии подъема разлетевшихся шаров. Закон сохранения импульса применяется на стадии рассмотрения удара в нижней точке траектории, когда нити, на которых висят шары, вертикальны. В этом положении все внешние силы, действующие на систему, направлены вертикально, поэтому проекция импульса системы сталкивающихся тел на горизонтальную ось сохраняется. Но поскольку скорости тел в этом положении направлены горизонтально, можно говорить и просто о законе сохранения импульса не оговаривая, что следует учитывать только проекции импульсов на горизонтальную ось.

Если удар неупругий (сталкиваются пластилиновые шары, пуля пробивает шар или застревает в нем), то для стадии спуска (или подъема) шара (или шаров) на нити можно применить закон сохранения энергии, а для самого удара в нижней

точке траектории можно применять только закон сохранения импульса. Закон сохранения энергии может понадобиться только для расчета доли механической энергии, перешедшей во внутреннюю энергию в ходе неупругого удара или «количества теплоты», выделившейся при ударе.

Рассмотрим пример с упругим и неупругим соударениями.

Пример 1.46. Два шарика, массы которых отличаются в 3 раза, висят, соприкасаясь, на вертикальных нитях (см. рисунок). Легкий шарик отклоняют на угол 90° и отпускают без начальной скорости. Каким будет отношение кинетических энергий тяжелого и легкого шариков тотчас после их абсолютно упругого центрального удара?



Решение. Так как удар упругий, то при ударе применим и закон сохранения механической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{Mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}, \tag{1}$$

и закон сохранения импульса:

$$mv = Mv_1 + mv_{2x} \tag{2}$$

В уравнении записана проекция v_{2x} вектора $\vec{v}_2$, поскольку неясно отлетит легкий шарик или продолжит движение в том же направлении вслед за тяжелым шаром.

Из уравнения (2) с учетом условия $M = 3m$, получаем $v = 3v_1 + v_{2x}$, и подставляя его в (1) приходим к выводу:

$$9v_1^2 + 6v_1v_{2x} + v_{2x}^2 = 3v_1^2 + v_2^2 \text{ или } 6v_1v_{2x} = -6v_1^2 \text{ или } v_{2x} = -v_1,$$

то есть легкий шар, налетев на тяжелый шар отлетит в обратном направлении со скоростью равной скорости тяжелого шара. Раз скорости шаров после удара равны, то их кинетические энергии относятся как массы шаров, следовательно

$$\frac{E_{кин1}(тяжелый)}{E_{кин2}(легкий)} = 3.$$

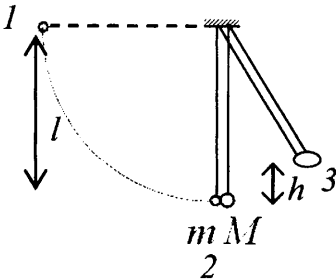
Пример 1.47. Два шарика, массы которых 200 г и 600 г, висят, соприкасаясь, на одинаковых нитях длиной 80 см. Первый шар отклонили на угол 90° ипустили. На какую высоту поднимутся шарики после удара, если этот удар абсолютно неупругий?

Решение. Для полета легкого шарика из точки 1 в точку 2 применяем закон сохранения энергии:

$$\frac{m_1v_1^2}{2} = m_1gl. \tag{1}$$

Для неупругого удара в точке 2 выполняется закон сохранения импульса:

$$m_1v_1 = (m + M)v_2. \tag{2}$$



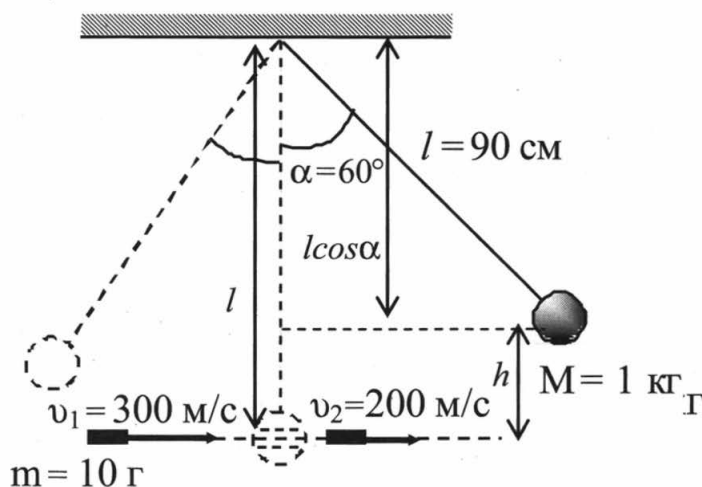
Для подъема слипшихся шариков из точки 2 в точку 3 – опять закон сохранения энергии:

$$\frac{(m_1 + m_2)v_2^2}{2} = (m_1 + m_2)gh \quad (3)$$

Решив систему уравнений (1)-(3) получим $h = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 l = 0,05 \text{ м}$.

Пример 1.48. Шар массой 1 кг, подвешенный на нити длиной 90 см, отводят от положения равновесия на угол 60° и отпускают. В момент прохождения шаром положения равновесия в него попадает пуля массой 10 г, летящая навстречу шару со скоростью 300 м/с. Она пробивает его и вылетает горизонтально со скоростью 200 м/с, после чего шар продолжает движение в прежнем направлении. На какой максимальный угол отклонится шар после попадания в него пули? (Массу шара считать неизменной, диаметр шара – пренебрежимо малым по сравнению с длиной нити.)

Решение. Чертеж поясняющий, этапы процесса, показан на рисунке.



Для спуска шара в нижнюю точку траектории, где будем считать потенциальную энергию шара равной нулю, из точки на высоте h (рис.) применим закона сохранения механической энергии

$$Mgh = \frac{Mu_1^2}{2}. \quad (1)$$

Для процесса пробивания пулей шара применяется закон сохранения импульса:

$$Mu_1 - mv_1 = Mu_2 - mv_2 \quad (2)$$

Знаки выбраны исходя из условия в проекции на ось, направленную влево. По аналогии с применением закона сохранения механической энергии для спуска шара, применим его для подъема шара на высоту h_2 с отклонением нити на угол β после вылета пули:

$$\frac{Mu_2^2}{2} = Mgh_2. \quad (3)$$

Таким образом, решая систему из трех уравнений (1)-(3), записанную на основании законов сохранения энергии и импульса можно ответить на вопрос задачи.

Из (1) находится скорость шара в нижней точке до попадания пули:

$$u_1 = \sqrt{2gh}.$$

Из (2) определяется скорость шара в нижней точке, сразу после вылета пули:

$$u_2 = u_1 + \frac{m}{M}(v_2 - v_1)$$

Из (3) выражается высота $h_2 = \frac{u_2^2}{2g}$

Учитывая геометрические соотношения, показанные на рисунке, высоты h_1 и h_2 выражаются через начальный и искомый угол отклонения нити в точке до попадания пули:

$$h = l(1 - \cos\alpha) \text{ и } h_2 = l(1 - \cos\beta)$$

Совокупное использование этих выражений приводит к соотношению:

$$\cos\beta = 1 - \frac{u_2^2}{2gl} = 1 - \frac{1}{2gl} \left\{ \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)} + \frac{m}{M}(v_2 - v_1) \right\}^2 = \frac{7}{9},$$

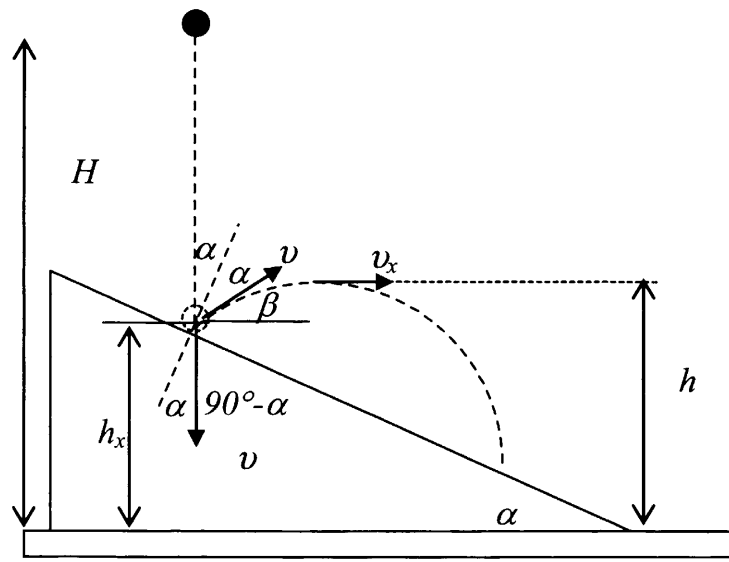
или $\beta = \arccos(7/9) \approx 39^\circ$

Совместное использование законов сохранения с уравнениями кинематики и законами Ньютона

Рассмотрим пару примеров, где уравнения, записываемые с использованием закона сохранения энергии при движении тела, дополняются для получения ответа уравнениями кинематики.

Пример 1.49. С высоты H над землёй начинает свободно падать стальной шарик, который через время $t = 0,4$ с сталкивается с плитой, наклонённой под углом 30° к горизонту. После абсолютно упругого удара он движется по траектории, верхняя точка которой находится на высоте $h = 1,4$ м над землёй. Чему равна высота H ? Сделайте схематический рисунок, поясняющий решение.

Решение. Схема полета шарика показана на рисунке. Термин «упругое отражение» в данной задаче означает, что после удара о плоскость шарик отражается с той же по модулю скоростью, при этом угол между вектором скорости и плоскостью (или перпендикуляром к ней) при отскоке равен углу между вектором скорости после отражения и плоскостью (или перпендикуляром к ней). Как видно из рисунка, угол между перпендикуляром к плоскости в точке падения и скоростью равен $\alpha = 30^\circ$. Тогда угол между вектором скорости после отражения и горизонтом равен $\beta = (90^\circ - 2\alpha) = 30^\circ$



Модуль скорости перед и после столкновения с плитой скорость равен

$$v = gt = 4 \text{ м / с}.$$

После соударения шарик движется как тело, брошенное со скоростью v под углом $\beta = 30^\circ$. Как известно горизонтальная составляющая скорости $v_x = v \cos \beta$ при таком полете (свободное падение, сила тяжести и ускорение тела направлены вертикально).

Так как при упругом ударе шарик меняет только направление движения, а кинетическая энергия шарика сохраняется, его механическая энергия в течение всего полета (от верхней точки на высоте H до удара и от удара до полета в точку на высоте h) остаётся постоянной. Считая потенциальную энергию у поверхности земли равной нулю из закона сохранения механической энергии получим

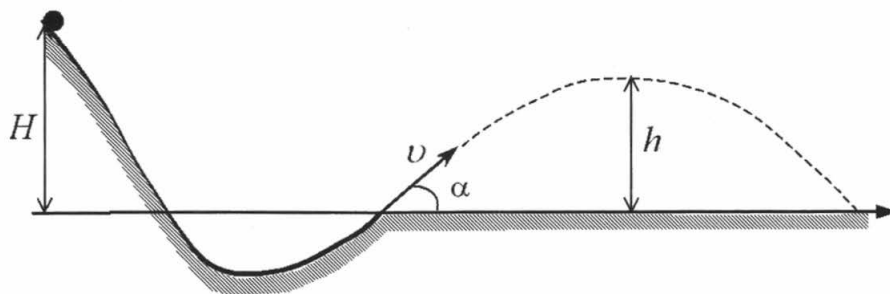
$$mgH = \frac{mv^2}{2} + mgh_1 = \frac{mv_x^2}{2} + mgh$$

Учитывая $v_x = v \cos \beta$ получим

$$gH = \frac{v_x^2}{2} + gh = \frac{v^2 \cos^2 \beta}{2} + gh$$

Откуда $H = h + \frac{v^2 \cos^2 \beta}{2g}$. Учитывая полученные выше значения $v = 4 \text{ м / с}$ и $\beta = 30^\circ$, получим $H = 2 \text{ м}$.

Пример 1.50. При выполнении трюка «Летающий велосипедист» гонщик движется по трамплину под действием силы тяжести, начиная движение из состояния покоя с высоты H (см. рисунок). На краю трамплина скорость гонщика направлена под таким углом к горизонту, что дальность его полета максимальна. Пролетев по воздуху, гонщик приземляется на горизонтальный стол, находящийся на той же высоте, что и край трамплина. Какова высота полета h на этом трамплине? Сопротивлением воздуха и трением пренебречь.



Решение. Будем решать задачу, считая гонщика материальной точкой, а его полет свободным падением с начальной скоростью, направленной под углом α к горизонту и равной по модулю v .

Модуль начальной скорости определяется из закона сохранения энергии для спуска по трамплину высоты H

$$\frac{mv^2}{2} = mgH, \text{ откуда } v = \sqrt{2gH}.$$

Дальность полета определяется из выражения $s = \frac{2v^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v^2}{g} \sin 2\alpha$ (см. стр. 10, время полета $t_{\text{пол}}$ можно определить как время t через которое

координата тела $y(t) = 0 + v_0 \sin \alpha \cdot t + a_y \frac{t^2}{2}$ станет равной нулю, если начальная координата y_0 равнялась нулю, проекция ускорения на вертикальную ось $a_y = g$. Дальность полета, умножив горизонтальную составляющую начальной скорости $v_0 \cos \alpha$ на $t_{\text{пол}}$). Это выражение достигает максимального значения $\frac{v^2}{g}$ при условии $\sin 2\alpha = 1$, т.е. при $\alpha = 45^\circ$.

Высота полета $h = \frac{v^2}{2g} \sin^2 \alpha$ (находится из времени подъема до точки, где вертикальная составляющая скорости равняется нулю $t_{\text{под}} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$ см и значения координата тела $y(t) = 0 + v_0 \sin \alpha \cdot t + a_y \frac{t^2}{2}$ при $t = t_{\text{пол}}$ см. стр. 10)

достигает значения $h_{\text{макс}} = \frac{v^2}{4g} = \frac{2gH}{4g} = \frac{H}{2}$.

Пример 1.51. На краю стола высотой $h = 1,25$ м лежит пластилиновый шарик массой $m = 100$ г. На него со стороны стола налетает по горизонтали другой пластилиновый шарик, имеющий скорость $v = 0,9$ м/с. Какой должна быть масса второго шарика, чтобы точка приземления шариков на пол была дальше от стола, чем заданное расстояние $L = 0,3$ м? (Удар считать центральным.)

Решение. Для неупругого столкновения двух шариков закон сохранения импульса в проекции на горизонтальную ось направленную по скорости движения налетающего шарика:

$$Mv = (m + M)u. \quad (1)$$

После удара шарики движутся как единое тело, брошенное горизонтально с высоты h .

Время полета такого тела, согласно законам свободного падения (находится приравниванием нулю координаты $y(t) = y_0 + v_0 \sin \alpha \cdot t + a_y \frac{t^2}{2}$ при $y_0 = h$, $v_0 = 0$ и $a_y = g$, см. стр.10)

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (2)$$

За это время оно сместится по горизонтали на расстояние

$$L = ut. \quad (3)$$

Решая систему уравнений (1) – (3), получим:

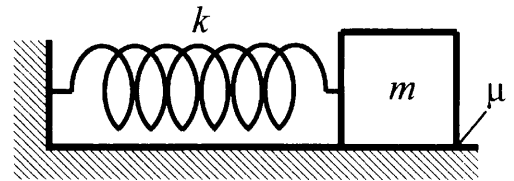
$$M = \frac{m}{\left(\frac{v}{L} \sqrt{\frac{2h}{g}} - 1 \right)},$$

откуда получаем искомый результат:

$$M > \frac{m}{\left(\frac{v}{L} \sqrt{\frac{2h}{g}} - 1 \right)} \approx 0,2 \text{ кг}$$

Максимально сложными задачами по механике являются задачи, в которых совместно следует использовать и законы сохранения энергии и импульса, и законы Ньютона, а иногда и уравнения кинематики. Хотя выше было сказано, что законы сохранения доказаны для того, чтобы их использовать в задачах, где нельзя напрямую использовать законы Ньютона, иногда это оказывается просто удобным, а иногда и просто необходимым. Рассмотрим несколько примеров.

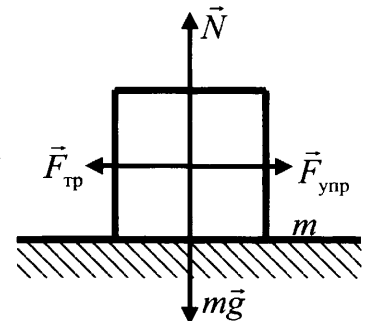
Пример 1.52. К одному концу лёгкой пружины жёсткостью $k = 100 \text{ Н/м}$ прикреплен массивный груз, лежащий на горизонтальной плоскости, другой конец пружины закреплён неподвижно (см. рисунок). Коэффициент трения груза по плоскости $\mu = 0,2$. Груз смещают по горизонтали, растягивая пружину, затем отпускают с начальной скоростью, равной нулю. Груз движется в одном направлении и затем останавливается в положении, в котором пружина уже сжата. Максимальное растяжение пружины, при котором груз движется таким образом, равно $d = 15 \text{ см}$. Найдите массу m груза.



Решение. Начнем анализ задачи с конца. Найдём максимальное сжатие пружины b , при котором груз ещё покоится на столе при сжатой пружине. На груз действуют силы, показанные на рисунке (сама пружина не показана). Видно, что силу упругости уравновешивает сила трения покоя. При максимальном сжатии пружины, согласно закона Гука и закона сухого трения (с учетом $N=mg$) получим:

$$kb = \mu mg$$

Отсюда $b = \frac{\mu mg}{k}$.



При движении груза из крайне правого положения, когда пружина растянута на d , до крайне левого положения когда она сжата на b , действует сила трения, поэтому изменение механической энергии системы тел «груз + пружина» равно работе силы трения скольжения. Поскольку в двух крайних положениях груз покоится, его кинетическая энергия равна нулю, потенциальная энергия груза связанная с притяжением Земли не меняется на горизонтальном столе и механическая энергия системы тел состоит только из потенциальной энергии сжатой пружины. Значит

$$\frac{kb^2}{2} - \frac{kd^2}{2} = -\mu mg(d+b) \text{ или}$$

$$\frac{k(b^2 - d^2)}{2} = -\mu mg(d+b)$$

Учитывая, что слева в уравнении разность квадратов и $(d+b) \neq 0$, приходим после сокращения на $(d+b)$ к уравнению:

$$\frac{k}{2}(b-d) = -\mu mg.$$

Так как $\frac{\mu mg}{k} = b$, оно преобразуется к виду:

$$b-d = -2b.$$

Откуда, $d = 3b = \frac{3\mu mg}{k}$. Это позволяет найти искомую массу груза

$$m = \frac{kd}{3\mu g} = 2,5 \text{ кг.}$$

Пример 1.53. На гладкой горизонтальной плоскости находится длинная доска массой $M = 2$ кг. По доске скользит шайба массой $m = 0,5$ кг. Коэффициент трения между шайбой и доской $\mu = 0,2$. В начальный момент времени скорость шайбы $v_0 = 2$ м/с, а доска покоится. Сколько времени потребуется для того, чтобы шайба перестала скользить по доске?



Решение. Прежде всего, следует понять, из каких соображений можно найти искомое время. Чем характеризуется этот момент времени, когда шайба перестанет двигаться относительно доски? Это момент времени, когда оба тела начнут двигаться как единой целое со скоростью v .

В ходе движения шайба замедляет свой ход относительно земли, а доска ускоряется, причем ускорение направлено горизонтально. Это ускорение происходит под действием нескольких сил, однако все силы, кроме силы трения, действующей со стороны шайбы, направлены вертикально. Значит

$$\text{ускорение доски равно } a_M = \frac{F_{mp}}{M}.$$

Зная ускорение доски, ее начальную скорость (равна нулю) и конечную (равна v) можно будет найти время. Для этого нужно найти силу трения и скорость v .

Чтобы найти силу трения, действующая на доску со стороны шайбы, надо вспомнить третий закон Ньютона. Если шайба действует на шайбу с силой трения, то доска действует на шайбу с такой же по модулю, но противоположно направленной силой трения. Поскольку шайба скользит по доске, силу трения, действующую на шайбу можно вычислить по закону сухого трения

$$F_{mp} = \mu N$$

Применив второй закон Ньютона для шайбы в проекции на вертикальную ось, мы получим $N = mg$. Тогда $F_{mp} = \mu mg$.

Приходим к выводу, что и доска ускоряется под действием силы трения равной по модулю $F_{mp} = \mu mg$

Тогда применив второй закон Ньютона уже к доске получим, что сумма проекции всех сил, действующих на нее, на вертикальную ось равна нулю. На горизонтальную ось единственная сила трения дает проекцию равную μmg и $\mu mg = Ma$

Значит доска движется с ускорением $a = \mu \frac{m}{M} g$.

Осталось определить какой скорости она достигает, до момента времени, когда шайба перестает скользить относительно. В этом может помочь закон сохранения импульса.

В данном примере нет традиционного столкновения двух тел, при котором обычно вспоминается закон сохранения импульса. Однако следует обратить внимание, что внешние силы, действующие на систему тел «доска – шайба», направлены по вертикали и в сумме равны нулю. Поэтому для системы тел «доска – шайба» в системе отсчета, связанной с землей может быть применен закон сохранения импульса. Система «шайба-доска» чем-то напоминают систему «пуля и ящик на льду», когда пуля застревает в ящике. Только в одном случае мы имеем дело с «внешним» трением, закономерно-сти которого мы знаем, а во втором случае с «внутренним» трением. Пуля, в конечном итоге перестает двигаться относительно ящика (застревает в нем), то есть начинает двигаться с ящиком как единое целое.

Осталось понять для каких моментов времени записать импульс системы. Очевидно для тех, когда он может быть вычислен и для тех которые требуются для решения задачи. Первому критерию удовлетворяет начальный момент времени, когда шайба движется, а доска еще нет. Импульс системы тел будет равен для этого момента времени mv_0 . Второй момент времени – это когда шайба перестала скользить по бруску, что означает, что оба тела движутся с одинаковой скоростью v . Тогда закон сохранения импульса дает:

$$mv_0 = mv + Mv$$

Откуда $v = \frac{mv_0}{m + M}$. Это позволяет вычислить время процесса ускорения доски до скорости v .

$$\tau = \frac{v}{a} = \frac{Mv}{\mu mg} = \frac{Mmv_0}{\mu mg(M + m)} = \frac{Mv_0}{\mu g(M + m)} = 0,8(c)$$

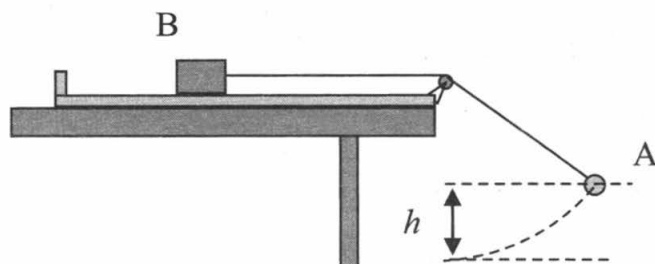
Наибольшие затруднения возникают, когда законы сохранения и Ньютона надо применить к неравномерному движению по окружности. В этих задачах предполагается, что ученик знает, что при движении по окружности второй закон Ньютона трактуется так:

в момент времени, когда материальная точка движется по окружности радиуса R неравномерно и имеет скорость v , сумма проекции всех сил на ось направленную вдоль радиуса окружности равна произведению массы материальной точки

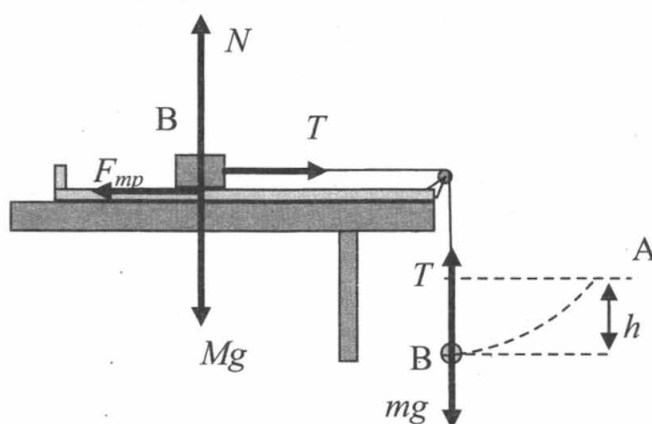
m на центростремительное ускорение $a_{\text{цс}} = \frac{v^2}{R}$, а сумма проекций сил на ось, направленную по касательной к окружности равна произведению массы точки на тангенциальное ускорение $a_{\text{т}}$. А векторная сумма этих взаимно перпендикулярных ускорений равна векторной сумме всех сил, поделенной на массу точки.

Выделенную курсивом часть формулировки второго закона Ньютона для неравномерного движения по окружности и нужно применять при решении задач ЕГЭ, подобно приведенным ниже.

Пример 1.54. В установке, изображённой на рисунке, грузик *A* соединён перекинутой через блок нитью с бруском *B*, лежащим на горизонтальной поверхности трибометра, закреплённого на столе. Грузик отводят в сторону, приподнимая его на высоту *h*, и отпускают. Длина свисающей части нити равна *L*. Какую величину должна превзойти масса грузика, чтобы брусок сдвинулся с места в момент прохождения грузиком нижней точки траектории? Масса бруска *M*, коэффициент трения между бруском и поверхностью μ . Трением в блоке, а также размерами блока пренебречь.



Решение. Чтобы брусок сдвинулся с места, нужно, чтобы сила, действующая на него со стороны нити, превысила максимальной силы трения покоя:



$$T > F_{\text{тр. макс.}}, \quad T > \mu Mg.$$

Для нахождения силы натяжения нити используем второй закон Ньютона для грузика в нижнем положении. Хотя грузик движется неравномерно, в проекции на вертикальную ось, идущую вдоль радиуса окружности, по которой движется грузик, второй закон дает :

$$T - mg = ma_{\text{цс}} = \frac{mv^2}{L} \quad (1)$$

Для перехода грузика из точки *A* в точку *B* можно применить закон сохранения механической энергии:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} \quad (2)$$

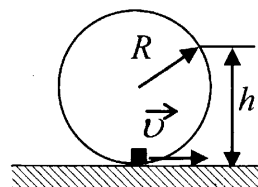
Выразив из (2) $mv^2 = 2mgh$ и подставив в (1) получим:

$$T = \frac{mv^2}{L} + mg = \frac{2mgh}{L} + mg = mg \left(\frac{2h}{L} + 1 \right) > \mu Mg$$

Откуда искомая масса $m > \frac{\mu M}{\frac{2h}{L} + 1}$.

В банке заданий ЕГЭ встречаются и задачи, где выражение для центростремительного ускорения $a_{uc} = \frac{v^2}{r}$, выводимое в школьном курсе для равномерного движения по окружности используется для описания для неравномерного движения по такой траектории. В курсах углубленного изучения физики рассматривается такой тип движения и показывается, что полное ускорение тела в этом случае можно представить как сумму двух векторов: нормального ускорения $\vec{a}_n$, направленного по радиусу и модуль которого как раз равен $a_n = a_{uc} = \frac{v^2}{r}$ (v – мгновенная скорость в данный момент времени в данной точке окружности), и тангенциального ускорения $\vec{a}_\tau$, направленного по касательной к окружности. Нормальное ускорение показывает «темп поворота» вектора скорости при движении по окружности, а тангенциальное ускорение «темп увеличения модуля» вектора скорости. Разберем ряд таких задач, раз они встречаются в банке сложных заданий ЕГЭ.

Пример 1.55. Небольшая шайба после толчка приобретает скорость $v = 2$ м/с и скользит по внутренней поверхности гладкого закреплённого кольца радиусом $R = 0,14$ м. На какой высоте h шайба отрывается от кольца и начинает свободно падать?



Решение. Так как трения нет, выполняется закон сохранения энергии при переходе шайбы из нижней точки кольца в точку отрыва:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + mgh \quad (1)$$

В момент отрыва на шайбу действует только сила тяжести. Однако шайба еще движется по окружности. В соответствии со вторым законом Ньютона в системе отсчета, связанной со столом, проекция силы тяжести на ось, направленную вдоль радиуса окружности, по которой движется шайба, равна произведению ее массы на ее центростремительное ускорение $a_{uc} = \frac{u^2}{R}$:

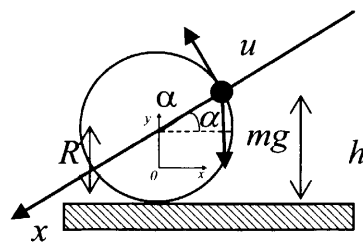
$$ma_{uc} = mg \sin \alpha$$

$$\frac{u^2}{R} = g \sin \alpha \quad (2)$$

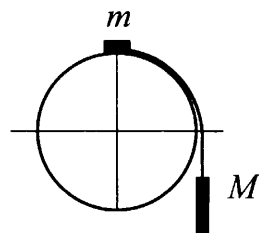
Учитывая, что $\sin \alpha = \frac{h-R}{R}$, из (1) и (2) получим:

$$v^2 = g(h-R) + 2gh.$$

Отсюда $h = \frac{R}{3} + \frac{v^2}{3g} \approx 0,18(\text{м})$.

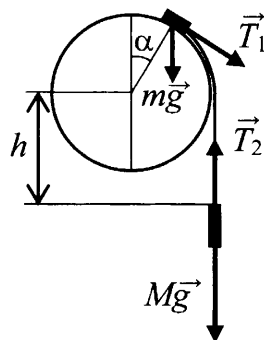


Пример 1.56. Система из грузов m и M и связывающей их лёгкой нерастяжимой нити в начальный момент покоится в вертикальной плоскости, проходящей через центр закреплённой сферы. Груз m находится в точке А на вершине сферы (см. рисунок). В ходе возникшего движения груз m отрывается от поверхности сферы, пройдя по ней дугу 30° . Найдите массу M , если $m = 100$ г. Размеры груза m ничтожно малы по сравнению с радиусом сферы. Трением пренебrecь. Сделайте схематический рисунок с указанием сил, действующих на грузы.



Решение. Так как трения нет, в систему отсчёта, связанной с Землёй, инерциальной механическая энергия системы этих грузов сохраняется.

Используя его, найдём модуль скорости груза m в точке его отрыва от поверхности сферы. За нуль отсчета потенциальной энергии примем горизонтальную плоскость, проходящую через центр окружности. В начальном состоянии груз M находится ниже центра сферы на величину h_0 и его потенциальная энергия отрицательна. Скорости связанных грузов в момент отрыва и в любой иной момент движения равны. В начальный момент времени грузы не двигались. Положение грузов в момент отрыва показаны на рисунке, легкий груз находится на высоте $R\cos\alpha$ относительно центра окружности.



До отрыва грузы проходят путь равный $h - h_0 = R\frac{\pi}{6}$, где h – высота нижнего груза, отсчитанная вниз от центра окружности.⁶ Закон сохранения энергии тогда запишется как

$$mgR - Mgh_0 = \frac{mv^2}{2} + mgR\cos\alpha + \frac{Mv^2}{2} + Mg(-h),$$

Отсюда
$$v = \sqrt{\frac{2gR \left[m(1 - \cos\alpha) + M\frac{\pi}{6} \right]}{m + M}}.$$

Условие отрыва груза m от сферы – отсутствие силы реакции на груз. При этом груз m все еще ещё движется по окружности радиусом R , но уже не давит на сферу. Сила $\vec{T}_1$ направлена по касательной к сфере, поэтому его центростремительное ускорение вызвано только силой тяжести. Проекция силы тяжести на ось, идущую вдоль радиуса сферы в этот момент времени согласно второго закона Ньютона:

$$mg\cos\alpha = ma_{\text{уч}} = m\frac{v^2}{R}.$$

Подставляя сюда значение v , найденное выше, получим

отсюда
$$\frac{2}{m + M} \left[m(1 - \cos\alpha) + M\frac{\pi}{6} \right] = \cos\alpha,$$

$$M = \frac{m(3\cos\alpha - 2)}{\frac{\pi}{3} - \cos\alpha} = 0,1 \cdot \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2}{\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 0,33(\text{кг})$$

Понимание закономерностей свободных колебаний *математического* и *пружинного* маятников и умение работать с уравнением их движения (уравнение гармонических колебаний – зависимость смещения тела от положения равновесия x от времени $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$) часто проверяется в ЕГЭ в заданиях с выбором ответа, хотя среди этих заданий встречаются и достаточно сложные.

В заданиях, требующих развернутого ответа, груз, колеблющийся на нити или на пружине, на самом деле используются для проверки умений описывать законы сохранения энергии в ходе таких колебаний.

Однако в открытом банке ЕГЭ есть несколько сложных заданий, в которых упоминаются гармонические колебания.

В уравнении гармонических колебаний $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$, входит величина $\omega = \frac{2\pi}{T}$, связанная с периодом колебаний T . Для груза на нити, если колебания происходят только под действием силы тяжести и натяжения нити, период колебаний определяется длиной нити и ускорением свободного падения

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Для пружинного маятника, как горизонтального, так и вертикального (рис. 11) период колебаний определяется массой груза и жесткостью пружины, к которой этот груз прикреплен,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

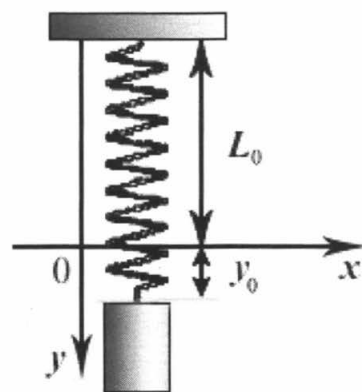
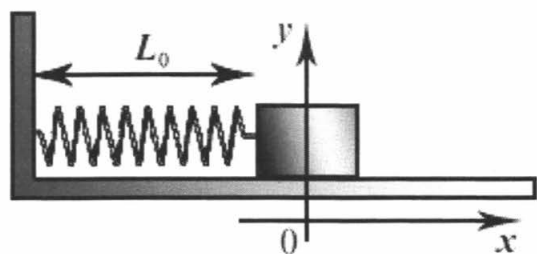


Рис. 11

Для обоих типов маятников доказывается, что такая зависимость параметров свободных колебаний от характеристик, составляющих колебательной системы, возможна тогда и только тогда, когда при отклонении от положения равновесия груза на x , равнодействующая всех сил, действующих на груз, оказывается пропорциональной этому отклонению и направлена в сторону точки равновесия.

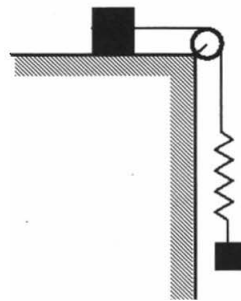
Для пружинного маятника это условие выполнено в силу закона Гука $F_x = -kx$ для математического маятника (малый груз на длинной нити) в силу малости угла отклонения (малые колебания). При этом один конец пружины или один конец нити должен оставаться неподвижным в инерциальной системе отсчета.

В заданиях с развернутым ответом предполагается понимание условий, при которых колебания являются гармоническими, и использование аналогий между

двумя типами механических маятников, которые движутся по гармоническому закону.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1.57. Брусок, покоящийся на горизонтальном столе, и пружинный маятник, состоящий из грузика и легкой пружины, связаны легкой нерастяжимой нитью через идеальный блок (см. рисунок). Коэффициент трения между основанием бруска и поверхностью стола равен 0,3. Отношение массы бруска к массе грузика равно 8. Грузик маятника совершает колебания с частотой 2 Гц вдоль вертикали, совпадающей с вертикальным отрезком нити. Какова максимально возможная амплитуда этих колебаний, при которой они остаются гармоническими?



Решение. Введем обозначения:

M – масса верхнего груза;

m – масса нижнего груза;

k – жесткость пружины маятника;

A – амплитуда колебаний пружинного маятника;

ν – частота колебаний пружинного маятника;

μ – коэффициент трения между верхним грузом и столом;

В положении равновесия нижнего груза удлинение пружины $x_0 = \frac{mg}{k}$, период колебаний вокруг этого положения равновесия, если колебания гармонические, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Значит $k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} \approx 4,9 \left(\frac{H}{м}\right)$.

Колебания нижнего груза будут гармоническими, если

- 1) верхний груз и верхний конец пружины остаются неподвижными;
- 2) нижний груз не переходит с состояние свободного полета, сжав пружину и ослабив нить так, что сила ее натяжения равна нулю.

Условие неподвижности верхнего груза: максимальная сила натяжения нити меньше максимальной силы трения между столом и верхним грузом.

Сила натяжения нити максимальная, когда максимальна сила натяжения пружины, то есть нижний груз находится в крайнем нижнем положении в ходе колебаний, то есть отклонился от положения равновесия (когда удлинение пружины x_0) на максимальное расстояние (когда удлинение пружины $x_0 + A$). По закону Гука:

$$T_{\max} = k(x_0 + A) = mg + kA.$$

Максимальная сила трения верхнего груза о стол по закону сухого трения

$$F_{\text{тр_макс}} = \mu N = \mu Mg. \text{ Значит груз не сдвинется, если } \mu Mg > mg + kA$$

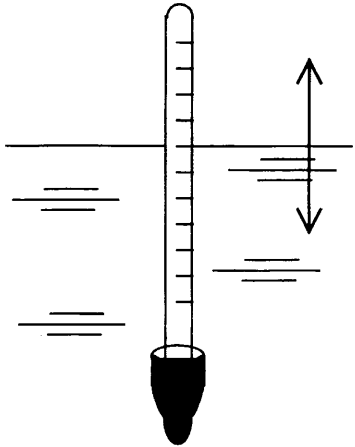
$$\text{Отсюда } A < \frac{g}{k}(\mu M - m) = \frac{gT^2}{4\pi^2 m}(\mu M - m) \approx 0,089(м) \approx 8,9(см).$$

Из второго условия следует, что в крайнем верхнем положении грузика, когда удлинение пружины равно $x_0 - A$, пружина не растянута, но не сжата, т.е. $T_{\min} = k(x_0 - A) = 0$, откуда

$$A \leq x_0 = \frac{mg}{k} = \frac{mgT^2}{4\pi^2 m} = \frac{gT^2}{4\pi^2} \approx 0,063(м) \approx 6,3(см)$$

Ясно, что более строгим требованием является условие $A < 6,3 \text{ см}$, при котором с места сдвинется верхний груз.

Пример 1.58. Ареометр, погруженный в жидкость, совершает вертикальные гармонические колебания с малой амплитудой (см. рисунок). Найдите период этих колебаний. Масса ареометра равна 40 г, радиус его трубки 2 мм, плотность жидкости 0,8 г/см³. Соппротивлением жидкости пренебречь.



Решение. Когда груз массой m висит на пружине жесткости k , то силы уравновешены, растяжение пружины $x_0 = \frac{mg}{k}$ и при отклонении вниз от положения от равновесия на x , возникает «возвращающая» рав-

нодействующая сила $k(x+x_0)-mg = kx$, пропорциональная жесткости пружины и отклонению. Период гармонических колебаний, возникающих под действием такой силы пропорционален корню из массы груза и обратно пропорционален жесткости пружины $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Если доказать, что на ареометр массой M при отклонении от положения равновесия действует сила пропорциональная отклонению, то по аналогии можно считать коэффициент пропорциональности жесткостью «водяной пружины» и период вычислять по той же формуле. Условие равновесия ареометра (полый трубки с грузом) – равенство архимедовой силы силе тяжести.

$$F_A = Mg$$

$$\rho g V_0 = Mg,$$

где V_0 – объем подводной части, состоящей из груза, который все время под водой и трубки, которая находится частично под водой и объем подводной части которой при колебаниях меняется. M – масса ареометра.

При увеличении погружения трубки на x , объем подводной части увеличивается на Sx ($S = \pi D^2/4 \approx 1,26 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$ – площадь круглого сечения трубки), соответственно, возрастает выталкивающая сила, при неизменной силе тяжести. Поэтому на ареометр в этом положении действует равнодействующая (возвращающая в положение равновесия) сила

$$F = \rho g(V_0 + Sx) - Mg = \rho g V_0 - Mg + \rho g Sx = \rho g Sx$$

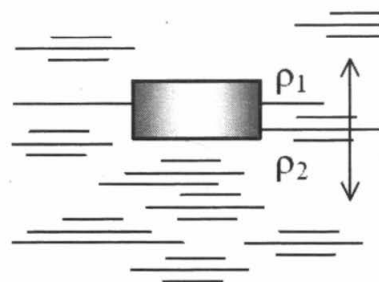
Значит, величина $\rho g S$ аналогична величине жесткости пружины k при отклонении груза на пружине от равновесия. Значит, период колебаний будет равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{\rho g S}} \approx 4 \text{ (с)}$$

Столь большая величина периода свидетельствует о том, что числовые данные в условии далеки от реальных.

Пример 1.59. Однородный цилиндр с площадью поперечного сечения 10^{-2} м^2 плавает на границе несмешивающихся жидкостей с плотностью 800 кг/м^3 и 1000 кг/м^3 (см. рисунок). Пренебрегая сопротивлением жидкостей, определите массу цилиндра, если период его малых вертикальных колебаний

$$\frac{\pi}{5} \text{ с.}$$



Решение. В состоянии равновесия цилиндра $F_A = Mg$, а архимедова сила на границе двух жидкостей равна силе тяжести жидкостей в объеме цилиндра, то есть $F_A = (\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2)g$

где V_1 и V_2 – объемы цилиндра в разных жидкостях. То есть

$$(\rho_1 S x_1 + \rho_2 S x_2)g = Mg$$

При смещении цилиндра на x вниз архимедова сила изменяется и становится равной

$$F_A = (\rho_1 S(x_1 - x) + \rho_2 S(x_2 + x))g$$

Тогда равнодействующая этой силы и силы тяжести равна

$$F = F_A - Mg = (\rho_1 S x_1 - \rho_1 S x + \rho_2 S x_2 + \rho_2 S x)g - Mg = (\rho_1 S x_1 + \rho_2 S x_2)g - Mg + \rho_2 S x - \rho_1 S x = (\rho_2 - \rho_1) S x$$

Аналогично можно показать, что при смещении цилиндра от положения равновесия вверх на x возникает «возвращающая» сила

$$F_x = -(\rho_2 - \rho_1) g S x.$$

Поскольку эта сила пропорциональна смещению x , период малых собственных колебаний цилиндра можно найти из аналогии с колебанием пружинного маятника с пружиной жесткости k , для которого отклонения от положения равновесия на x также возникает «возвращающая сила» $F_x = -kx$, в соответствии с законом Гука. Период колебаний пружинного маятника

$T = 2\pi\sqrt{m/k}$, значит период колебаний цилиндра

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{(\rho_2 - \rho_1) g S}}$$

Откуда искомая масса

$$m = \frac{T^2 (\rho_2 - \rho_1) g S}{4\pi^2} = 0,2 \text{ (кг)}$$

Основные положения и уравнения молекулярно-кинетической теории, газовых законов и термодинамики проверяются в ЕГЭ в виде заданий с выбором. Задания с развернутым ответом, связанные с содержанием данного раздела физики, сочетают, в основном, понимание того, что в современной физике молекулярно-кинетическая теория и термодинамика представляют собой единую науку. Кроме того, элементы знаний этого раздела физики, могут сочетаться с пониманием законов механики, электродинамики, квантовой и ядерной физики. В данной главе мы рассмотрим только задания, основанные на содержании собственно МКТ, термодинамики и механики. Остальные будут рассмотрены в главах 3 и 4.

Уравнение Менделеева – Клапейрона

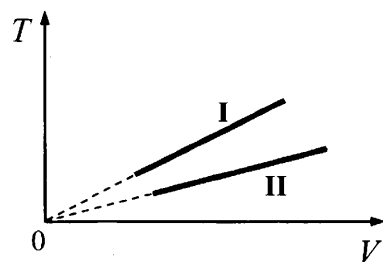
Первый класс сложных заданий этого раздела использует понимание уравнения Менделеева – Клапейрона, как функциональной зависимости между параметрами газа. Фактически уравнение $pV = \frac{m}{M}RT = \nu RT$ рассматривается как возможность создания функций зависимости одного параметра от другого и анализа графиков этих функций. Например, если реализован процесс в котором параметры V , m , M постоянны также как газовая постоянная $R=8,31$ Дж/моль·К, то можно говорить о давлении, как функции температуры $p(T) = A \cdot T$, где $A = \frac{mR}{MV}$ постоянный коэффициент, как коэффициент k функции $y=kx$. Понимание этого позволяет ко всем заданиями этого типа подходить одинаково и использовать знания, полученные на уроках математики при построении графиков функций. Заданий, в которых достаточно знать только уравнение Менделеева – Клапейрона в открытом банке заданий, требующих развернутого ответа относительно немного.

Пример 2.1 На рисунке изображены графики двух процессов, проведённых с идеальным газом при одном и том же давлении. Графики процессов представлены на рисунке. Почему изобара I лежит выше изобары II? Ответ поясните, указав, какие физические закономерности вы использовали для объяснения.

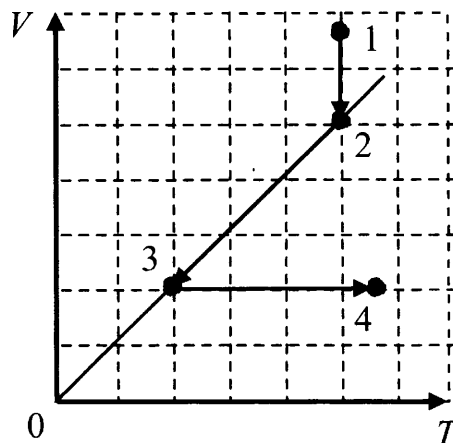
Решение. Уравнение Менделеева – Клапейрона: $pV = \nu RT$, где ν – число молей газа при описания изобарного расширения идеального газа I и газа II ($p = const$) позволяет сделать вывод, что при одинаковых давлении и объёме для газов должно выполняться соотношение

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\nu_2}{\nu_1}.$$

Из рисунка видно, что при одинаковых объёмах газов $T_1 > T_2$. Поэтому $\nu_1 < \nu_2$



Пример 2.2. На V - T -диаграмме показано, как изменялись объём и температура некоторого постоянного количества разреженного газа при его переходе из начального состояния 1 в состояние 4. Как изменялось давление газа p на каждом из трёх участков 1–2, 2–3, 3–4: увеличивалось, уменьшалось или же оставалось неизменным? Ответ поясните, указав, какие физические явления и закономерности вы использовали для объяснения.



Решение. На участке 1–2 процесс изотермический. По уравнению Менделеева – Клапейрона

$$pV = \nu RT = \text{const},$$

значит, при уменьшении объёма давление увеличивается.

На участке 2–3 процесс изобарный; значит, давление остаётся неизменным.

На участке 3–4 процесс изохорный. По уравнению Менделеева – Клапейрона

$$\frac{p}{T} = \frac{mR}{MV} = \text{const},$$

то есть при увеличении температуры давление увеличивается.

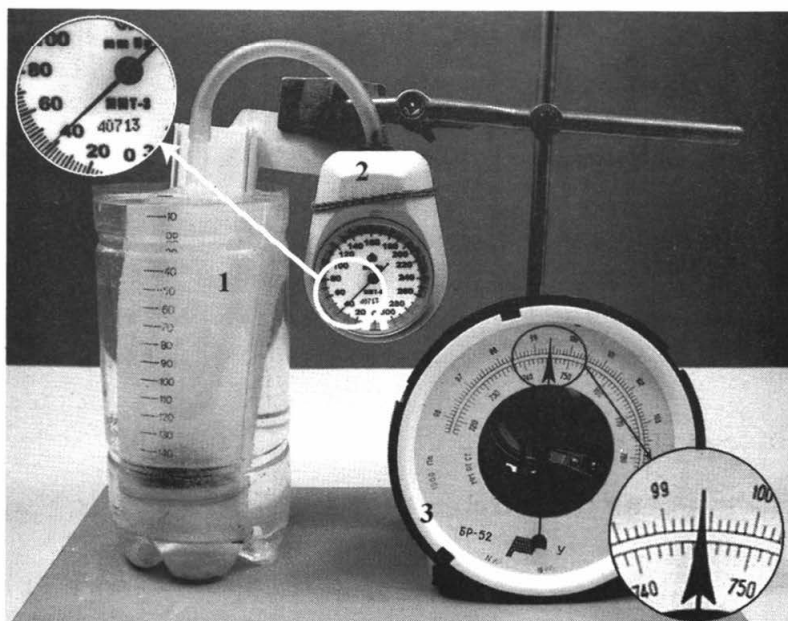
Поэтому можно утверждать, что 1) на участке 1–2 давление газа увеличивалось, на участке 2–3 не изменялось, на участке 3–4 увеличивалось

Пример 2.3. Три одинаковых сосуда, содержащих разреженный газ, соединены друг с другом трубками малого диаметра: первый сосуд – со вторым, второй – с третьим. Первоначально давление газа в сосудах было равно соответственно p , $3p$ и p . В ходе опыта сначала открыли и закрыли кран, соединяющий второй и третий сосуды, а затем открыли и закрыли кран, соединяющий первый сосуд со вторым. Как изменилось в итоге (уменьшилось, увеличилось или осталось неизменным) количество газа в первом сосуде? (Температура газа оставалась в течение всего опыта неизменной.)

Решение. В соответствии с законом Дальтона и уравнения Клапейрона–Менделеева, применённого к парциальным давлениям газов во втором и третьем сосудах, суммарное давление этих газов после закрывания второго крана равно $3p/2 + p/2 = 2p$.

Аналогично этому давление в первом и втором сосудах после закрывания первого крана равно $p/2 + 2p/2 = 1,5p$. Это означает, согласно уравнению Клапейрона–Менделеева, что количество газа в первом сосуде в итоге увеличилось.

Пример 2.4. При исследовании состояния газа ученик соединил сосуд (1) объемом 150 мл с манометром (2) тонкой трубкой и опустил сосуд в горячую воду (см. рисунок). Определите температуру горячей воды. Начальная температура газа 20°C , начальное показание манометра равно 0 мм рт.ст. Шкала манометра и нижняя шкала барометра (3) проградуированы в мм рт.ст. Верхняя шкала барометра проградуирована в кПа. Объём измерительного механизма манометра и соединительной трубки значительно меньше 150 мл.



Решение.

Барометр показывает исходное давление воздуха $p_1 = 99400$ Па.

Манометр показывает избыточное давление над исходным $\Delta p = 44$ мм.рт.ст.

Для перевода в СИ нужно использовать соотношение 1 мм.рт.ст. = $133,322$ Па.

То есть $\Delta p = 44 \cdot 133,322$ Па = 5866 Па.

Значит давление в манометре $p_2 = 99400$ Па + 5866 Па = 105266 Па.

Начальная температура $T_1 = 20^\circ\text{C} = 293\text{K}$.

Так как объем сосуда и число молей газа в нем неизменны, то записав уравнение Менделеева – Клапейрона для двух температур и поделив одно на другое, получим

$$p_1 V = \nu R T_1$$

$$p_2 V = \nu R T_2$$

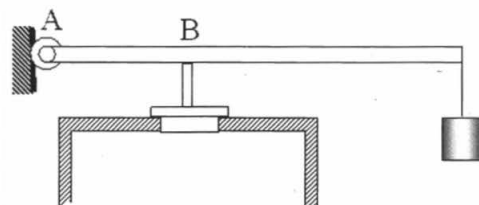
$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

$$\text{Тогда } T_2 = T_1 \frac{p_2}{p_1} = 293 \cdot \frac{105226}{99400} \approx 310\text{K} = 37^\circ\text{C}$$

Уравнение Менделеева – Клапейрона и Механика

В большом числе заданий, требующих развернутого ответа, использование уравнения Менделеева-Клапейрона сочетается со знаниями по механике. Рассмотрим, например, задание, требующее использование законов статики (равновесие протяженных твердых тел, в частности рычагов).

Пример 2.5. В цилиндр объемом $0,5$ м³ насосом закачивается воздух со скоростью $0,002$ кг/с. В верхнем торце цилиндра есть отверстие, закрытое предохранительным клапаном. Клапан удерживается в закрытом состоянии стержнем, который может свободно поворачиваться вокруг оси в точке А (см. рисунок). К свободному концу стержня подвешен груз массой 2 кг. Клапан открывается через 580 с работы насоса, если в начальный момент времени давление воздуха в цилиндре было равно атмосферному. Площадь закрытого клапаном отверстия $5 \cdot 10^{-4}$ м², расстояние АВ равно $0,1$ м. Температура воздуха в цилиндре и снаружи не меняется и равна 300 К. Определите длину стержня, если его считать невесомым.



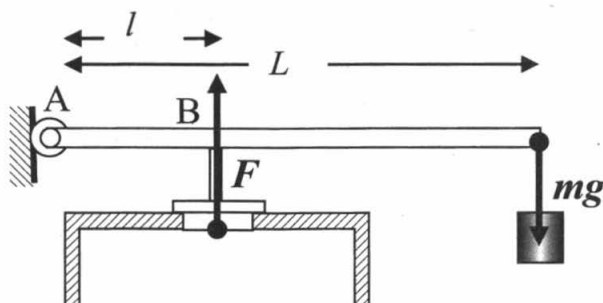
Решение. Клапан откроется, когда стержень начнет подниматься вверх. Для этого момент силы натяжения нити (по модулю равна mg), на которой висит груз на конце стержня, сравняется с моментом избыточной силы F давления воздуха на клапан изнутри цилиндра (избыточный над силой воздействия атмосферы снаружи клапана). Если превышение давления воздуха в цилиндре над атмосферным Δp , а площадь клапана S , то

$$F = S \cdot \Delta p.$$

Равенство моментов сил, действующих на рычаг и вращающих его в противоположных направлениях относительно оси А (рис.).

$$mg \cdot L = Fl = S \cdot \Delta p \cdot l,$$

где L и l соответственно длина стержня и длина его участка АВ.

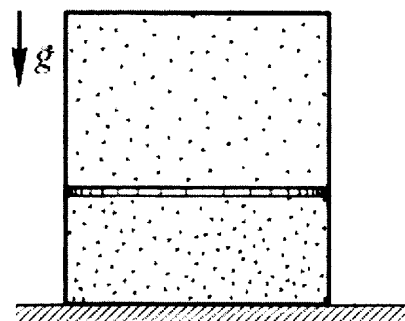


Дополнительное давление воздуха определяется увеличением массы Δm_v воздуха в цилиндре. Согласно уравнению Клапейрона-Менделеева, $\Delta p = \frac{\Delta m_v}{MV} RT$, где M — молярная масса воздуха. Если насос закачивает каждую секунду w кг воздуха, то масса закачанного за время t воздуха $\Delta m_v = wt$. Следовательно, клапан откроется через время t , если будет выполнено равенство

$$L = \frac{lSRT\Delta m_v}{mgMV} = \frac{lSRTwt}{mgMV} \approx 0,5 \text{ (м)}$$

Механическое равновесие поршней, являющихся подвижными перегородками между разными частями сосуда требуют записи равенства нулю суммы всех сил, действующих на поршни, то есть использования законов Ньютона. Ситуация, когда газ является телом, действующим на твердое тело, первоначально кажется непривычной. Однако общность подхода ко всем объектам, в конечном итоге, уменьшает число следствий из базовых законов, которые нет необходимости запоминать, если все время использовать основные законы. Например, законы Бойля-Мариотта, Шарля и Гей-Люссака представляют для нас лишь историческую ценность, они все объединены в один фундаментальный закон — уравнение Менделеева-Клапейрона.

Пример 2.6. Стоящий вертикально цилиндрический закрытый сосуд высотой 1 м разделен на две части невесомым, скользящим без трения тонким поршнем. На какой высоте установится поршень, если в верхней части сосуда находится гелий, а в нижней — кислород? Массы газов в обеих частях равны. Силу тяжести можно не учитывать.



Условия равновесия поршня равенство сил, действующих на него со стороны газов и силы тяжести поршня. Для невесомого поршня — это условие эквивалентно равенству давлений газов снизу и сверху

$$p_{He} = p_{O_2} = p$$

Массы газов одинаковы

$$m_{He} = m_{O_2} = m$$

Температуры, хотя об этом в условии напрямую не говорится, видимо, тоже одинаковы, поскольку длительное стояние сосуда в комнате должно привести температуры газов к комнатной температуре

$$T_{He} = T_{O_2} = T$$

Выразим из уравнения Менделеева – Клапейрона объем каждого из газов:

$$p = \frac{m}{V_{He} M_{He}} RT \Rightarrow V_{He} = \frac{mRT}{pM_{He}}$$

$$p_{O_2} = \frac{m_{O_2}}{M_{O_2}} RT \Rightarrow V_{O_2} = \frac{mRT}{pM_{O_2}}$$

Тогда отношение объемов равно отношению расстояний от крышки и от дна сосуда будет равно

$$\frac{V_{He}}{V_{O_2}} = \frac{M_{O_2}}{M_{He}} \Rightarrow \frac{h_{He}}{h_{O_2}} = \frac{M_{O_2}}{M_{He}}$$

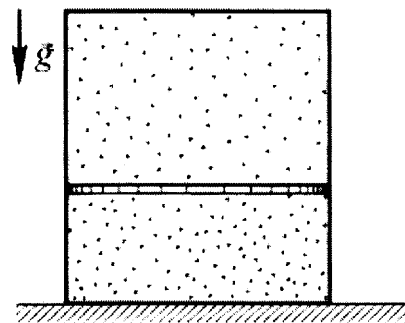
Общая высота цилиндра

$$H = h_{He} + h_{O_2} = h_{O_2} \frac{h_{He}}{h_{O_2}} + h_{O_2} = h_{O_2} \left(1 + \frac{h_{He}}{h_{O_2}}\right) = h_{O_2} \left(1 + \frac{M_{O_2}}{M_{He}}\right).$$

Тогда искомая высота

$$h_{O_2} = \frac{H}{\left(1 + \frac{M_{O_2}}{M_{He}}\right)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{32 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-3}}\right)} = \frac{1}{9} \approx 0,11 \text{ (м)}$$

Пример 2.7. Вертикально расположенный замкнутый цилиндрический сосуд высотой 50 см разделен подвижным поршнем весом 110 Н на две части, в каждой из которых содержится одинаковое количество идеального газа при температуре 361 К. Сколько молей газа находится в каждой части цилиндра, если поршень находится на высоте 20 см от дна сосуда? Толщиной поршня пренебречь.



Решение. Уравнения Менделеева – Клапейрона для газа в верхней и нижней частях:

$$\begin{aligned} p_1 V_1 &= \nu RT, \\ p_2 V_2 &= \nu RT, \end{aligned} \quad (1)$$

где V_1 и V_2 – объемы верхней и нижней частей.

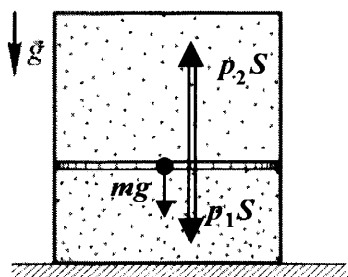
Объемы связаны с площадью S сечения поршня:

$$V_1 = S(H - h), V_2 = Sh, \quad (2)$$

где H – высота сосуда, h – высота, на которой находится поршень.

Сила воздействия газов на верхнюю и нижнюю плоскость поршня связана с давлением газа в соответствующем объеме $F=pS$. Условия равновесия поршня (рис.) равенство сил, действующих на него со стороны газов и силы тяжести поршня:

$$p_1S + mg - p_2S = 0 \quad (3).$$

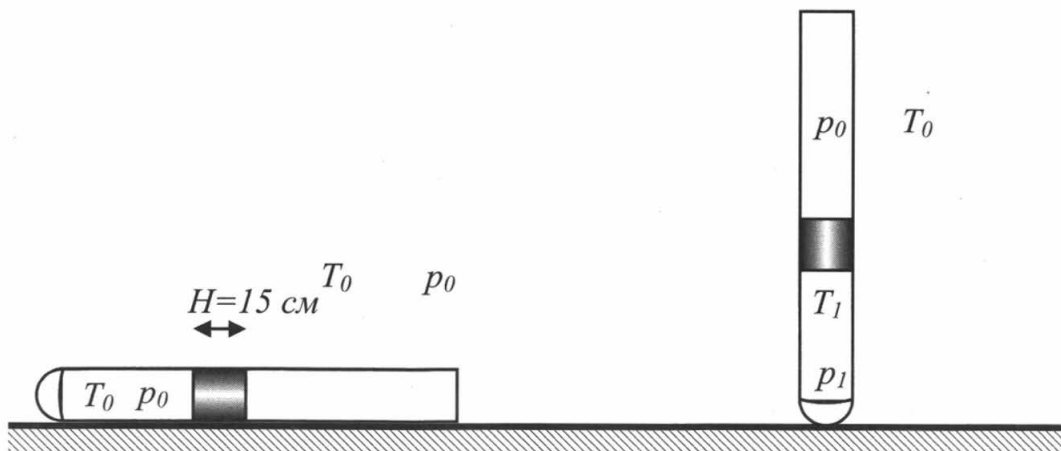


Подставляя выражения (1) в (3) с учетом (2), получим для количества молей газа

$$\nu = \frac{mg}{RT \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{H-h} \right)} \approx 0,022 \text{ (моль)}$$

Пример 2.8. В горизонтально расположенной трубке постоянного сечения, запаянной с одного конца, помещен столбик ртути длиной 15 см, который отделяет воздух в трубке от атмосферы. Трубку расположили вертикально запаянным концом вниз и нагрели на 60 К. При этом объем, занимаемый воздухом, не изменился. Давление атмосферы в лаборатории – 750 мм рт.ст. Какова температура воздуха в лаборатории?

Решение. Столбик ртути выполняет роль весомого поршня, без трения движущегося по трубке (см. *Пример 2.7*). Давление и температура столба воздуха в пространстве между запаянным дном горизонтальной трубки и столбиком ртути равны атмосферным (p_0 , T_0 , см рис.).



В вертикальной трубке столбик ртути опустился бы ниже ко дну, если бы воздух в трубке не подогрели до температуры T_1 , за счет чего давление там возросло до p_1 .

Можно записать второй закон Ньютона для столбика ртути, на который снизу давит горячий воздух с силой p_1S , сверху атмосфера с силой p_1S , кроме того Земля тянет столбик вниз с силой тяжести равной $mg = \rho Vg = \rho H S g$. Равновесие столбика ртути в вертикальной трубке тогда запишется как:

$$p_1 S = p_0 S + \rho g H S, \text{ или } p_1 = p_0 + \rho g H.$$

Атмосферное давление равное 750 мм.рт. ст, можно тоже выразить как давление столба ртути высотой $h=750 \text{ мм}=0,75 \text{ м}$, то есть

$$p_0 = \rho g h$$

Поскольку нагревание воздуха в трубке происходит на $\Delta T=60 \text{ К}$ до температуры $T_1 = T_0 + \Delta T$ и первоначального объема V_0 , то по уравнению Клапейрона-Менделеева:

$$p_0 V_0 = \nu R T_0$$

$$p_1 V_0 = \nu R (T_0 + \Delta T)$$

Поделив одно уравнение на другое, получим:

$$\frac{T_0 + \Delta T}{T_0} = \frac{p_1}{p_0} = \frac{p_0 + \rho g H}{p_0} = 1 + \frac{\rho g H}{p_0} = 1 + \frac{\rho g H}{\rho g h} = 1 + \frac{H}{h}.$$

Тогда $1 + \frac{\Delta T}{T_0} = 1 + \frac{H}{h}$ Откуда

$$T_0 = \Delta T \frac{h}{H} = 300 \text{ (K)}.$$

В задачах, связанных с воздухоплаванием (воздушные шары, аэростаты, детские воздушные шарики), естественно, требуется, помимо уравнения Менделеева – Клапейрон, использовать и закон Архимеда

Пример 2.9. Воздушный шар с газонепроницаемой оболочкой массой 400 кг заполнен гелием. Он может удерживать в воздухе на высоте, где температура воздуха 17°C , а давление 10^5 Па , груз массой 225 кг. Какова масса гелия в оболочке шара? Считать, что оболочка шара не оказывает сопротивления изменению объема шара.

Решение. Шар с грузом удерживается в равновесии при условии, что сумма сил, действующих на него, равна нулю:

$$(M + m)g + m_z g - F_A = 0,$$

где M и m — массы оболочки шара и груза, $m_z = \rho_z g V$ — масса гелия в шаре объемом V , а $F_A = \rho_e V g = m_e g$ — сила Архимеда, действующая на шар при плотности воздуха снаружи шара ρ_e формально равна силе тяжести воздуха в объеме шара $m_e g$.

Тогда из условия равновесия шара получим

$$(M + m) = \frac{F_A}{g} - m_z = m_e - m_z = m_z \left(\frac{m_e}{m_z} - 1 \right),$$

Откуда искомая $m_z = \frac{(M + m)}{\left(\frac{m_e}{m_z} - 1 \right)}$

Используя уравнение Клапейрона – Менделеева, выразим массу воздуха в объеме шара и массу гелия в шаре.

$pV = \frac{m_g}{M_g} RT \Rightarrow m_g = \frac{pVM_g}{RT}$ и, аналогично $m_z = \frac{pVM_z}{RT}$, где M_z и M_g – молярные массы гелия и воздуха.

Тогда $\frac{m_g}{m_z} = \frac{M_g}{M_z}$ и искомая

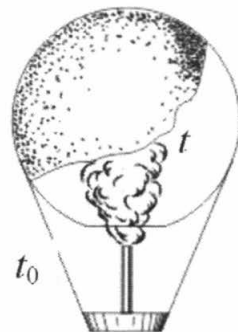
$$m_z = \frac{(M + m)}{\left(\frac{M_g}{M_z} - 1\right)} = \frac{400 + 225}{\left(\frac{29}{4} - 1\right)} \approx 100 \text{ (кг)},$$

Как видим данные о давлении и температуре воздуха оказались избыточными данными. Такое встречается и допускается в заданиях ЕГЭ. Используя эти данные, можно, например, рассчитать плотность гелия в шаре или плотность воздуха снаружи шара при этом давлении и температуре. Ведь из уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$m_g = \frac{pVM_g}{RT} \Rightarrow \rho_g = \frac{pM_g}{RT} \approx 1,2 \text{ (кг/м}^3\text{)},$$

что близко, к табличному значению плотности воздуха при 17°C.

Пример 2.10. Воздушный шар, оболочка которого имеет массу $m = 145$ кг и объем $V = 230 \text{ м}^3$, наполняется горячим воздухом при нормальном атмосферном давлении и температуре окружающего воздуха $t^0 = 0^\circ\text{C}$. Какую минимальную температуру t должен иметь воздух внутри оболочки, чтобы шар начал подниматься? Оболочка шара нерастяжима и имеет в нижней части небольшое отверстие.



Решение. Условие подъема шара:

$$F_A \geq mg + m_g g,$$

где m – масса оболочки, m_g – масса воздуха внутри оболочки. Отсюда

$$\rho_0 g V \geq mg + \rho g V \Rightarrow \rho_0 V \geq m + \rho V,$$

где ρ_0 – плотность окружающего воздуха, ρ – плотность воздуха внутри оболочки, V – объем шара.

Уравнение Менделеева – Клапейрона для воздуха внутри шара:

$$pV = \frac{m_g}{M_g} RT, \text{ или } \rho = \frac{m_g}{V} = \frac{p \cdot M_g}{R \cdot T},$$

где p – атмосферное давление, T – температура воздуха внутри шара. Соответственно, плотность воздуха снаружи:

$$\rho_0 = \frac{M_g p}{RT_0},$$

где T_0 – температура окружающего воздуха. Тогда условие начала движения шара вверх запишется как

$$\frac{p \cdot M_g \cdot V}{R \cdot T_0} \geq m + \frac{p \cdot M_g \cdot V}{R \cdot T} \Rightarrow \frac{p \cdot M_g \cdot V}{R \cdot T} = \frac{p \cdot M_g \cdot V}{R \cdot T_0} - m \Rightarrow$$

искомая минимальная температура, при которой шар поднимется с грузом массой m

$$T_{\min} = \frac{pM_e V}{pM_e V - mRT_0} \cdot T_0 \approx 538 \text{ (K)} = 265^\circ\text{C}.$$

Молекулярно-кинетическая теория газов и внутренняя энергия

Внутренней энергией одноатомного идеального газа называется сумма кинетических энергий всех его молекул. А поскольку согласно МКТ средняя кинетическая энергия молекул газа определяется его температурой, то внутренняя энергия идеального газа оказывается пропорциональной температуре и количеству

молекул газа (или числу молей газа $\nu = \frac{N}{N_A}$:

$$U = N \cdot E_{\text{кин.ср.}} = N \cdot \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} T k N_A \nu = \frac{3}{2} \nu (k N_A) T = \frac{3}{2} \nu RT ,$$

где $E_{\text{кин.ср.}} = \frac{mv_{\text{ср.кв.}}^2}{2}$ кинетическая энергия молекул, выражаемая через среднюю квадратичную скорость молекул $v_{\text{ср.кв.}}$, а R – газовая постоянная.

Поскольку температуры при контакте двух тел всегда выравниваются, то можно утверждать, что выравниваются и средние кинетические энергии молекул. При этом, однако, если не происходит оттока энергии от газа через стенки сосуда (теплоизолированный сосуд), то суммарная кинетическая энергия молекул, то есть внутренняя энергия газов в сосуде сохраняется. Поэтому задачи с использованием закона сохранения энергии можно решать, приравнивая температуры газов или средние кинетические энергии газов.

Пример 2.11. Теплоизолированный сосуд объемом $V = 2 \text{ м}^3$ разделен теплоизолирующей перегородкой на две равные части. В одной части сосуда находится гелий количеством вещества $\nu = 2$ моль, а в другой – такое же количество вещества аргона. Температура гелия $T_1 = 300 \text{ К}$, а температура аргона $T_2 = 600 \text{ К}$. Определите парциальное давление аргона в сосуде после удаления перегородки.

Решение. После удаления перегородки молекулы газов распределятся равномерно по сосуду, выравниваются средние кинетические энергии молекул, они будут соответствовать температуре смеси газов равной T . Для ее определения воспользуемся законом сохранения энергии, согласно которому внутренняя энергия газов (или совокупность кинетических энергий молекул обоих газов) не изменится. Используя выражение для внутренней энергии одноатомного идеального газа $U = \frac{3}{2} \nu RT$, получим :

$$\frac{3}{2} \nu RT_1 + \frac{3}{2} \nu RT_2 = \frac{3}{2} (2\nu) RT .$$

Откуда $T = (T_1 + T_2) / 2$.

Подставляя температуру в уравнение Клапейрона – Менделеева, получим парциальное давление аргона :

$$p_{\text{Ar}} = \frac{\nu R (T_1 + T_2)}{2V} \approx 3735 \text{ (Па)} .$$

Пример 2.12. Теплоизолированный сосуд объемом $V = 2 \text{ м}^3$ разделен пористой перегородкой на две равные части. Атомы гелия могут свободно проникать через поры в перегородке, а атомы аргона – нет. В начальный момент в одной части сосуда находится гелий массой $m = 1 \text{ кг}$, а в другой – аргон массой $m = 1 \text{ кг}$. Средняя квадратичная скорость атомов аргона равна скорости атомов гелия и составляет $u = 500 \text{ м/с}$. Определите внутреннюю энергию газа, оставшегося в той части сосуда, где первоначально находился гелий, после установления равновесия в системе. Значения молярных масс гелия M_1 и аргона M_2 при необходимости взять в справочных таблицах.

Решение. Гелий равномерно распределится по всему сосуду. В результате в той части сосуда, где первоначально находился гелий, его окажется

$$v_1 = \frac{1}{2} \frac{m}{M_{He}}, \text{ где } m - \text{исходная масса гелия.}$$

В ходе движения атомов гелия через поры в одном и другом направлении, средние кинетические энергии молекул гелия и аргона выровняются и станут равными ϵ . Тогда внутренняя энергия распределится между молекулами гелия и аргона в соответствии с числом частиц, то есть в соответствии с числом молей

$$\frac{E_{He}}{E_{Ar}} = \frac{v_{He}}{v_{Ar}} = \frac{m M_{Ar}}{M_{He} m} = \frac{M_{Ar}}{M_{He}}.$$

Внутренняя энергия исходного гелия $E_{He}(0) = N_{He} \frac{m_{0He} u^2}{2} = \frac{m u^2}{2}$, аналогично внутренняя энергия аргона $E_{Ar}(0) = \frac{m u^2}{2}$, тогда их суммарная энергия равна $m u^2$

Из закона сохранения энергии

$$E_{He} + E_{Ar} = E_{He}(0) + E_{Ar}(0) = m u^2$$

В тоже время

$$\frac{E_{Ar}}{E_{He}} = \frac{M_{He}}{M_{Ar}}$$

Решая систему, получим

$$E_{He} \left(1 + \frac{M_{He}}{M_{Ar}}\right) = m u^2$$

$$E_{He} = \frac{M_{Ar}}{M_{Ar} + M_{He}} m u^2$$

При этом в половине сосуда окажется энергия равная половине молекул гелия, т.е. $E'_{He} = \frac{E_{He}}{2} = \frac{M_{Ar}}{M_{Ar} + M_{He}} \frac{m u^2}{2} \approx 114 \text{ кДж}$

Пример 2.13. Теплоизолированный сосуд объемом $V = 2 \text{ м}^3$ разделен пористой перегородкой на две равные части. Атомы гелия могут свободно проникать через поры в перегородке, а атомы аргона – нет. В начальный момент в одной части сосуда находится $m_1 = 1 \text{ кг}$ гелия, а в другой – $m_2 = 1 \text{ кг}$ аргона, а средняя квадратичная скорость атомов аргона и гелия одинакова и составляет $u = 1000 \text{ м/с}$. Определите температуру гелий-аргоновой смеси после установления равновесия в системе.

Решение. Условие проникновения молекул гелия через поры означает, что

- 1) гелий равномерно распределится по всему сосуду;
- 2) атомы гелия, двигаясь через поры во вторую часть сосуда и обратно, выравнивают среднюю кинетическую энергию молекул в обеих частях сосуда, то есть в состоянии равновесия температура в обеих частях сосуда станет одинаковой и равной T

Так как сосуд теплоизолированный, температуру в сосуде можно определить из закона сохранения внутренней энергии молекул газов, равной суммарной кинетической энергии всех молекул газа:

$$N_{He} \frac{m_{0He} u^2}{2} + N_{Ar} \frac{m_{0Ar} u^2}{2} = \frac{3}{2} \nu_{He} RT + \frac{3}{2} \nu_{Ar} RT \text{ или}$$

$$\frac{m_1 u^2}{2} + \frac{m_2 u^2}{2} = \frac{3}{2} \frac{m_1}{M_{He}} RT + \frac{3}{2} \frac{m_2}{M_{Ar}} RT \text{ или}$$

$$\frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} = \frac{3}{2} RT \left(\frac{m_1}{M_{He}} + \frac{m_2}{M_{Ar}} \right), \text{ откуда}$$

$$T = \frac{M_{Ar} M_{He} (m_1 + m_2)}{m_1 M_{Ar} + m_2 M_{He}} \cdot \frac{u^2}{3R} \approx 292 \text{ (K)}.$$

Как видно из решения, условия разделённости сосуда на 2 равные части, объем сосуда – являются избыточными данными. Однако из этих данных можно, например, определить внутреннюю энергию газа и давление в той части сосуда, где раньше располагался гелий. Поскольку туда не проникают молекулы аргона, а половина гелия ушла во вторую половину, то

$$U = \frac{3}{2} \frac{\nu_{He}}{2} RT = \frac{3}{4} \frac{m_1}{M_{He}} RT \approx 454 \text{ (кДж)}, \text{ а } p = \frac{\nu_{He} RT}{V} = \frac{m_1 RT}{V M_{He}} \approx 303 \text{ (кПа)}$$

Пример 2.14. В цилиндре, закрытом подвижным поршнем, находится воздух. Во время опыта объем воздуха в цилиндре увеличили в 2 раза, а абсолютную температуру в 3 раза. Оказалось, однако, что воздух мог просачиваться сквозь зазор вокруг поршня, и за время опыта его давление в цилиндре не изменилось. Во сколько раз изменилась внутренняя энергия воздуха в цилиндре? (Воздух считать идеальным газом.)

Решение. Внутренняя энергия идеального газа пропорциональна его температуре и числу молей газа

$$U = A \nu RT$$

(A – коэффициент пропорциональности, зависящий от состава газа).

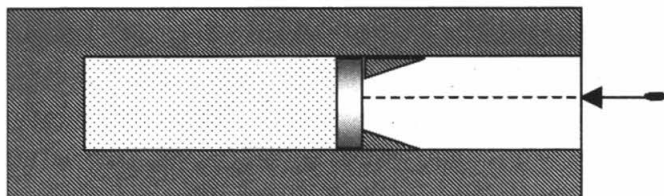
По условию температура увеличилась в 3 раза $T_1 = 3T$.

Число молей определим из уравнения Клапейрона – Менделеева:

$$\nu_1 = \frac{p V_1}{R T_1} = \frac{p \cdot 2V}{R \cdot 3T} = \frac{2}{3} \nu$$

Значит, $U_1 = A \nu_1 R T_1 = A \frac{2}{3} \nu R \cdot 3T = 2U$, то есть внутренняя энергия увеличилась в 2 раза

Пример 2.15. В вакууме закреплен горизонтальный цилиндр. В цилиндре находится 0,1 моль гелия, запертого поршнем. Поршень удерживается упорами и может скользить влево вдоль стенок цилиндра без трения.



В поршень попадает пуля массой 10 г, летящая горизонтально со скоростью 400 м/с, и застревает в нем. Температура гелия в момент остановки поршня в крайнем левом положении возрастает на 64 К. Какова масса поршня? Считать, что за время движения поршня газ не успевает обменяться теплом с поршнем и цилиндром.

Решение. Закон сохранения импульса при неупругом соударении:

$$mv_0 = (m + M)v_{\pi}.$$

Отсюда: $v_{\pi} = \frac{mv_0}{m + M}$, где m и M – масса пули и масса поршня, v_0 и v_{π} – их скорости.

Механическая энергия поршня с пулей превратится во внутреннюю энергию гелия. Внутренняя энергии одноатомного идеального газа: $U = \frac{3}{2} \nu RT$, поэтому

$$\Delta U = \frac{3}{2} \nu R \Delta T = \frac{(m + M)v_{\pi}^2}{2}.$$

Решив систему уравнений, получаем: $M = \frac{m^2 v_0^2}{3R \nu \Delta T} - m \approx 90 \text{ г}.$

Термодинамика изопроцессов (включая адиабату)

Проверка умения анализировать графики изопроцессов и проверка понимания первого закона термодинамики осуществляется в ЕГЭ, в основном, в виде заданий с выбором ответа. В заданиях, требующих развернутого ответа, чаще всего, используется графическое и словесное описание изопроцессов и применение первого закона к конкретной совокупности таких процессов.

Внутреннюю энергию тела (в том числе и газа) можно изменить двумя способами: за счет теплопередачи и за счет совершения над телом работы в ходе его деформирования.

Теплопередача – это обмен энергией между рассматриваемой системой и внешними телами без совершения работы внешними силами или силами, действующими на внешние тела со стороны рассматриваемой системы. **Количество теплоты Q** – это энергия, переданная от одного тела к другому в ходе теплопередачи.

Работа в термодинамике – это работа сил, приложенных к внешним телам со стороны рассматриваемой системы при ее деформации. При изменении внутренней энергии газа говорят о работе внешних сил и работе газа. Работа газа положительна ($A > 0$) при расширении газа и отрицательна ($A < 0$) при его сжатии (рис. 12). Работа газа по модулю численно совпадает с площадью фигуры под графиком зависимости давления от объема на pV – диаграмме (рис. 12).

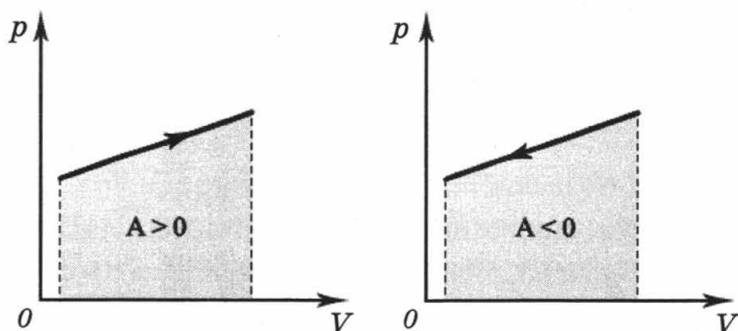


Рис. 12

Первый закон термодинамики (первое начало термодинамики) утверждает, что внутренняя энергия определяется только состоянием системы, причем изменение внутренней энергии системы при переходе ее из одного состояния в другое равно сумме работы внешних сил и количества теплоты, переданного системе:

$$\Delta U = A_{\text{внешн}} + Q$$

Если при нагревании газ расширяется и при этом совершает работу A , то первый закон термодинамики можно сформулировать по-другому:

$$Q = \Delta U + A$$

Количество теплоты, переданное газу, равно сумме изменения его внутренней энергии и работы, совершенной газом.

Работа газа и работа внешних сил вследствие 3-го закона Ньютона равны по модулю и имеют противоположный знак:

$$A_{\text{внешн}} = -A$$

Поскольку при осуществлении изопроцессов с одноатомным идеальным газом (гелий, аргон, неон, ксенон) можно рассчитать изменение внутренней энергии ΔU , а иногда и совершенную газом работу A , то первый закон термодинамики приобретает более конкретный вид. Кроме того, его можно сочетать с уравнением Менделеева – Клапейрона, что позволяет расширить круг задач, проверяющих умение учащихся комбинировать знания, полученные в разных частях курса.

Для изохорного процесса ($V = \text{const}$):

$$A = 0; \Delta U = \frac{3}{2} \nu R \Delta T = \frac{3}{2} V \Delta p; Q = \Delta U = \frac{3}{2} \nu R \Delta T = \frac{3}{2} V \Delta p$$

Для изотермического процесса ($T = \text{const}$):

$$\Delta U = 0; Q = -A$$

Для изобарного процесса ($p = \text{const}$):

$$\Delta U = \frac{3}{2} \nu R \Delta T = \frac{3}{2} p \Delta V; A = p \Delta V = \nu R \Delta T;$$

$$Q = \Delta U + A = \frac{3}{2} \nu R \Delta T + \nu R \Delta T = \frac{5}{2} \nu R \Delta T = \frac{5}{2} p \Delta V$$

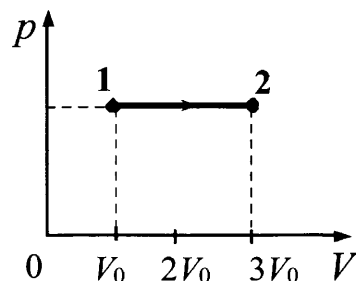
В термодинамике важную роль играет **адиабатный процесс** – при котором термодинамический процесс в системе происходит в системе без теплообмена с окружающей средой.

Для этого процесса $Q = 0$,

Поэтому, согласно первого закона термодинамики, $A = -\Delta U$.

В адиабатном процессе с идеальным газом совершение работы газом приводит к снижению внутренней энергии, то есть к охлаждению газа. И, наоборот, адиабатное сжатие газа внешними силами (работа газа при этом отрицательна) приводит к его нагреванию, то есть к росту его внутренней энергии, за счет работы внешних сил.

Пример 2.16. На рисунке изображено изменение состояния 1 моль идеального одноатомного газа. Начальная температура газа 27°C . Какое количество теплоты сообщено газу в этом процессе?

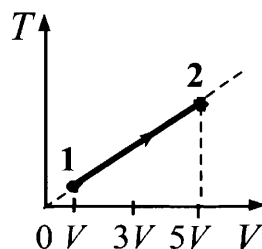


Решение. На рисунке – изобарный процесс, в ходе которого объем возрастает в 3 раза. Согласно уравнения Менделеева – Клапейрона $pV = \nu RT$ температура при этом $T = \frac{pV}{\nu R}$ тоже возрастает в 3 раза и становится равна $3T_1$.

Количество теплоты, получаемое одноатомным идеальным газом, в изобарном процессе:

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} = \frac{3}{2} R \Delta T + p \Delta V = \frac{5}{2} R (T_2 - T_1) = \frac{5}{2} R (3T_1 - T_1) = 5RT_1 \approx 12,5 \text{ (кДж)}.$$

Пример 2.17. На рисунке изображено изменение состояния 1 моль неона. Начальная температура газа 0°C . Какое количество теплоты сообщено газу в этом процессе?



Решение. На графике изобарный процесс, поскольку график в координатах T-V является прямой идущей в начало координат. Если в состоянии 1 температура T_1 , то согласно уравнению Менделеева – Клапейрона:

$$pV = RT_1,$$

В состоянии 2 судя по графику:

$$p \cdot 5V = RT_2.$$

Значит $T_2 = 5T_1$.

Неон одноатомный идеальный газ, поэтому количество теплоты, получаемое системой во время изобарного процесса,

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} = \frac{3}{2} R \Delta T + p \Delta V = \frac{5}{2} R (T_2 - T_1) = 10RT_1 \approx 22,7 \text{ (кДж)}.$$

Чаще всего приходится сопоставлять выражения для термодинамических величин в двух процессах, анализировать процессы, которые не являются изопроцессами.

Пример 2.18. С разреженным азотом, который находится в сосуде с поршнем, провели два опыта. В первом опыте газу сообщили, закрепив поршень, количество теплоты $Q_1 = 742 \text{ Дж}$, в результате чего его температура изменилась на некоторую величину ΔT . Во втором опыте, предоставив азоту возможность изобарно расширяться, сообщили ему количество теплоты $Q_2 = 1039 \text{ Дж}$, в результате чего его температура изменилась также на ΔT . Каким было изменение температуры ΔT в опытах? Масса азота $m = 1 \text{ кг}$.

Решение. Закрепленный поршень в первом опыте означает, что процесс был изохорным, в то время как во втором опыте азот расширялся изобарно. Так как температура газа изменилась одинаково, то изменение внутренней энергии в обоих опытах ΔU тоже одинаково. Поэтому первый закон термодинамики для первого опыта запишется как

$$Q_1 = \Delta U, \quad (1),$$

а для второго

$$Q_2 = \Delta U + A, \quad (2)$$

где ΔU – приращение внутренней энергии газа (одинаковое в двух опытах), A – работа газа во втором опыте.

Работа A совершалась газом в ходе изобарного расширения, так что

$$A = p\Delta V, \quad (3)$$

(ΔV – изменение объема газа).

С помощью уравнения Клапейрона – Менделеева эту работу можно выразить через приращение температуры газа:

$$p\Delta V = \frac{m}{M} R\Delta T. \quad (4)$$

Решая систему уравнений (1) – (4), получим:

$$\Delta T = \frac{M(Q_2 - Q_1)}{mR} \approx 1 \text{ (K)}.$$

Важно, в данной задаче понимать, что для двухатомного газа азота нельзя

считать как для одноатомного $\Delta U = \frac{3}{2} \nu R\Delta T$, что могло бы привести к неверному результату.

Пример 2.19. Теплоизолированный цилиндр разделён подвижным теплопроводящим поршнем на две части. В одной части цилиндра находится гелий, а в другой – аргон. В начальный момент температура гелия равна 300 К, а аргона – 900 К, объёмы, занимаемые газами, одинаковы, а поршень находится в равновесии. Во сколько раз изменится объём, занимаемый гелием, после установления теплового равновесия, если поршень перемещается без трения? Теплоёмкостью цилиндра и поршня пренебречь.

Решение. Применив уравнение Клапейрона–Менделеева $pV = \nu RT$ для каждого из газов в начальном состоянии, когда давление и объёмы газов равны, получим для числа молей гелия и аргона ν_1 и ν_2 соотношение

$$\nu_1 T_1 = \nu_2 T_2.$$

После установления теплового равновесия температура газов равна T , а объёмы гелия и аргона изменились и стали равны V_1 и V_2 соответственно, а давления одинаковы так как поршень опять находится в равновесии. Уравнения Клапейрона–Менделеева в этот момент даёт соотношение

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2}.$$

Суммарный объём цилиндра остался неизменным:

$$V_1 + V_2 = 2V,$$

Решая уравнения совместно, получаем, что

$$V_1 = \frac{2V}{1 + \frac{\nu_2}{\nu_1}} = \frac{2V}{1 + \frac{T_1}{T_2}} = \frac{3}{2} V.$$

Значит объём гелия увеличился в 1,5 раза.

Пример 2.20. Один моль аргона, находящийся в цилиндре при температуре $T_1 = 600 \text{ К}$ и давлении $p_1 = 4 \cdot 10^5 \text{ Па}$, расширяется и одновременно охлаждается так, что его давление при расширении обратно пропорционально квадрату объёма. Конечный объём газа вдвое больше начального. Какое количество теплоты газ отдал при расширении, если при этом он совершил работу $A = 2493 \text{ Дж}$?

Решение. Аргон является одноатомным газом. Его внутренняя энергия

$$U = \frac{3}{2} \nu RT,$$

так что

$$U_2 = \frac{3}{2} \nu RT_2$$

Используя уравнение Клапейрона – Менделеева и условия расширения

$p = \frac{A}{V^2}$ определим конечную температуру

$$p_1 V_1 = \nu RT_1$$

$$p_2 V_2 = \nu RT_2$$

$$p_1 = \frac{A}{V_1^2}$$

$$p_2 = \frac{A}{V_2^2}$$

Следовательно

$$\frac{A}{V_1^2} V_1 = \nu RT_1 = \frac{A}{V_1}$$

$$\frac{A}{V_2^2} V_2 = \nu RT_2 = \frac{A}{V_2}$$

Поделив эти два уравнения друг на друга, и преобразовав дробь, получим конечную температуру

$$T_2 = T_1 \frac{V_1}{V_2}$$

Откуда с учетом $V_2 = 2V_1$ внутренняя энергия в конечном состоянии

$$U_2 = \frac{3}{2} RT_1 \frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{4} RT_1.$$

Изменение внутренней энергии при расширении

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -\frac{1}{4} RT_1 \approx -1247 \text{ Дж}$$

Согласно первому закону $\Delta U = Q + A_{\text{внеш}}$ или $Q = \Delta U + A_{\text{газа}}$ следовательно

$$Q = \Delta U + A = -1246,5 \text{ Дж} + 2493 \text{ Дж} = 1246,5 \text{ Дж}$$

В большинстве заданий, связанных с термодинамикой изопроцессов, требуется проанализировать два процесса по графику, сопоставить количество теплоты или работу, совершенную газом, на двух участках или на одном участке и в ходе всего процесса. При этом одно и тоже сочетание двух процессов может быть представлено в разных координатах (например, изобарно-изохорный процесс на рис. 13 а,б,в), хотя текст задания и ход его решения идентичны.

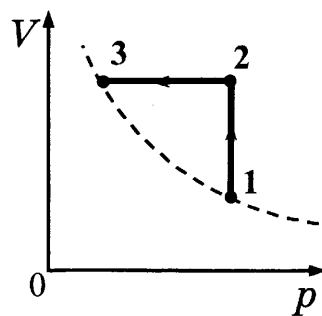
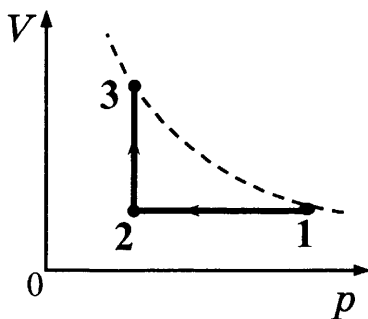
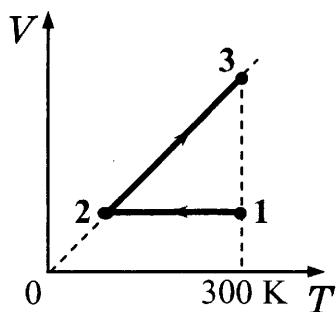
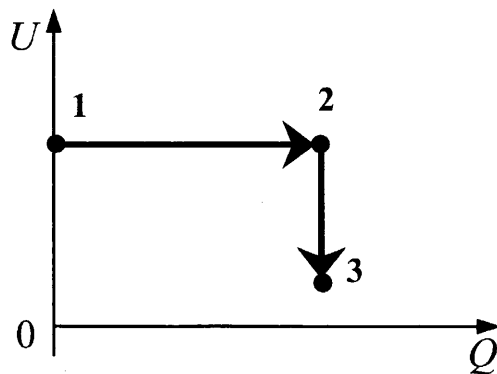


Рис. 13

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 2.21. В цилиндре, закрытом подвижным поршнем, находится идеальный газ. На рисунке показана диаграмма, иллюстрирующая изменение внутренней энергии U газа и передаваемое ему количество теплоты Q . Опишите изменение объема газа при его переходе из состояния 1 в состояние 2, а затем в состояние 3. Свой ответ обоснуйте, указав, какие физические закономерности вы использовали для объяснения.

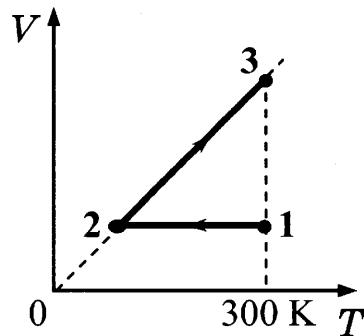


Решение. В процессе $1 \rightarrow 2$ газ получает некоторое количество теплоты, но его внутренняя энергия не меняется. Это изотермический процесс. Следовательно, согласно первому началу термодинамики, газ отдает получаемую энергию, совершая положительную работу. Критерием совершения работы газом является изменение его объема. В данном процессе работа газа положительна, значит объем газа увеличивается.

В процессе $2 \rightarrow 3$ теплообмена газа с внешней средой нет, это адиабатный процесс. Внутренняя энергия газа уменьшается, значит он совершает положительную работу. Следовательно, и этот процесс также связан с расширением газа.

Значит, переход газа из состояния 1 в состояние 3 все время сопровождается увеличением его объема.

Пример 2.22. 10 моль одноатомного идеального газа сначала охладил, уменьшив давление в 3 раза, а затем нагрели до первоначальной температуры 300 K (см. рисунок). Какое количество теплоты получил газ на участке 2 – 3?



Решение. Процесс 2-3 – изобарный. Первый закон термодинамики для него в случае одноатомного идеального газа:

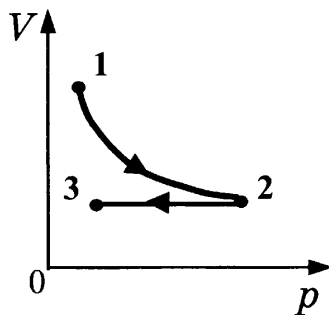
$$Q_{23} = \Delta U_{23} + A_{23} = \frac{3}{2} \nu R \Delta T_{23} + \nu R \Delta T_{23} = \frac{5}{2} \nu R \Delta T_{23} = \frac{5}{2} \nu R (T_3 - T_2) = \frac{5}{2} \nu R (T_1 - T_2).$$

Поскольку в процессе 1-2 при $V = \text{const}$ по условию давление снизилось в 3 раза, согласно уравнения Менделеева – Клапейрона ($pV = \nu RT$) температу-

ра $T = \frac{pV}{\nu R}$ тоже снизилась в 3 раза, т.е. $T_2 = \frac{T_1}{3}$. Откуда

$$Q_{23} = \frac{5}{2} \nu R (T_1 - T_2) = \frac{5}{2} \nu R (T_1 - \frac{T_1}{3}) = \frac{5}{3} \nu R T_1 \approx 41,6 \text{ кДж}$$

Пример 2.23. Один моль идеального одноатомного газа сначала изотермически сжали ($T_1 = 300 \text{ K}$). Затем газ изохорно охладили, понизив давление в 3 раза (см. рисунок). Какое количество теплоты отдал газ на участке 2 – 3?



Решение. Процесс 2-3 изохорный.

Согласно первому закону термодинамики, $\Delta U = Q + A$, но в случае изохорного процесса (участок 2 – 3) $A_{23} = 0$, поэтому

$$Q_{23} = \Delta U_{23} = \frac{3}{2} \nu R (T_3 - T_2).$$

Так как давление на 2-3 понизилось в 3 раза при сохранении объема, то согласно уравнения Менделеева – Клапейрона ($pV = \nu RT$) температура $T = \frac{pV}{\nu R}$ тоже снизилась в 3 раза, т.е. $T_3 = \frac{T_2}{3}$.

Процесс 1-2 изотермический, то $T_2 = T_1$, значит $T_3 = \frac{T_2}{3} = \frac{T_1}{3}$. Откуда

$$Q_{23} = \frac{3}{2} \nu R (T_3 - T_2) = \frac{3}{2} \nu R (\frac{T_1}{3} - T_1) = -\frac{3}{2} \nu R \cdot \frac{2}{3} T_1 = -\nu R T_1 \approx -2500 \text{ (Дж)}$$

Отрицательный знак и означает, что энергия передается от газа к окружающей среде, поэтому ответ должен быть сформулирован как «Газ отдал количество теплоты, равное 2,5 кДж».

Аналогично рассматриваются процессы изохорно-изотермические процессы изображенные в других координатах (рис. 14)

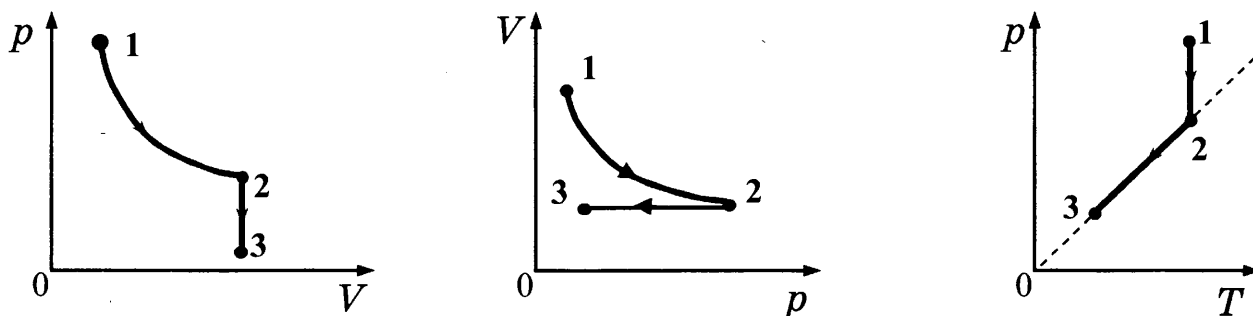
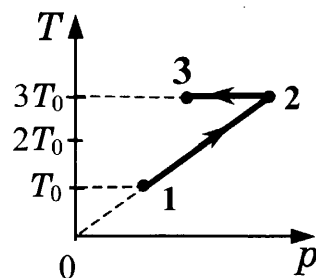


Рис. 14

Пример 2.24. Один моль одноатомного идеального газа совершает процесс 1 – 2 – 3 (см. рисунок, где $T_0 = 100 \text{ K}$). На участке 2 – 3 к газу подводят 2,5 кДж теплоты. Найдите отношение работы A_{123} , совершаемой газом в ходе процесса, к количеству поглощенной газом теплоты Q_{123} .



Решение. Процесс 1-2 – это изохорный процесс, потому что давление пропорционально температуре, а согласно уравнению Менделеева – Клапейрона ($pV = \nu RT$ или $p = \frac{\nu R}{V}T$) это может быть только если $V = \text{const}$.

Процесс 2-3 изотермический.

Работа газа положительна, если газ расширяется и отрицательна, если он сжимается. В случае изохорного процесса работа газа равна нулю. Поэтому на участке 1-2 работа газом не совершается и

$$A_{123} = A_{23}$$

В изотермическом процессе 2-3 $\Delta U_{23} = 0$, поэтому согласно первого закона термодинамики

$$Q_{23} = \Delta U_{23} + A_{23} = A_{23}.$$

Применяя первый закон термодинамики для двух участков, получаем

$$Q_{123} = \Delta U_{12} + \Delta U_{23} + A_{12} + A_{23} = \Delta U_{12} + A_{23} = \Delta U_{12} + Q_{23}$$

Поскольку $Q_{23} = 2,5$ кДж по условию, остается найти изменение внутренней энергии газа при переходе $1 \rightarrow 2$

Судя по графику $\Delta T_{12} = T_2 - T_1 = 2T_0$, тогда

$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2} \nu R \Delta T_{12} = 3\nu RT_0 \text{ и } Q_{123} = 3\nu RT_0 + Q_{23}.$$

Тогда искомое отношение:

$$\frac{A_{123}}{Q_{123}} = \frac{A_{23}}{3\nu RT_0 + Q_{23}} = \frac{Q_{23}}{3\nu RT_0 + Q_{23}} \approx 0,5.$$

Аналогично решается задача, в которой изохорно-изотермический процесс, изображен в других координатах (рис. 15)

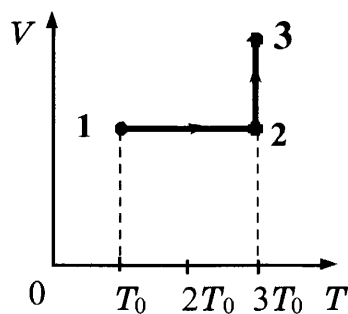
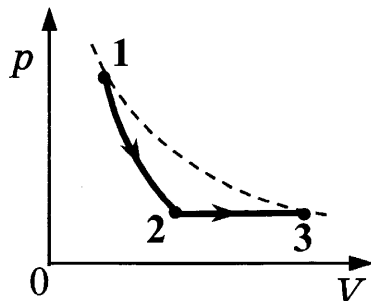


Рис. 15

В адиабатном процессе газ не обменивается энергией с внешней средой путем теплопередачи через стенки, т.е. $Q=0$. Тогда из первого закона термодинамики следует, что газ может совершать работу, только за счет уменьшения своей внутренней энергии $A = -\Delta U$. В случае совершения работы над газом, внутренняя энергия в адиабатном процессе увеличивается на величину равную работе внешних сил $A_{\text{внеш}} = \Delta U$.

Пример 2.25. Идеальный одноатомный газ расширяется сначала адиабатно, а затем изобарно. Конечная температура газа равна начальной (см. рисунок). При адиабатном расширении газ совершил работу, равную 3 кДж. Какова работа газа за весь процесс 1 – 2 – 3?



Решение. Работа газа в ходе процесса состоит из двух слагаемых.

$$A = A_{12} + A_{23} \quad (1)$$

$A_{12} = 3$ кДж, по условию, при этом в адиабатном процессе, идущем без поступления энергии во внутрь сосуда за счет теплопередачи через стенки сосуда, внутренняя энергия газа уменьшилась на такую величину и температура его уменьшилась от T_1 до T_2 . Согласно первому закону термодинамики при адиабатном процессе

$$0 = A_{12} + \Delta U_{12} = A_{12} + \frac{3}{2} \nu R(T_2 - T_1),$$

откуда

$$-\frac{3}{2} \nu R(T_2 - T_1) = \frac{3}{2} \nu R(T_1 - T_2) = A_{12} \quad (2)$$

В изобарном процессе работа равна площади под прямой **23** на графике процесса, или

$$A_{23} = p_2(V_3 - V_2) = p_2V_3 - p_2V_2 = p_3V_3 - p_2V_2 = \nu RT_3 - \nu RT_2 = \nu R(T_3 - T_2) \quad (3)$$

Так как по условию $T_3 = T_1$, выражение (3) переписывается как

$$A_{23} = \nu R(T_3 - T_2) = \nu R(T_1 - T_2),$$

а с учетом (2) преобразуется к виду

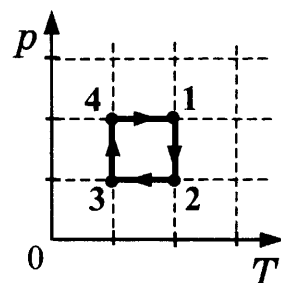
$$A_{23} = \nu R(T_1 - T_2) = \frac{2}{3} A_{12}$$

Тогда работа в процесса 1-2-3

$$A = A_{12} + A_{23} = A_{12} + \frac{2}{3} A_{12} = \frac{5}{3} A_{12} = 5 \text{ (кДж)}$$

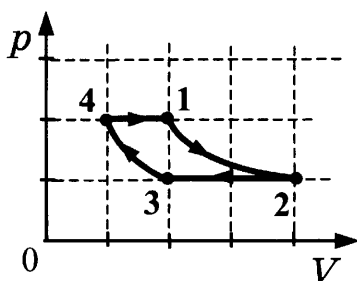
Следующим этапом усложнения задач на анализ термодинамики изопроцессов, совершаемых над идеальными газами, является анализ циклических процессов. Часто такие задания формулируются как задания на анализ преобразования энергии в тепловых машинах, хотя к реальным тепловым машинам, конечно, не имеют никакого отношения. Ниже рассмотрено несколько примеров таких задач.

Пример 2.26. На pT -диаграмме показан цикл тепловой машины, у которой рабочим телом является идеальный газ (см. рисунок). На каком участке цикла работа газа наименьшая по абсолютной величине?



Решение. Анализ работы совершенной газом на разных участках цикла удобно сравнивать на pV -диаграмме, так как в этих координатах модуль работы газа на каждом участке цикла имеет геометрический смысл — площадь между кривой, изображающей этот процесс, и осью объема. График цикла, перечерченный в координатах p - V , показан на рисунке. Судя по графику в координатах p - T , давление на участках 2-3 и 4-1 отличаются в 2 раза, и две изобары должны быть пересечены двумя изотермами, график которых в координатах p - V гиперболы. Если первой на график p - V нанести точку 1, то при изотермическом процессе 1-2 давление падает в 2 раза, значит, объем увеличивается в 2 раза, так находится координата точки 2. Далее идет изо-

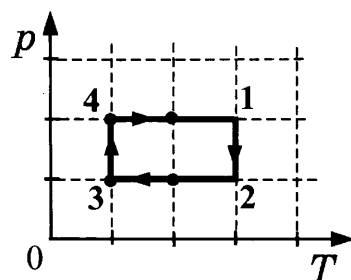
барный процесс 2-3, в ходе которого температура падает в 2 раза, значит, вдвое уменьшается объем. Так находится координата точки 3. Аналогично по изменению объема от точки 1 к точке 4 в 2 раза при изобарном охлаждении находится координата точки 4. Далее точки 4 и 3 соединяются гиперболой.



Работа на участках 4-1 и 3-2 одинакова и равна 2 условные единицы (1 у.е. одна клетка на координатной плоскости). Работа на участке 1-2 больше 2 у.е., работа на участке 4-3 меньше 2 у.е.. Поэтому минимальной по модулю является работа A_{34} .

Пример 2.27. На pT -диаграмме показан цикл тепловой машины, у которой рабочим телом является идеальный газ (см. рисунок).

Найдите модуль отношения работ газа $\left| \frac{A_{41}}{A_{23}} \right|$ на участках 4 – 1 и 2 – 3.



Решение. Интересующие нас процессы изобары. Для работы при изобарном процессе (с учетом того, что согласно уравнению Менделеева – Клапейрона можно записать $pV = \nu RT$ и при $p = \text{const}$ $p\Delta V = \nu R\Delta T$):

$$A_{23} = p_{23} \Delta V_{23} = \nu R \Delta T_{23};$$

$$A_{41} = p_{41} \Delta V_{41} = \nu R \Delta T_{41}.$$

Тогда искомое соотношение

$$\left| \frac{A_{41}}{A_{23}} \right| = \frac{\nu R(T_1 - T_4)}{\nu R(T_3 - T_2)} = \frac{(T_1 - T_4)}{(T_3 - T_2)}.$$

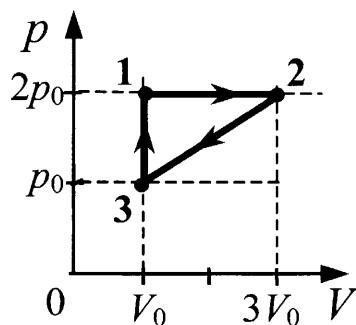
Как видно из графика

$$T_1 - T_4 = T_3 - T_2,$$

поэтому

$$\left| \frac{A_{41}}{A_{23}} \right| = 1$$

Пример 2.28. Одноатомный идеальный газ неизменной массы совершает циклический процесс, показанный на рисунке. За цикл от нагревателя газ получает количество теплоты $Q_H = 8$ кДж. Чему равна работа газа за цикл?



Решение. В ходе цикла газ получает энергию за счет теплопередачи на участках 3-1 (изохорное нагревание) и 1-2 (изобарное нагревание). На участке 2-3 над газом совершают работу, а его температура при этом непрерывно падает

$T = \frac{pV}{\nu R}$, и p , и V уменьшаются), что возможно только при отводе энергии в ходе теплопередачи через стенки сосуда. Тогда количество теплоты, полученное от нагревателя за цикл:

$$Q_n = Q_{12} + Q_{31} = (U_2 - U_3) + A_{12} + A_{31}$$

$$U_2 - U_3 = (3/2)(\nu RT_2 - \nu RT_3)$$

$A_{31} = 0$, поэтому $A_{12} + A_{31} = A_{12} = 2p_0 2V_0$ (площадь между графиком участка 1-2 и осью V).

Тогда

$$Q_n = (3/2)(2p_0 3V_0 - p_0 V_0) + 4p_0 V_0 = (23/2)p_0 V_0.$$

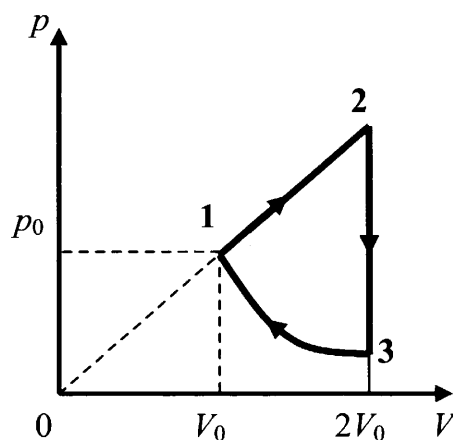
Работа газа за цикл рассчитывается как «площадь цикла», площадь треугольника на графике цикла в координатах p - V :

$$A_u = (p_0/2) 2V_0 = p_0 V_0.$$

Сравнивая выражения для A_u и Q_n получим

$$A_u = (2/23) Q_n \approx 700 \text{ Дж.}$$

Пример 2.29. Над одноатомным идеальным газом проводится циклический процесс, показанный на рисунке. На участке 1-2 газ совершает работу $A_{12} = 1000$ Дж. На адиабате 3-1 внешние силы сжимают газ, совершая работу $|A_{31}| = 370$ Дж. Количество вещества газа в ходе процесса не меняется. Найдите количество теплоты $|Q_{\text{хол}}|$, отданное газом за цикл холодильнику.



В данном цикле рабочее тело на участке 1-2 получает от нагревателя количество теплоты:

$$Q_{\text{нагр}} = Q_{12} = (U_2 - U_1) + A_{12}.$$

Процесс 2-3 изохорный, поэтому рабочее тело отдает холодильнику количество теплоты $|Q_{\text{хол}}| = U_2 - U_3$.

Наконец, на адиабатном участке 3-1 внешние силы сжимают газ, совершая работу $|A_{31}| = U_1 - U_3$.

Поэтому количество теплоты $|Q_{\text{хол}}|$, отданное газом за цикл холодильнику, можно представить в виде:

$$|Q_{\text{хол}}| = (U_2 - U_1) + (U_1 - U_3) = (U_2 - U_1) + |A_{31}|.$$

Для одноатомного идеального газа:

$$\begin{cases} pV = \nu RT; \\ U = \frac{3}{2} \nu RT. \end{cases}$$

Так как участок 1-2 прямо пропорциональная зависимость $p(V)$, верно соотношение

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{V_2}{V_1},$$

откуда

$$p_2 = p_1 \frac{V_2}{V_1} = 2p_0.$$

Поэтому

$$U_2 - U_1 = \frac{3}{2} p_2 V_2 - \frac{3}{2} p_1 V_1 = \frac{3}{2} (2p_0 \cdot 2V_0 - p_0 V_0) = \frac{9}{2} p_0 V_0,$$

$$A_{12} = \frac{1}{2} (p_2 + p_1) (V_2 - V_1) = \frac{1}{2} (3p_0 \cdot V_0) = \frac{3}{2} p_0 V_0 \text{ (площадь трапции на диаграмме),}$$

откуда видно, что

$$U_2 - U_1 = 3A_{12}.$$

В результате искомое значение

$$|Q_{\text{хол}}| = (U_2 - U_1) + |A_{31}| = 3A_{12} + |A_{31}| = 3370 \text{ Дж.}$$

Еще один тип сложных заданий по термодинамике относится к теплообмену не между газами, а между твердыми телами и жидкостями. В этом случае в первом законе термодинамики пренебрегают работой, совершаемой жидкостями и твердыми веществами при их нагревании и тогда сохранение внутренней энергии у нескольких тел в ходе теплообмена толкуется как равенство количеств теплоты отданной одними телами системы и количеств теплоты, полученных другими телами системы.

$$Q_{\text{получ}} = Q_{\text{отдан}}$$

Этот вариант закона сохранения энергии называют *уравнением теплового баланса*. Для ограничения оттока энергии от тел рассматриваемой системы обычно тела помещают в сосуды, из которых замедлен теплообмен, за счет теплоизоляции стенок (калориметры и термосы). Рассмотрим несколько примеров.

Пример 2.30. В калориметре находился 1 кг льда. Какой была температура льда, если после добавления в калориметр 15 г воды, имеющей температуру 20°C , в калориметре установилось тепловое равновесие при -2°C ? Теплообменом с окружающей средой и теплоемкостью калориметра пренебречь.

Решение. При решении следует учитывать, что лед как твердое тело может нагреваться (например, в морозильнике бытового холодильника температура -20°C , поэтому лед, извлеченный оттуда, сначала нагревается до 0°C и лишь потом начинает плавиться с образованием воды). Причем теплоемкость льда (твердой воды) почти в 2 раза меньше, чем у воды (жидкой).

При контакте холодного льда с теплой водой задача усложняется тем, что иногда неясно, при каком соотношении лед-вода наступит тепловое равновесие. В данной задаче все записано однозначно: раз температура после установления равновесия равна -2°C , то вся добавленная вода превратилась в лед и еще остыла на 2 градуса ниже нуля. А 1 кг льда нагрелся до -2°C .

Количество теплоты, необходимое для нагревания льда, находящегося в калориметре, до температуры $t = -2^\circ\text{C}$:

$$Q = c_1 m_1 (t - t_1). \quad (1)$$

Количество теплоты, отдаваемое водой при охлаждении ее до 0°C :

$$Q_1 = c_2 m_2 (t_2 - 0). \quad (2)$$

Количество теплоты, выделяющейся при отвердевании воды при 0°C :

$$Q_2 = \lambda m_2. \quad (3)$$

Количество теплоты, выделяющейся при охлаждении льда, полученного из воды, до температуры t : $Q_3 = c_1 m_2 (0 - t)$. (4)

Уравнение теплового баланса: $Q_{\text{получ}} = Q_{\text{отдан}}$ дает

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 \quad (5)$$

Объединяя (1) – (5), получаем:

$$t_1 = \frac{m_1 c_1 t - m_2 (c_2 (t_2 - 0) + \lambda + c_1 (0 - t))}{m_1 c_1} \approx -5^\circ \text{C}.$$

Пример 2.31. В калориметре находился лед при температуре $t_1 = -5^\circ \text{C}$. Какой была масса m_1 льда, если после добавления в калориметр $m_2 = 4$ кг воды, имеющей температуру $t_2 = 20^\circ \text{C}$, и установления теплового равновесия, температура содержимого калориметра оказалась равной $t = 0^\circ \text{C}$, причем в калориметре была только вода?

Решение. Количество теплоты, полученное при нагревании льда, находящегося в калориметре, до температуры 0°C :

$$Q_1 = c_1 m_1 (0 - t_1). \quad (1)$$

Количество теплоты, полученное льдом при его таянии при 0°C :

$$Q_2 = \lambda m_1. \quad (2)$$

Количество теплоты, отданное водой при охлаждении ее до 0°C :

$$Q = c_2 m_2 (t_2 - 0). \quad (3)$$

Уравнение теплового баланса: $Q = Q_1 + Q_2$. (4)

Объединяя (1)-(4), получаем: $m_1 = \frac{m_2 c_2 (t_2 - 0)}{c_1 (0 - t_1) + \lambda} \approx 1$ кг.

Пример 2.32. В сосуде лежит кусок льда. Температура льда $t_1 = 0^\circ \text{C}$. Если сообщить ему количество теплоты Q , то весь лёд растает и образовавшаяся вода нагреется до температуры $t_2 = 20^\circ \text{C}$. Какая доля льда k растает, если сообщить ему количество теплоты $q = \frac{Q}{2}$? Тепловыми потерями на нагрев сосуда пренебречь.

Решение. Если весь лед растаял и вся образовавшаяся из него вода нагрелась до температуры t_2 , то ему передано количество теплоты

$$Q = \lambda m + c m (t_2 - t_1),$$

где m – масса льда, λ – удельная теплота плавления льда, c – удельная теплоемкость воды.

Если растаял лед массой km , когда ему передано количество теплоты равное $\frac{Q}{2}$, то

$$\frac{Q}{2} = \lambda (km)$$

Два уравнения дают:

$$(2k - 1)\lambda = c(t_2 - t_1),$$

откуда

$$k = \frac{1}{2} \left[\frac{c}{\lambda} (t_2 - t_1) + 1 \right] \approx 0,63.$$

Пример 2.33. Необходимо расплавить лёд массой 0,2 кг, имеющий температуру 0 °С. Выполнима ли эта задача, если потребляемая мощность нагревательного элемента 400 Вт, тепловые потери составляют 30%, а время работы нагревателя не должно превышать 5 минут?

Количество теплоты, необходимое для плавления льда массой m ,

$$Q_1 = \lambda m = 66 \text{ кДж},$$

где λ – удельная теплота плавления льда.

Описанный нагреватель с КПД $\eta = 0,7$ и мощностью P за время t передает нагреваемому телу количество теплоты равным:

$$Q_2 = \eta Pt = 84 \text{ кДж}$$

Значит, $Q_1 < Q_2$, т.е. поставленная задача выполнима.

Пример 2.34. Какую массу воды можно нагреть до кипения при сжигании в костре $m=1,8$ кг сухих дров, если в окружающую среду рассеивается 95% тепла от их сжигания? Начальная температура воды $t_1=10$ °С, удельная теплота сгорания сухих дров $q = 8,3 \cdot 10^6$ Дж/кг.

Решение. Количество теплоты, выделяющееся при сгорании дров

$$Q_1 = qm$$

Количество теплоты, попадающее в нагреваемую воду по условию

$$Q_2 = 0,05 Q_1 = 0,05 qm$$

Количество теплоты необходимое для нагревания воды массы M до температуры $t_2=100^\circ\text{C}$

$$Q_3 = cM(t_2 - t_1)$$

Приравняв Q_2 и Q_3 , получим

$$M = \frac{0,05 qm}{c(t_2 - t_1)} \approx 2 \text{ (кг)}$$

Насыщенные пары. Испарение. Кипение. Влажность

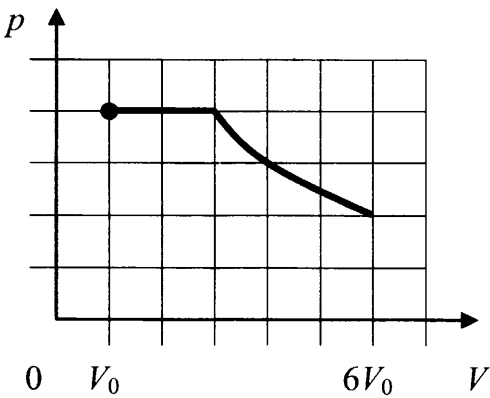
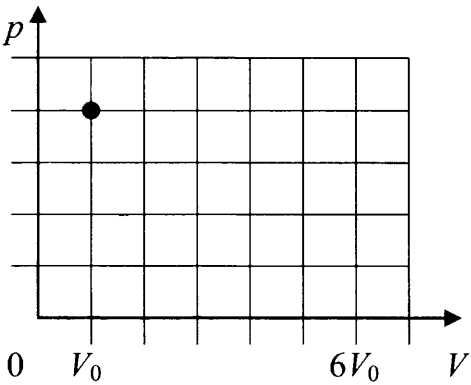
Хотя эта тема, изучаемая в школьном курсе, в основном, на качественном уровне, проверяется в ЕГЭ чаще всего в заданиях с выбором ответа, в открытом сегменте банке заданий ЕГЭ по физике имеется и несколько сложных заданий на эту тему.

Во-первых, они проверяют понимание того, что водяной пар ведет себя в определенных условиях как идеальный газ, а в других условиях как насыщенный пар находящийся в равновесии со своей жидкостью. В первом случае к нему применимо уравнение Менделеева – Клапейрона, а во втором при постоянной температуре давление его при сжатии не меняется.

Во-вторых, проверяется умение сочетать понятия, связанные с понятием «влажность воздуха» (парциальное давление водяного пара в воздухе, парциальное давление насыщенных паров в воздухе, точка росы) с уравнением Менделеева – Клапейрона, применяемого к водяным парам в воздухе.

В-третьих, требуется глубокое понимание процесс кипения жидкости, на одном из этапов которого образовавшаяся в жидкости полость начинает быстро заполняться паром, который становится насыщенным. Если температура в жидкости такова, что давление насыщенного пара больше внешнего атмосферного давления и давления столба жидкости, то пузырек раздувается и всплывает, вынося пар в окружающий воздух. Если давление насыщенного пара меньше, то зародыш пузырька схлопывается, и жидкость не кипит. Таким образом, объясняется зависимость температуры кипения от внешнего атмосферного давления, и прослеживается связь между зависимостью давления насыщенных паров от температуры и зависимостью температуры кипения от внешнего давления воздуха. Рассмотрим три примера.

Пример 2.35. В цилиндре под поршнем при комнатной температуре t_0 долгое время находится только вода и её пар. Масса жидкости в два раза больше массы пара. Первоначальное состояние системы показано точкой на pV -диаграмме. Медленно перемещая поршень, объём V под поршнем изотермически увеличивают от V_0 до $6V_0$. Постройте график зависимости давления p в цилиндре от объёма V на отрезке от V_0 до $6V_0$. Укажите, какими закономерностями Вы при этом воспользовались.



Решение. В начальном состоянии над водой находится насыщенный водяной пар, так как за длительное время в системе установилось термодинамическое равновесие.

Пока в цилиндре остается вода, при медленном изотермическом расширении пар остается насыщенным. Поэтому график $p(V)$ будет графиком константы, т. е. отрезком горизонтальной прямой. Количество воды в цилиндре при этом убывает. При комнатной

температуре концентрация молекул воды в насыщенном паре ничтожна по сравнению с концентрацией молекул воды в жидком агрегатном состоянии. Масса воды в два раза больше массы пара. Поэтому, во-первых, в начальном состоянии насыщенный пар занимает объём, практически равный V_0 . Во-вторых, чтобы вся вода испарилась, нужно объём под поршнем увеличить ещё на $2V_0$. Таким образом, горизонтальный отрезок описывает зависимость $p(V)$ на участке от V_0 до $3V_0$.

При $V > 3V_0$ под поршнем уже нет жидкости, все молекулы воды образуют уже ненасыщенный водяной пар, который можно на изотерме описывать законом Бойля–Мариотта: $pV = \text{const}$, т. е. $p \sim 1/V$. Графиком этой зависимости служит гипербола. Таким образом, на участке от $3V_0$ до $6V_0$ зависимость $p(V)$ изображается фрагментом гиперболы.

Таким образом на участке от V_0 до $3V_0$ давление под поршнем постоянно (давление насыщенного пара на изотерме). На участке от $3V_0$ до $6V_0$ давление под поршнем подчиняется уравнению Менделеева – Клапейрона. На участке от V_0 до $3V_0$ график $p(V)$ – горизонтальный отрезок прямой, на участке от $3V_0$ до $6V_0$ – фрагмент гиперболы (рис.).

Пример 2.36. Относительная влажность воздуха при $t = 36\text{ }^{\circ}\text{C}$ составляет 80%. Давление насыщенного пара при этой температуре $p_n = 5945\text{ Па}$. Какая масса пара содержится в 1 м^3 этого воздуха?

Решение. По определению относительной влажности, выражаемой в долях или в процентах $\varphi = \frac{p_{\text{пара}}}{p_n}$,

где $p_{\text{пара}}$ – парциальное давление паров воды, находящихся в данный момент времени в воздухе.

Применяя к водяным парам уравнение Менделеева-Клапейрона

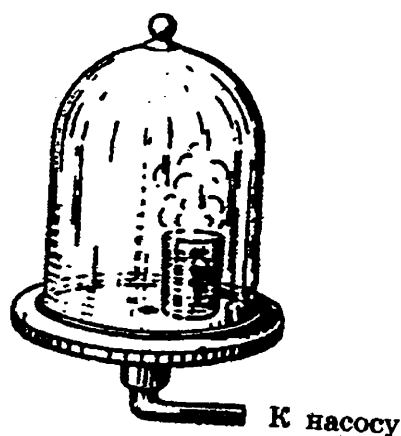
($M_{\text{H}_2\text{O}} = 0,018\text{ кг / моль}$) получаем искомую массу

$$pV = \frac{m}{M_{\text{H}_2\text{O}}}RT$$

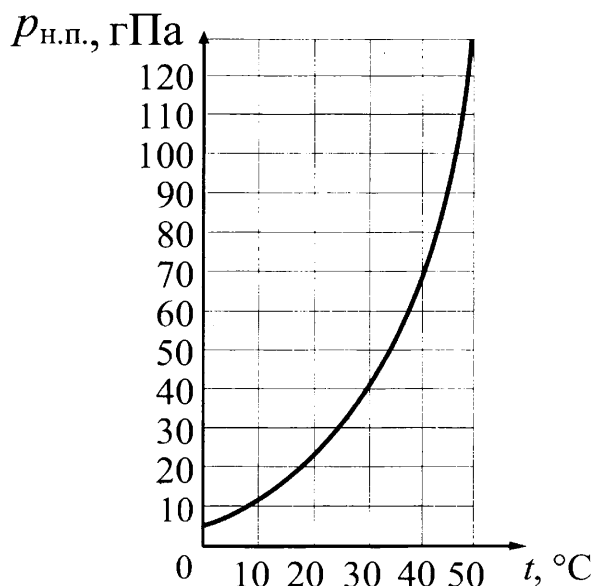
$$m = \frac{M_{\text{H}_2\text{O}}p_{\text{пара}}V}{RT} = \frac{M_{\text{H}_2\text{O}}\varphi p_n V}{RT} \approx 33(\text{г})$$

Пример 2.37. В опыте, иллюстрирующем зависимость температуры кипения от давления воздуха (рис. а), кипение воды под колоколом воздушного насоса происходит уже при комнатной температуре, если давление достаточно мало.

Используя график зависимости давления насыщенного пара от температуры (рис. б), укажите, какое давление воздуха нужно создать под колоколом насоса, чтобы вода закипела при $40\text{ }^{\circ}\text{C}$. Ответ поясните, указав, какие явления и закономерности Вы использовали для объяснения.



(а)



(б)

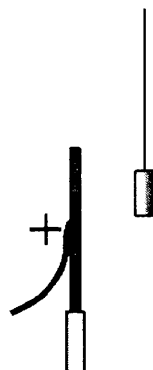
Решение. Кипением называется парообразование, которое происходит не только с поверхности жидкости, граничащей с воздухом, но и с поверхности пузырьков насыщенного пара, образующихся в толще жидкости. Образование пузырьков пара в жидкости возможно только в том случае, когда давление этого пара равно давлению столба жидкости $p_{\text{нас.п}} = p_{\text{атм}} + \rho gh$. Поскольку в сосуде $p_{\text{атм}} \gg \rho gh$, условие возникновения пузырьков $p_{\text{нас.п}} \approx p_{\text{атм}}$. Следовательно, чтобы вода закипела при 40°C , в соответствии с графиком давление воздуха под колоколом необходимо снизить до 70 гПа.

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Электризация, напряженность поля точечных зарядов

Многие явления электродинамики в школе изучаются на качественном уровне, поэтому содержание этой части курса физики часто ложится в основу заданий ЕГЭ, которые требуют развернутого ответа, но предназначены для проверки умений решать качественные задачи, то есть умения объяснять физические явления на качественном уровне с привлечением представлений определенных теорий или законов, которые известны выпускникам школы. К таким явлениям относятся электризация тел и поляризация металлов в присутствии источников электрического поля.

Пример 3.1. Около небольшой металлической пластины, укрепленной на изолирующей подставке, подвесили на шелковой нити легкую металлическую незаряженную гильзу. Когда пластину подсоединили к клемме высоковольтного выпрямителя, подав на нее положительный заряд, гильза пришла в движение. Опишите движение гильзы и объясните его.



Решение. В решении требуется понимание того, что присоединение пластины к клемме высоковольтного выпрямителя (источника высокого постоянного напряжения) приводит к натеканию на пластину положительного заряда подобно тому как происходит при касании наэлектризованной палочки к металлическому шарiku или иному телу в опытах по электростатике. Такая заряженная пластина создает вокруг себя электрическое поле. Под действием этого электрического поля произойдет *поляризация* гильзы (перераспределение свободных электронов в металле). Та ее сторона, которая ближе к пластине зарядится отрицательно, а противоположная сторона — положительно.

Поскольку *по закону Кулона* сила взаимодействия заряженных тел уменьшается с ростом расстояния между ними, притяжение к пластине левой стороны гильзы будет больше отталкивания правой стороны гильзы. Поэтому гильза будет притягиваться к пластине, пока не коснется ее.

В момент касания гильза зарядится положительно, так как часть электронов перейдет с гильзы на положительно заряженную пластину. *Положительно заряженная гильза оттолкнется от одноименно заряженной пластины.* Гильза отклонится вправо и зависнет в положении, когда равнодействующая сил тяжести, натяжения нити и электростатического отталкивания не станет равна нулю.

Выделенные курсивом ссылки на известные из курса физики закономерности и названия явлений обязательны для упоминания в ответе, которые пишется в произвольной форме.

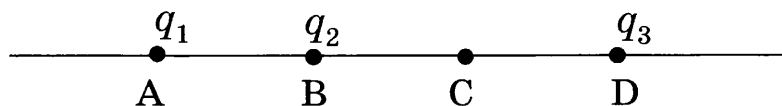
Количественное решение задач с использованием законов электростатики в заданиях с развернутым ответом посвящено, обычно, совокупному использованию:

- знаний выражения для напряженности электрического поля, созданного точечным зарядом Q в точке, удаленной от этого заряда на расстояние r ($E = \frac{kQ}{r^2}$, $k \approx 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$ — постоянная из закона Кулона);

- понимания того, что напряженность поля положительного точечного заряда направлена от него по линии соединяющей этот заряд с точкой пространства, в которой измеряется или рассчитывается поле;
- принципу суперпозиции электрических полей (суммарная напряженность поля нескольких источников равна векторной сумме напряженностей полей каждого источника $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_N$);
- использованию знаний по геометрии (теорема Пифагора, теорема косинусов, теорема синусов, умение вычислять проекции на оси вектора, являющегося суммой нескольких векторов, проекции которых известны).

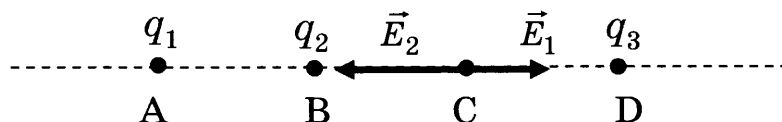
Рассмотрим примеры.

Пример 3.2. Точки A, B, C и D расположены на прямой и разделены равными промежутками A (см. рисунок). В точке A помещен заряд $q_1 = 8 \cdot 10^{-12}$ Кл, в точке B – заряд $q_2 = -5 \cdot 10^{-12}$ Кл. Какой заряд q_3 надо поместить в точку D , чтобы напряженность поля в точке C была равна нулю?



Решение.

Прежде всего необходимо нарисовать напряженности полей $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$, созданных зарядами, q_1 и q_2 , соответственно (рис.), с учетом знака этих зарядов.



Причем уже на этой стадии желательно проанализировать, как соотносятся длины этих векторов, или рассчитать количественно их модули, если это позволяет условие задачи. В данном случае, если $AB=BC=CD=a$ (м), получим

$$E_1 = \frac{kq_1}{r^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 8 \cdot 10^{-12}}{(2a)^2} = \frac{18 \cdot 10^{-3}}{a^2} \left(\frac{B}{м}\right) \text{ и } E_2 = \frac{kq_2}{r^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-12}}{a^2} = \frac{45 \cdot 10^{-3}}{a^2} \left(\frac{B}{м}\right)$$

Поэтому вектор $\vec{E}_1$ короче $\vec{E}_2$ на рисунке и два заряда создают поле, напряженность которого направлена влево. Значит напряженность поля, создаваемого зарядом q_3 , должна быть направлена вправо, то есть заряд $q_3 < 0$ (отрицательный). Если модуль напряженности создаваемого им поля в точке

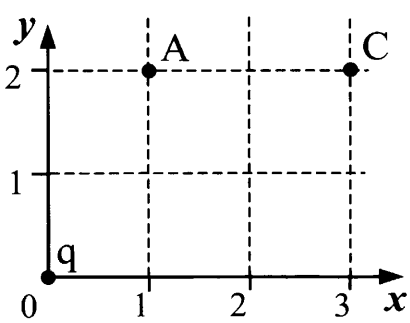
C будет равен $E_3 = E_2 - E_1 = \frac{27 \cdot 10^{-3}}{a^2} \left(\frac{B}{м}\right)$, то в сумме три напряженности создадут искомое поле $\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = 0$.

Значит точечный заряд q_3 в точке C на расстоянии a от него, создает поле, с напряженностью

$$E_3 = \frac{kq_3}{a^2} = \frac{9 \cdot 10^9 q_3}{a^2} = \frac{27 \cdot 10^{-3}}{a^2} \left(\frac{B}{м}\right)$$

Значит $q_3 = 3 \cdot 10^{-12}$ Кл.

Пример 3.3. Точечный заряд q , помещенный в начало координат, создает в точке А (см. рисунок) электростатическое поле напряженностью $E_1 = 65 \text{ В/м}$. Какова напряженность поля E_2 в точке С?



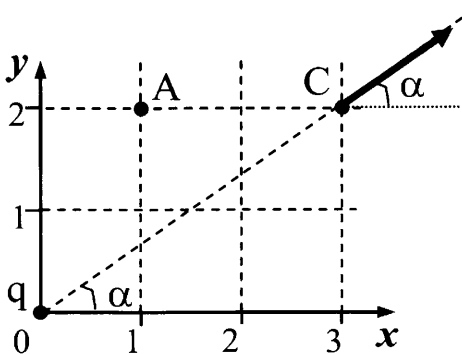
Решение. Напряженность электрического поля в точке С будет меньше по модулю, так как точка С удалена дальше, чем точка А, от заряда q , расположенного в начале координат и создающего поле.

$$E_A = \frac{kq}{r_A^2} = \frac{kq}{(OA)^2} \text{ и } E_C = \frac{kq}{r_C^2} = \frac{kq}{(OC)^2}, \text{ откуда } \frac{E_C}{E_A} = \frac{(OA)^2}{(OC)^2}.$$

Используя теорему Пифагора, находим

$$OA = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}; \quad OC = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$E_C = E_A \frac{(OA)^2}{(OC)^2} = 65 \cdot \frac{5}{13} = 25 \left(\frac{\text{В}}{\text{м}} \right)$$

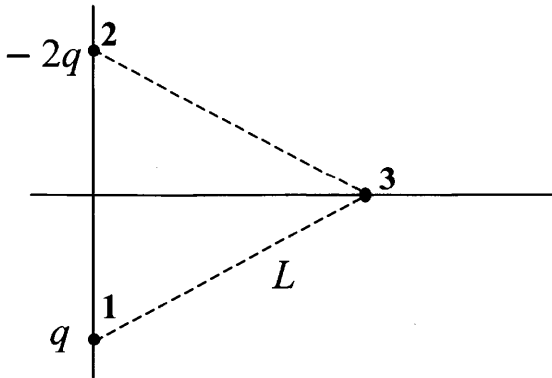


Однако напряженность поля – вектор, поэтому указание только модуля напряженности не является достаточным, необходимо указать направление вектора.

Из рисунка ясно, что

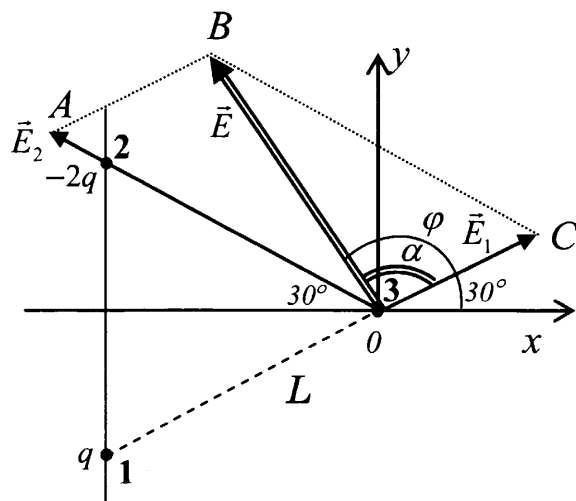
$\text{tg} \alpha = \frac{2}{3}$. Значит вектор напряженности в точке С, направлен под углом $\alpha = \arctg(2/3) \approx 34^\circ$.

Пример. 3.4. В двух вершинах (точках 1 и 2) равностороннего треугольника со стороной L (см. рисунок) помещены заряды q и $-2q$. Каковы направление и модуль вектора напряженности электрического поля в точке 3, являющейся третьей вершиной этого треугольника? Известно, что точечный заряд q создает на расстоянии L электрическое поле напряженностью $E = 10 \text{ мВ/м}$.



Решение.

Модуль напряженности поля, созданного зарядом q в т.3



$$E_q = \frac{kq}{L^2} = 10 \frac{мВ}{м}$$

Модуль напряженности поля, созданного зарядом $-2q$ в т.3

$$E_{-2q} = \frac{2kq}{L^2} = 2E_q = 20 \frac{мВ}{м}$$

Направления этих напряженностей показаны на рисунке. Для нахождения модуля суммарного вектора $\vec{E}$ и его направления можно использовать координатный метод, выбрав систему координат и учтя, что

$$E_x = E_{1x} + E_{2x}$$

$$E_y = E_{1y} + E_{2y}$$

$$E_{1x} = E_1 \cos 30^\circ - E_2 \cos 30^\circ$$

$$E_{2y} = E_1 \sin 30^\circ + E_2 \sin 30^\circ$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{E_y}{E_x}$$

Здесь φ угол между вектором $\vec{E}$ и осью x . Если $\operatorname{tg} \varphi < 0$, значит угол φ – тупой.

Однако можно найти эти величины и используя знания по геометрии. Угол между векторами $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ равен 120° , с учетом того, что треугольник **123** – равносторонний (см. рис.). Тогда угол BAO в параллелограмме $ABCO$ равен 60° . Тогда из треугольника BAO по теореме косинусов

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1 E_2 \cos 120^\circ} = \sqrt{100 + 400 - 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 0,5} \approx 17,3 (мВ / м)$$

А по теореме синусов из того же треугольника

$$\frac{E}{\sin 60^\circ} = \frac{E_1}{\sin(\angle BOA)}$$

$$\sin(\angle BOA) = \frac{E_1 \sin 60^\circ}{E} = \frac{10 \cdot 0,87}{17,3} \approx 0,5.$$

Откуда $\angle BOA = 30^\circ$. Тогда угол $\alpha = \angle ABO = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ$, тогда угол между вектором $\vec{E}$ и осью x равен $(\alpha + 30^\circ) = 150^\circ$.

Источником поля могут служить не только точечные заряды, или сферически симметричные тела (равномерно заряженные шары, сферы), поле которых вне этих тел рассчитывается также как поле точечного заряда с учетом того, что расстояние отсчитывается от центра сферы (шара). В школьном курсе рассматривается еще равномерно заряженная пластина и плоский конденсатор (две параллельные пластины, расположенные на малом расстоянии друг от друга и несущие заряды противоположного знака, но одинаковые по модулю). Поле таких объектов считается однородным. В этом случае воздействие зарядов на пластинах заменяют воздействием поля $\vec{E}$, созданного заряженными пластинами. На заряд q такое поле во всех рассматриваемых точках действует с силой $\vec{F} = q\vec{E}$.

Пример 3.5. Маленький шарик с зарядом $q = 4 \cdot 10^{-7}$ Кл и массой 3 г, подвешенный на невесомой нити с коэффициентом упругости 100 Н/м, находится между вертикальными пластинами плоского воздушного конденсатора. Расстояние между обкладками конденсатора 5 см. Какова разность потенциалов между обкладками конденсатора, если удлинение нити 0,5 мм?

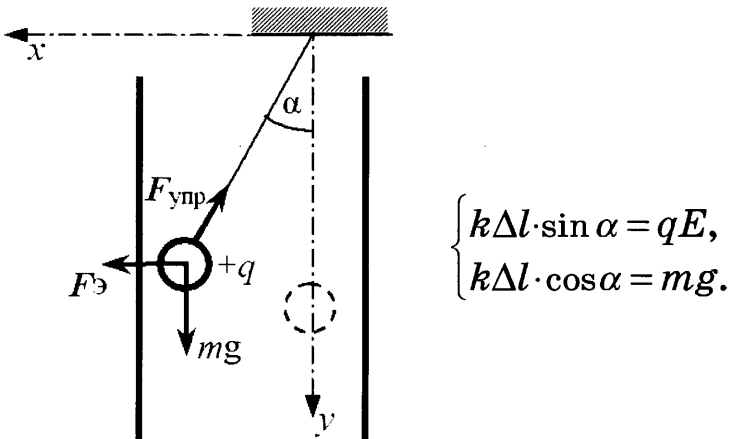
Решение.

Силы, действующие на шарик в условии равновесия, показаны на рисунке. Поле воздействует на шарик с силой $F_{\text{Э}} = qE$, растянутая нить с силой $F_{\text{упр}} = k\Delta l$ (в соответствии с законом Гука) и Земля с силой $F_{\text{тяж}} = mg$.

Условие равновесия определяется законом Ньютона

$$\vec{F}_{\text{тяж}} + \vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F}_{\text{Э}} = 0$$

В проекциях на горизонтальную и вертикальную оси это дает, соответственно



Чтобы избавиться от неизвестной величины угла отклонения нити, проще всего возвести оба равенства уравнения в квадрат и сложить их, что учетом свойства синуса и косинуса угла даст:

$$(k\Delta l)^2 = (mg)^2 + (qE)^2,$$

откуда

$$E = \frac{\sqrt{(k\Delta l)^2 - (mg)^2}}{q}.$$

Напряженность электрического поля в конденсаторе и разность потенциалов на его пластинах связаны соотношением: $U = Ed$

Тогда искомая величина
$$U = \frac{d \cdot \sqrt{(k\Delta l)^2 - (mg)^2}}{q} = 5000 \text{ В.}$$

Движение частиц в электрическом поле

Вторая группа заданий, требующих развернутого ответа, предполагает использование знаний по электростатике при описании движения частиц в электрическом поле, то есть, фактически, требует совместного использования представлений электростатики и механики. При этом, даже если частица движется ускоренно, считается, что потерь механической энергии не происходит, хотя исходя из представлений классической электродинамики, всякая ускоренно движущаяся частица должна терять энергию на излучение электромагнитных волн. Новизна задач о движении заряженных частиц в электрическом и далее магнитном поле состоит в том, что поле выступает в качестве объекта, действующего на частицу с некоторой силой. В механике, напомним, объектом, действующим на движущееся тело, был другое тело.

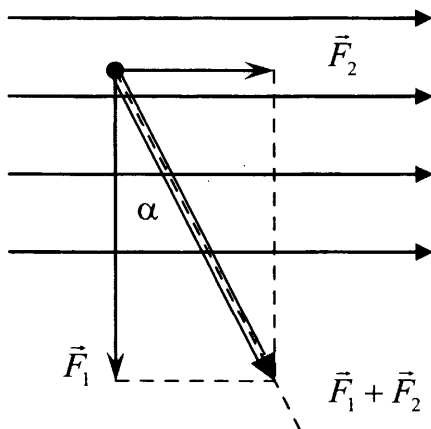
В заданиях ЕГЭ рассматривается движение частиц в однородном поле, т.е. поле, в каждой точке которого, сила, действующая на заряженную частицу, будет постоянна. Как известно «почти однородное поле» можно получить между пластинами конденсатора, если расстояние между пластинами существенно меньше размеров пластин. Поэтому в тексте задач будет часто встречаться слово конденсатор. Иногда речь будет идти об одной заряженной пластине, поле которой также однородно, если не приближаться к краям пластины и не удаляться от нее на расстояния сравнимые с размером пластины.

В задачах о движении заряженных частиц (тел) в электрическом поле, пренебрегают действием на них силы тяжести, если это элементарные частицы или иона, так как гравитационное действие на них Земли чрезвычайно мало по сравнению с воздействием даже слабых полей, создаваемых в технических устройствах для изучения полета частиц. Если в задаче речь идет о частицах (пылинка, капля, легкий шарик и т.п.), в которых пренебречь силой тяжести нельзя, то обычно задается масса этих частиц (тел).

Рассмотрим примеры.

Пример 3.6. Полый шарик массой $m = 0,4 \text{ г}$ с зарядом $q = 8 \text{ нКл}$ движется в однородном горизонтальном электрическом поле из состояния покоя. Траектория шарика образует с вертикалью угол $\alpha = 45^\circ$. Чему равен модуль напряженности электрического поля E ?

Решение. При таких соотношениях массы и заряда тела силой тяжести нельзя пренебречь. Поэтому тело движется под действием двух сил $\vec{F}_1 = m\vec{g}$ и силы воздействия электрического поля $\vec{F}_2 = q\vec{E}$ (рис.)



В соответствии со вторым законом Ньютона равнодействующая этих двух сил сообщает ему ускорение

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}{m}.$$

Так как шарик движется из состояния покоя, то вектор скорости будет совпадать с направлением ускорения, а значит с направлением равнодействующей двух сил

$$\vec{v} = \vec{a}t = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}{m}t$$

тело движется по прямой в направлении вектора ускорения, т.е. в направлении равнодействующей приложенных сил.

Траектория совпадает с направлением скорости тела, а значит, в данном случае и ускорения, и равнодействующей сил. По условию траектория тела прямая, образующая с вертикалью угол $\alpha = 45^\circ$, $\operatorname{tg} \alpha = 1$. Как видно из рисунка

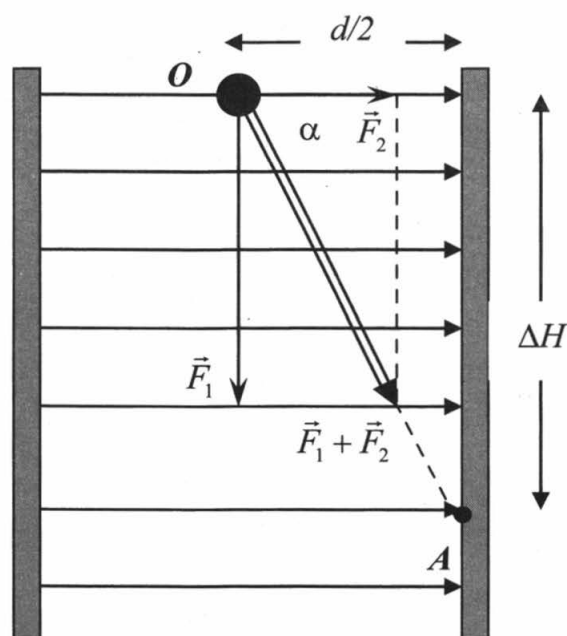
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_2}{F_1} = \frac{qE}{mg}.$$

Отсюда

$$E = \frac{mg \cdot \operatorname{tg} \alpha}{q} = \frac{mg}{q} = 0,5 \cdot 10^6 \text{ В/м} = 500 \text{ кВ/м}.$$

Пример 3.7. Конденсатор состоит из двух неподвижных, вертикально расположенных, параллельных, разноименно заряженных пластин. Пластины расположены на расстоянии $d = 5$ см друг от друга. Напряженность поля внутри конденсатора равна $E = 10^4$ В/м. Между пластинами на равном расстоянии от них помещен шарик с зарядом $q = 10^{-5}$ Кл и массой $m = 20$ г. После того как шарик отпустили, он начинает падать и ударяется об одну из пластин. Сколько времени пройдет до удара шарика об одну из пластин и на сколько уменьшится высота шарика Δh к моменту его удара?

Решение. Шарик движется под действием двух сил $\vec{F}_1 = m\vec{g}$ и силы воздействия электрического поля $\vec{F}_2 = q\vec{E}$ (рис.)



В соответствии со вторым законом Ньютона равнодействующая этих двух сил сообщает ему ускорение

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}{m}.$$

Модуль ускорения с учетом теоремы Пифагора

$$a = \frac{\sqrt{(mg)^2 + (qE)^2}}{m} = g \sqrt{1 + \frac{(qE)^2}{(mg)^2}}$$

Так как шарик движется из состояния покоя, то вектор скорости будет совпадать с направлением ускорения, а значит с направлением равнодействующей двух сил. Шарик будет двигаться по прямой в направлении вектора ускорения, т.е. в направлении равнодействующей приложенных сил. Траектория OA гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами длиной $d/2$ и ΔH . Как видно из рисунка

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_1}{F_2} = \frac{mg}{qE}$$

Значит шарик до удара сместится по вертикали на

$$\Delta H = \frac{d}{2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{dmg}{2qE} = 0,05(\text{м}) = 5(\text{см})$$

Время до удара можно определить из уравнения движения с ускорением a без начальной скорости по отрезку прямой

$$s = OA = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + (\Delta H)^2} = \frac{d}{2} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{d}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{mg}{qE}\right)^2}, \text{ так как } s = \frac{at^2}{2}.$$

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{d \sqrt{1 + \left(\frac{mg}{qE}\right)^2}}{g \sqrt{1 + \frac{(qE)^2}{(mg)^2}}}} = \sqrt{\frac{dm}{qE}} = 0,1(\text{с})$$

Можно, естественно, получить аналогичный результат, рассмотрев перемещение вдоль горизонтальной оси с ускорением $a_x = \frac{qE}{m}$ на расстояние $\frac{d}{2}$.

Пример 3.8. Отрицательно заряженная пластина, создающая вертикально направленное однородное электрическое поле напряженностью $E = 10^4$ В/м, укреплена на горизонтальной плоскости. На нее с высоты $h = 10$ см падает шарик массой $m = 20$ г, имеющий положительный заряд $q = 10^{-5}$ Кл. Какой импульс шарик передаст пластине при абсолютно упругом ударе?

Решение. Движение шарика происходит под действием сил тяжести и силы воздействия поля, сонаправленной с силой тяжести. Поэтому тело приобретет ускорение

$$a = \frac{mg + Eq}{m} = g + \frac{Eq}{m}$$

Соответственно, время падения с высоты h скорости рассчитываем из соотношения

$$h = \frac{at^2}{2}, \text{ т.е. } t = \sqrt{\frac{2h}{a}}$$

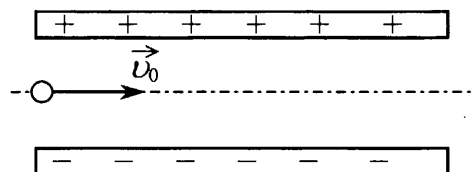
За это время двигаясь равноускоренно шарик приобретет скорость

$$v = at = a\sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{2ha} = \sqrt{2h\left(g + \frac{qE}{m}\right)}$$

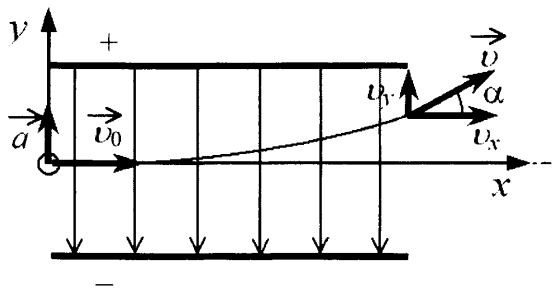
При абсолютно упругом ударе шарик отскочет от пластины и изменение его импульса составит :

$$\Delta p = 2mv = 2m\sqrt{2h\left(g + \frac{qE}{m}\right)} = \sqrt{8m^2gh + 8mqE} \approx 0,14 \text{ (кг} \cdot \text{м / с)}$$

Пример 3.9. Электрон влетает в плоский конденсатор со скоростью v_0 ($v_0 \ll c$), параллельно пластинам (см. рисунок), расстояние между которыми d . На какой угол отклонится при вылете из конденсатора вектор скорости электрона от первоначального направления, если конденсатор заряжен до разности потенциалов $\Delta\phi$? Длина пластин L ($L \gg d$).



Решение. Напряженность однородного поля между пластинами (рис.) направлена вниз, поэтому на электрон в ходе полета со стороны электрического поля конденсатора действует постоянная сила, равная по модулю $F = Ee$ и направленная вверх. Силой тяжести пренебрегаем.



Напряженность и разность потенциалов в однородном поле связан между собой соотношением

$$E = \frac{\Delta\phi}{d}$$

Под действием постоянной силы электрон будет двигаться также как камень, брошенный горизонтально, под действием силы тяжести, то есть по параболе, которая может закончиться на конце верхней пластины, а может и ниже нее, в зависимости от силы $\vec{F}$. В системе отсчета, показанной на рисунке движение вдоль оси x равномерное со скоростью v_x , а вдоль оси y – равноускоренное с нулевой начальной скоростью и с ускорением $a = \frac{F}{m} = \frac{Ee}{m}$, направленным вверх (II закон Ньютона)

Для нахождения угла отклонения скорости электрона от горизонтального

направления нужно знать значения проекции скорости v_y на ось y в момент вылета из пластин. При равноускоренном движении вдоль оси y

$$v_y = at,$$

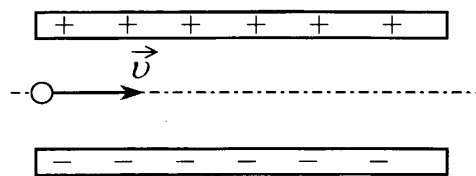
где t – время полета электрона между пластинами, определяемой длиной пластин L и скоростью v_x движения вдоль оси x

$$t = \frac{L}{v_0}.$$

Поэтому

$$v_y = at = \frac{Ee}{m} \cdot \frac{L}{v_0}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{EeL}{mv_0^2} = \frac{\Delta \phi eL}{dmv_0^2}$$



Пример 3.10. Пылинка, имеющая массу 10^{-8} г и заряд $(-1,8) \cdot 10^{-13}$ Кл, влетает в электрическое поле конденсатора в точке, находящейся посередине между его пластинами (см. рисунок). Чему должна быть равна минимальная скорость, с которой влетает пылинка в конденсатор, чтобы она смогла пролететь его насквозь? Длина пластин конденсатора 10 см, расстояние между пластинами 1 см, напряжение на пластинах конденсатора 5000 В. Система находится в вакууме.

Длина пластин конденсатора 10 см, расстояние между пластинами 1 см, напряжение на пластинах конденсатора 5000 В. Система находится в вакууме.

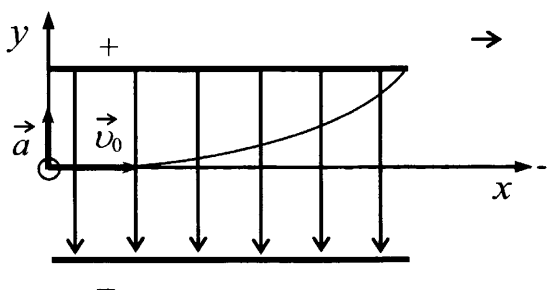
Решение. Напряженность однородного поля между пластинами (рис.) направлена вниз, поэтому на пылинку в ходе полета со стороны электрического поля конденсатора действует постоянная сила, равная по модулю $F_{эл} = Eq$ и направленная вверх. Напряженность и разность потенциалов в однородном поле связаны между собой соотношением

$$E = \frac{U}{d}$$

Поэтому
$$F_{эл} = \frac{Uq}{d} = \frac{5000 \cdot 1,8 \cdot 10^{-14}}{0,01} \approx 9 \cdot 10^{-9} (H)$$

Кроме того действует сила тяжести $F_{тяж} = 10^{-10} H$, как видно из числовых значений модулей сил, силой тяжести можно пренебречь.

Под действием постоянной силы $F_{эл}$ пылинка будет двигаться также как камень, брошенный горизонтально, под действием силы тяжести, то есть по параболе, которая должна закончиться на конце верхней пластины, если пылинка пролетает сквозь конденсатор.



В системе отсчета, показанной на рисунке движение вдоль оси x равномерное со скоростью v_0 , а вдоль оси y – равноускоренное с нулевой начальной скоростью и с ускорением

$$a = \frac{F}{m} = \frac{E|q|}{m},$$

направленным вверх (II закон Ньютона)

За время пролета t вдоль оси x пылинка смещается на длину пластин L и двигаясь равномерно со скоростью v_0

$$L = v_0 t.$$

Вдоль оси y , двигаясь равноускоренно без начальной скорости на величину

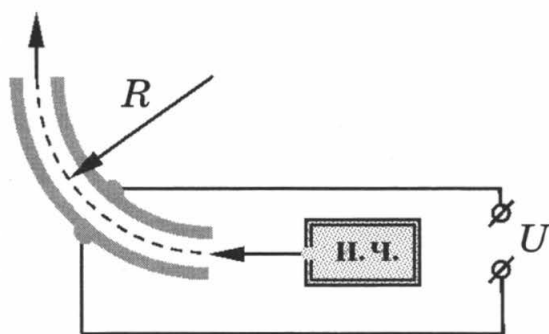
$$\frac{d}{2} = \frac{at^2}{2}$$

Исключая из этих трех уравнений t и a , получим

$$v_0 = \frac{L}{d} \sqrt{\frac{U|q|}{m}} \approx 95 \text{ (м / с)}$$

Пример 3.11. На рисунке показана схема устройства для предварительного отбора заряженных частиц для последующего детального исследования.

Устройство представляет собой конденсатор, пластины которого изогнуты дугой радиуса $R \approx 50$ см. Предположим, что в промежуток между обкладками конденсатора из источника заряженных частиц (и.ч.) влетают ионы с зарядом $-e$, как показано на рисунке. Напряженность электрического поля в конденсаторе по модулю равна 50 кВ/м. Скорость ионов $2 \cdot 10^5$ м/с. Ионы с каким значением массы пролетят сквозь конденсатор, не коснувшись его пластин? Считать, что расстояние между обкладками конденсатора мало, напряженность электрического поля в конденсаторе всюду одинакова по модулю, а вне конденсатора электрическое поле отсутствует. Влиянием силы тяжести пренебречь.



Решение.

Пусть q , m и v — соответственно заряд, масса и скорость иона, E — напряженность электрического поля

На ион в ходе полета действует только электрическое поле напряженности E с силой

$$F = qE,$$

направленной в силу конструкции установки по радиусу окружности. Эта сила сообщает иону в конденсаторе центростремительное ускорение

$$a_{цс} = \frac{v^2}{R}$$

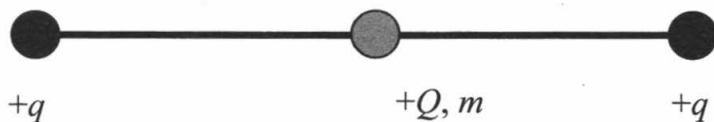
По второму закону Ньютона для движения по материальной точки окружности

$$qE = m \frac{v^2}{R}.$$

$$\text{Отсюда: } m = \frac{RqE}{v^2} = \frac{ReE}{v^2} = \frac{0,5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^4}{4 \cdot 10^{10}} = 10^{-25} \text{ (кг)}.$$

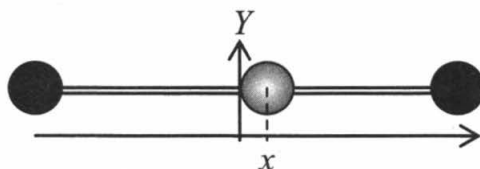
Встречаются в банке ЕГЭ и задания, где знание воздействия однородного поля на заряд требуется сочетать с умением определять период гармонических колебаний в различных колебательных системах. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 3.12. По гладкой горизонтальной направляющей длины 2ℓ скользит бусинка с положительным зарядом $Q > 0$ и массой m . На концах направляющей находятся положительные заряды $q > 0$ (см. рисунок). Бусинка совершает малые колебания относительно положения равновесия, период которых равен T .



Чему будет равен период колебаний бусинки, если ее заряд увеличить в 2 раза?

Решение. Если длина спицы $2l$, а смещение бусинки x относительно центра спицы мало ($|x| \ll l$) (см. рис.),



то силу действующую на бусинку можно представить в соответствии с законом Кулона в следующем виде

$$F_x = k \frac{Qq}{(l+x)^2} - k \frac{Qq}{(l-x)^2} = kQq \frac{(l-x)^2 - (l+x)^2}{(l+x)^2(l-x)^2} = -kQq \frac{4lx}{(l+x)^2(l-x)^2} = -4lkQq \frac{x}{(l^2 - x^2)^2}$$

Раз бусинка совершает гармонические колебания, значит сила, действующая на бусинку в разных положениях и стремящаяся вернуть ее в положение равновесия, должна быть пропорциональна смещению бусинки относительно положения равновесия, как при колебании горизонтального пружинного маятника, у которого пропорциональность возвращающей силы смещению выполняется в силу закона Гука (см. Главу 1)

Для бусинки такое соотношение выполняется приближенно, для того, чтобы показать это, преобразуем полученное для «возвращающей» силы, действующей на бусинку следующим образом

$$F_x = -4lkQq \frac{x}{(l^2 - x^2)^2} = -4lkQq \frac{x}{l^4 \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)^2}$$

Так как $|x| \ll l$, то $\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) \approx 1$, поэтому

$$F_x \approx -4lkqQ \frac{x}{(l^2)^2} = -\frac{4kQql}{l^4} x = -\frac{4kQq}{l^3} x$$

По второму закону Ньютона $F_x = ma$

Как известно из теории гармонических колебаний, если при движении тела для ускорения и координаты тела выполняется соотношение

$$a + \omega^2 x = 0,$$

то его координата меняется по закону гармонических колебаний $x = x_0 \cos \omega t$,

то есть период ее равен $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Для бусинки

$$ma + \frac{4kQq}{l^3} x = 0,$$

значит

$$a + \frac{4kQq}{ml^3} x = 0.$$

Это означает, что при малых отклонениях от положения равновесия бусинка

действительно может совершать колебания для которых $\omega^2 = \frac{4kQq}{ml^3}$ и

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4kQq}{ml^3}}} = \frac{\pi\sqrt{m}}{\sqrt{kQq}} \sqrt{l^3}$$

Таким образом, при увеличении заряда в 2 раза, период колебаний уменьшится в $\sqrt{2}$ раз.

Пример 3.13. Полый металлический шарик массой 3 г подвешен на шелковой нити длиной 50 см над положительно заряженной плоскостью, создающей однородное электрическое поле напряженности $2 \cdot 10^6$ В/м. Электрический заряд шарика отрицателен и по модулю равен $6 \cdot 10^{-8}$ Кл. Определите циклическую частоту свободных гармонических колебаний данного маятника.

Шарик будет двигаться под действием силы натяжения нити, силы тяжести и постоянной электростатической силы притяжения плоскости, равное qE . Такое движение эквивалентно движению под действием силы тяжести равной

$m(g + \frac{qE}{m})$, то есть движению с изменившимся ускорением свободного падения $g_{эфф} = (g + \frac{qE}{m})$. Как известно, такое движение шарика – это гармонические колебания. Если под действием силы тяжести mg , период колебаний

$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, то под действием увеличенной силы

$$T_{эфф} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_{эфф}}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + \frac{qE}{m}}}$$

Таким образом, искомая циклическая частота колебаний

$$\omega = \frac{2\pi}{T_{эфф}} = \sqrt{\frac{g + \frac{qE}{m}}{l}} = \sqrt{\frac{10 + \frac{6 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^{-3}}}{0,5}} \approx 10 \text{ (с}^{-1}\text{)}.$$

ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

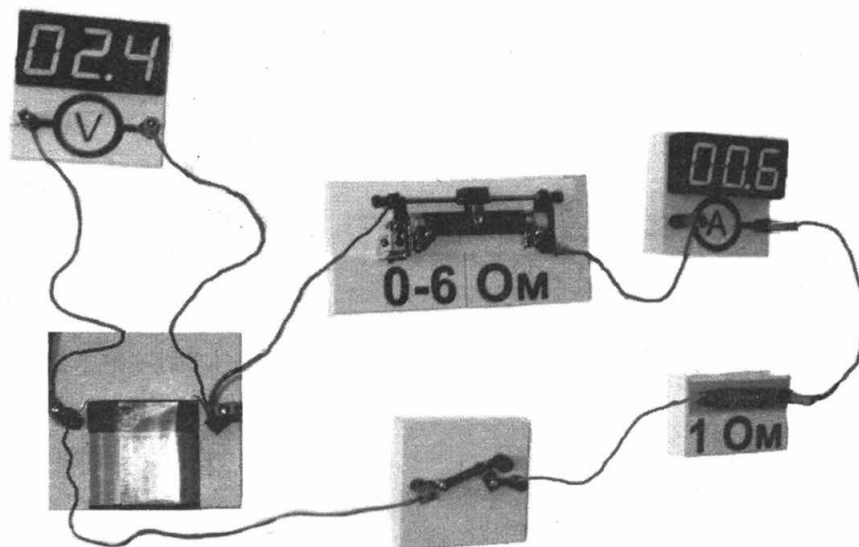
Законы постоянного тока (закон Ома для участка цепи, зависимость сопротивления от геометрии проводника, закон Ома для полной цепи, закономерности протекания тока в участках цепи с параллельным и последовательным соединением проводников, закон Джоуля – Ленца) проверяются с использованием заданий с выбором ответа и заданий на соответствие. В заданиях, требующих развернутого решения, проверка понимания этих закономерностей усложняется:

- включением фотографий элементов цепи и приборов, с которых нужно снимать показания;
- отображением данных по исследованию цепи в виде графиков;
- одновременным использованием нескольких законов;
- включением в цепь таких элементов как диод или иных элементов с нелинейной зависимостью между силой тока и напряжением через элемент;
- использованием таких элементов знаний как КПД устройства или цепи постоянного тока;
- включением в цепи постоянного тока таких элементов как конденсатор, требующих комбинирования знаний законов цепей постоянного и электростатики;
- сочетанием законов постоянного тока (например, закона Джоуля – Ленца) с элементами термодинамики.

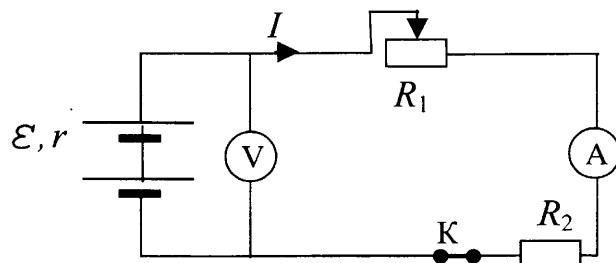
Рассмотрим примеры комбинирования умения анализировать электрические цепи, различные способы представления информации и знаний из разных разделов физики на конкретных примерах.

Закон Ома для участка цепи и для полной цепи

Пример. 3.14. На фотографии изображена электрическая цепь, состоящая из резистора, реостата, ключа, цифровых вольтметра, подключенного к батарее, и амперметра. Составьте принципиальную электрическую схему этой цепи, и, используя законы постоянного тока, объясните, как изменятся (увеличится или уменьшится) сила тока в цепи и напряжение на батарее при перемещении движка реостата в крайнее правое положение.



Решение. В заданиях по цепям постоянного тока, даже если об этом прямо не сказано в условии обязательно следует нарисовать электрическую схему цепи (если она не приводится в условии). В данном случае схема цепи, учитывающая внутреннее сопротивление батареи, показана на рисунке. Направление тока соответствует его протеканию от клеммы «+» источника тока к клемме «-».



Если не оговорено особо амперметр и вольтметр в цепи считаются идеальными, то есть ток через вольтметр не течет, а сопротивление амперметра пренебрежимо мало.

Сила тока в цепи определяется законом Ома для замкнутой (полной) цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + r}.$$

При перемещении движка реостата вправо его сопротивление уменьшается, что приводит к уменьшению полного сопротивления цепи. Сила тока в цепи при этом растет

В соответствии с законом Ома для участка цепи напряжение, измеряемое вольтметром: $U = I(R_1 + R_2)$. Нетрудно показать с использованием выражения для закона Ома для полной цепи, что $I(R_1 + R_2) = \mathcal{E} - Ir$, поэтому показания вольтметра

$$U = \mathcal{E} - Ir$$

с ростом силы тока уменьшаются.

Аналогично решается задача, в которой схема цепи приведена сразу (рис. 16) и требуется указать, как будут изменяться показания приборов при перемещении движка реостата *вправо*.

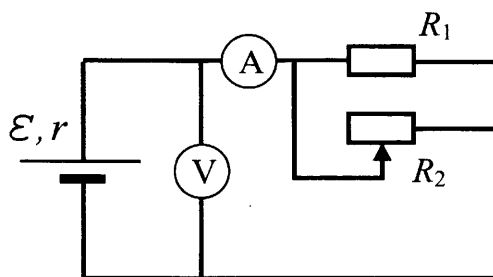
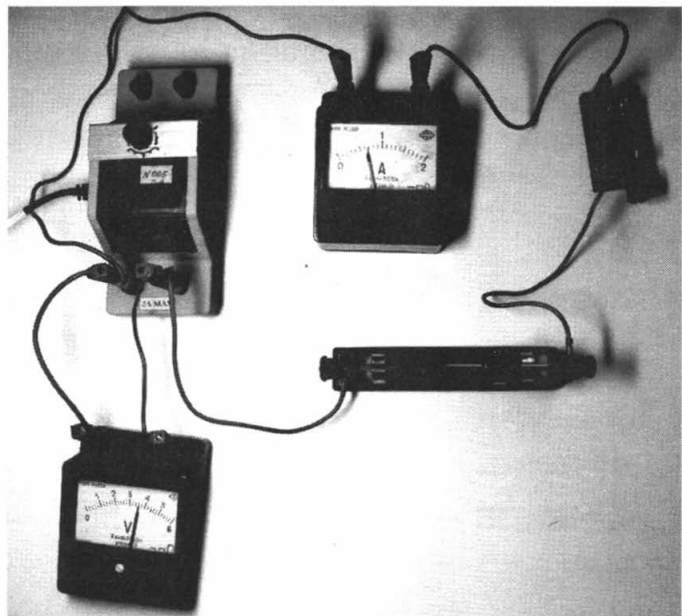


Рис. 16

Усложнение состоит только в том, что реостат соединен параллельно с резистором, а не последовательно как в *Примере 3.14*. Однако, ясно, что увеличение сопротивления резистора R_2 , соединенного параллельно с другим резистором тоже приводит к росту сопротивления участка цепи, содержащего два резистора. В случае уменьшения сопротивления R_2 сопротивление участка будет уменьшаться, в частности, когда движок реостата сместится в крайнее правое положение, и $R_2 = 0$, весь ток пойдет через проводник с нулевым сопротивлением и сопро-

тивление участка будет равно нулю. Поэтому в данном случае сила тока в цепи $I = \frac{\mathcal{E}}{r + R}$ увеличивается, а напряжение на источнике тока (см. Пример 3.14) $U = \mathcal{E} - Ir$ уменьшается.

В ряде заданий банка ЕГЭ электрическая цепь на фотографии служила источником информации для расчетов. Требовалось снять показания с приборов при двух положениях движка реостата или двух положениях ключа. Однако некачественное типографическое исполнение вариантов на экзамене служило причиной ошибок учащихся, поэтому в настоящее время, такие фото чаще всего служат иллюстрацией текста, показания приборов дублируются в тексте. Однако встречаются и задания, когда делаются выноски с укрупнением фрагмента фотографии.



Пример 3.15. При изучении закона Ома для полной электрической цепи ученик исследовал зависимость напряжения на полюсах источника тока от силы тока во внешней цепи (см. рисунок).

Внутреннее сопротивление источника не зависит от силы тока. Сопротивление вольтметра велико, сопротивление амперметра пренебрежимо мало.

При силе тока в цепи 1 А вольтметр показывал напряжение 4,4 В, а при силе тока 2 А – напряжение 3,3 В.

Определите, какую силу тока покажет амперметр при показаниях вольтметра, равных 1,0 В.

Решение. Используя закон Ома для полной цепи и закон Ома для участка цепи для двух положений движка реостата, получим систему уравнений

$$\begin{cases} U_1 = \mathcal{E} - I_1 r \\ U_2 = \mathcal{E} - I_2 r \end{cases}$$

В ней 2 уравнения и 2 неизвестных: значение внутреннего сопротивления источника r и ЭДС источника $\mathcal{E}$. Решая ее, получим

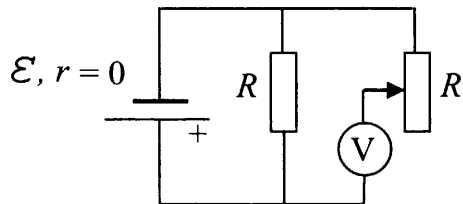
$$r = \frac{U_1 - U_2}{I_2 - I_1} = \frac{1,1 \text{ В}}{1 \text{ А}} = 1,1 \text{ Ом}$$

$$\mathcal{E} = U_1 + I_1 r = 4,4 \text{ В} + 1,1 \text{ В} = 5,5 \text{ В}$$

Используя вычисленные значения и используя то же соотношение $U_3 = \mathcal{E} - I_3 r$ вычисляем силу тока при третьем положении движка реостата

$$I_3 = \frac{\mathcal{E} - U_3}{r} = \frac{4,5 \text{ В}}{1,1 \text{ Ом}} \approx 4,1 \text{ А}$$

Пример 3.16. В схеме на рисунке сопротивление резистора и полное сопротивление реостата равны R , ЭДС батареи равна E , её внутреннее сопротивление ничтожно ($r = 0$). Как ведут себя (увеличиваются, уменьшаются, остаются постоянными) показания идеального вольтметра при перемещении движка реостата из крайнего верхнего в крайнее нижнее положение? Ответ поясните, указав, какие физические закономерности вы использовали для объяснения.



Решение. Сопротивление идеального вольтметра считается бесконечно большим. Это означает, что через него и через реостат при любом положении движка реостата ток не течет, и напряжение на нем равно напряжению на резисторе. Задействованная обмотка реостата служит лишь проводом конечного сопротивления для подключения к концу резистора.

Напряжение на резисторе при нулевом внутреннем сопротивлении источника равно ЭДС источника, так как, используя закон Ома для полной цепи и закон Ома для участка цепи можно показать, что напряжение на источнике (равное напряжению на резисторе) при нулевом внутреннем сопротивлении источника равно

$$U_R = IR = \frac{ER}{r + R} = E$$

Таким образом, при любом положении движка реостата показания вольтметра равны ЭДС источника E .

Различия между идеальными и неидеальными измерительными приборами практически не рассматривается в школьном курсе физики. Поэтому задания требующие понимания процессов происходящих в цепи при бесконечном и конечном сопротивлениях идеального и неидеального вольтметра, конечном и нулевом сопротивлении неидеального и идеального амперметра представляет определенные трудности для учащихся. В случае неидеальных измерительным приборов наиболее простым является решение при котором, последовательно с этими приборами включаются резисторы R_V и R_A , а сами приборы на схеме считаются идеальными. Рассмотрим несколько примеров на эту тему.

Пример 3.17. Одни и те же элементы соединены в электрическую цепь сначала по схеме 1, а затем по схеме 2 (см. рисунок). Сопротивление резистора равно R , сопротивление амперметра $\frac{1}{100} R$, сопротивление вольтметра $9R$. Найдите отношение

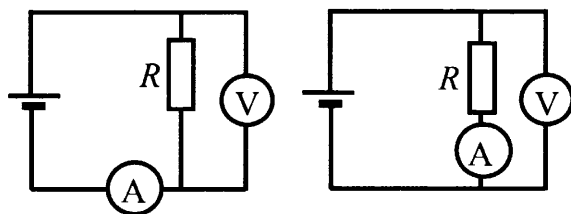


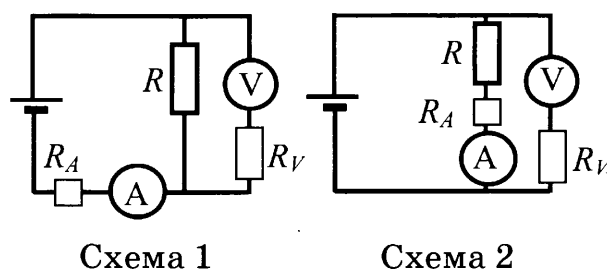
Схема 1

Схема 2

$\frac{I_2}{I_1}$ показаний амперметра в схемах. Внутренним

сопротивлением источника и сопротивлением проводов пренебречь.

Решение. Пусть R_A – сопротивление амперметра, R_V – сопротивление вольтметра, $\mathcal{E}$ – ЭДС источника. Включим в схемы цепей (рис.) резисторы, заменяющие внутренние сопротивления измерительных приборов. Показания вольтметра при этом равны $U_V = I_V R_V$, а показания амперметра I_A .



В схеме 1 сопротивление участка цепи, содержащего вольтметр и резистор R ,

$$R_1 = \frac{R R_V}{R + R_V} = 0,9R.$$

Ток через амперметр определяется с помощью закона Ома для замкнутой

цепи:
$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_A + R_1} = \frac{\mathcal{E}}{0,01R + 0,9R} = \frac{100}{91} \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

В схеме 2 напряжение на источнике, а значит и на амперметре равно ЭДС источника, т.к. внутреннее сопротивление источника тока пренебрежимо мало:

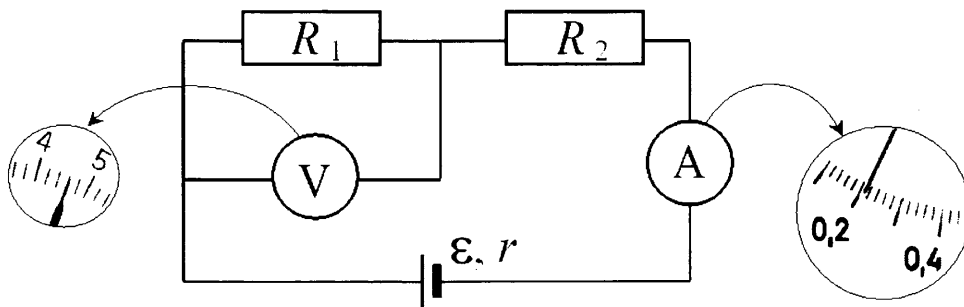
$$U_{\text{ист}} = \mathcal{E} - Ir = \mathcal{E}$$

Тогда

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_A + R} = \frac{\mathcal{E}}{1,01R} = \frac{100}{101} \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

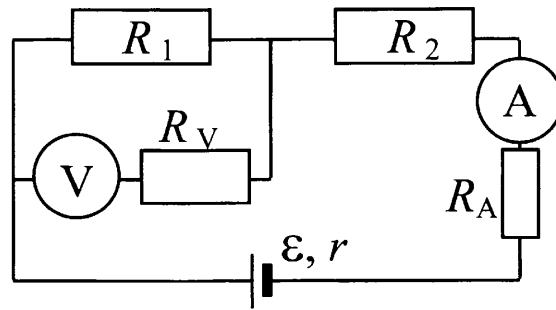
Искомое отношение сил тока
$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{91}{101} \approx 0,9.$$

Пример 3.18. При проведении лабораторной работы ученик собрал электрическую цепь по схеме на рисунке. Сопротивления R_1 и R_2 равны 20 Ом и 150 Ом соответственно. Сопротивление вольтметра равно 10 кОм, а амперметра – 0,4 Ом. ЭДС источника равна 36 В, а его внутреннее сопротивление – 1 Ом.



На рисунке показаны шкалы приборов с показаниями, которые получил ученик. Исправны ли приборы или же какой-то из них даёт неверные показания?

Решение. Перечертим схему цепи с учетом неидеальности измерительных приборов.



Вольтметр и резистор R_1 соединены параллельно. Следовательно, сопротивление участка, содержащего вольтметр ищем по формуле для сопротивления двух параллельно соединенных резисторов

$$\frac{1}{R_{\text{общ}}} = \frac{1}{R_V} + \frac{1}{R_1}.$$

Отсюда $R_{\text{общ}} = \frac{R_1 R_V}{R_V + R_1} = \frac{20 \cdot 10000}{10020} \approx 19,96 \approx 20 \text{ (Ом)}.$

Амперметр и резистор R_2 соединены с этим участком последовательно. Следовательно, по закону Ома для полной цепи сила тока через амперметр

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + R_A + r} = \frac{36}{20 + 150 + 0,4 + 1} = \frac{36}{171,4} \approx 0,21 \text{ (А)}.$$

Амперметр показывает силу тока около 0,22 А. Цена деления шкалы амперметра 0,02 А, что больше, чем отклонение показаний от расчёта. Следовательно, *амперметр даёт верные показания.*

Показания вольтметра это $U_V = I_V \cdot R_V$. Ток на участке с вольтметром разветвится так, что сила тока через резистор и вольтметр будут обратно пропорциональны сопротивлениям

$$\frac{I_1}{I_V} = \frac{R_V}{R_1}$$

сумма сил тока через параллельные участки равна силе тока до разветвления

$$I = I_1 + I_V = I_V \left(1 + \frac{I_1}{I_V}\right) = I_V \left(1 + \frac{R_V}{R_1}\right)$$

Откуда $I_V = \frac{I}{\left(1 + \frac{R_V}{R_1}\right)}$, а показания вольтметра

$$U_V = I_V \cdot R_V = \frac{I R_V}{\left(1 + \frac{R_V}{R_1}\right)} = \frac{0,21 \cdot 10000}{1 + \frac{10000}{20}} \approx 4,19 \text{ (В)}$$

Вольтметр же показывает напряжение 4,6 В. Цена деления вольтметра 0,2 В, что в два раза меньше отклонения показаний.

Следовательно, *вольтметр даёт неверные показания.*

При оценке показаний вольтметра можно было сразу оценить $\frac{I_1}{I_V} = \frac{R_V}{R_1} = 500$

и считать, что ток $I = 0,21 \text{ А}$ течет только через резистор $R_1 = 20 \text{ Ом}$.

Напряжение на нем равно напряжению на вольтметре. Это дало бы оценку $U_V = I_V R_V = U_{R_1} = I \cdot R_1 = 0,21 \cdot 20 = 4,2 \text{ (В)}$ и ответ бы не изменился.

Работа и мощность электрического тока

Конечно, если уметь рассчитывать силу тока во всех элементах цепи, то зная сопротивление элемента цепи постоянного тока, не представляет труда рассчитать мощность тока $P = I^2 R$ и работу тока $A = Pt = I^2 R t$ за время t . В обычных резисторах работа тока, эквивалентна количеству теплоты выделившейся на этом резисторе за время t , что составляет содержание закона Джоуля – Ленца:

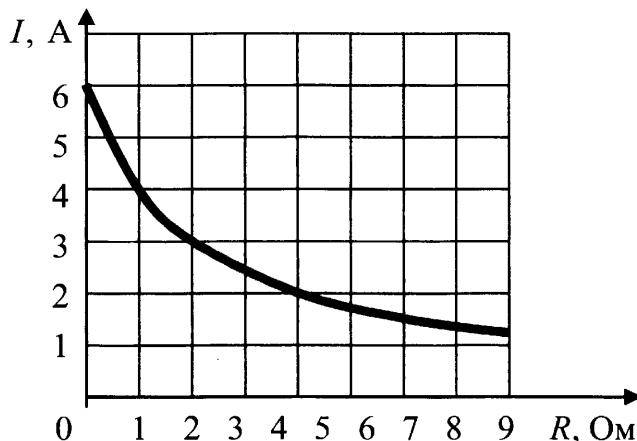
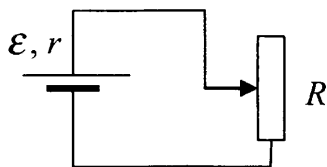
$$Q = I^2 R t$$

В случае неподвижных металлических проводников, в которых не протекают химические реакции мощность тока может быть выражена с учетом закона Ома для участка цепи в виде $P = I^2 R = IU = \frac{U^2}{R}$. Однако в общем случае (для произвольных проводников, например для движущейся в магнитном поле обмотке электродвигателя) работа тока, эквивалентная работе электрического поля в проводниках перемещающих заряды должна быть записана как

$$A = U \Delta q = U I t$$

В заданиях ЕГЭ, связанных с анализом протекания токов в электрических цепях, формулы для расчета работы тока, его мощности, количества теплоты выделяющейся в элементах цепи являются еще одним элементом усложнения условия, приводящим к необходимости составлять и решать систему уравнений с большим числом неизвестных. Рассмотрим ряд примеров.

Пример. 3.19. Реостат R подключен к источнику тока с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r (см. рисунок). Зависимость силы тока в цепи от сопротивления реостата представлена на графике. Найдите сопротивление реостата, при котором мощность тока, выделяемая на внутреннем сопротивлении источника, равна 8 Вт.



Решение. График $I(R)$ позволяет определить два значения силы тока I_1 и I_2 при двух разных значениях R_1 и R_2 сопротивления реостата. Это позволяет составить систему двух уравнений для вычисления $\mathcal{E}$ и r с использованием закона Ома для полной цепи:

$$\begin{cases} \mathcal{E} = I_1(r + R_1), \\ \mathcal{E} = I_2(r + R_2). \end{cases}$$

За счет условия о мощности тока, система дополняется третьим уравнением

$$P_r = I^2 r,$$

где I – сила тока при заданной мощности, выделяющаяся на внутреннем сопротивлении при искомом значении сопротивления реостата.

Если использовать, например, значение $R_1 = 0$, тогда согласно графика ток короткого замыкания $I_1 = \mathcal{E}/r = 6$ А – сила тока короткого замыкания. При $R_2 = 2$ Ом $I_2 = 3$ А.

Система первых двух уравнений приобретает вид

$$\begin{cases} \mathcal{E} = 6r, \\ \mathcal{E} = 3(r + 2). \end{cases}$$

Откуда делением одного уравнения на второе, получаем уравнение с одним неизвестным, решение которого $r = 2$ Ом.

Из третьего уравнения системы находим искомое $I = \sqrt{\frac{P_r}{r}} = \sqrt{\frac{8 \text{ Вт}}{2 \text{ Ом}}} = 2$ А.

Судя по графику, такая сила тока наблюдается в цепи при $R = 4$ Ом.

Конечно, можно было третье уравнение записать в виде $P_r = \frac{\mathcal{E}^2}{(R_3 + r)^2} r$ и рас-

считать R_3 , найдя из первых двух уравнений не только значение r , но и значение $\mathcal{E}$. Результат должен быть тем же самым.

Пример 3.20. Электрическая цепь состоит из источника тока и реостата. ЭДС источника $\mathcal{E} = 6$ В, его внутреннее сопротивление $r = 2$ Ом. Сопротивление реостата можно изменять в пределах от 1 Ом до 5 Ом. Чему равна максимальная мощность тока, выделяемая на реостате?

Решение. В данной задаче следует найти условия, при которых мощность на реостате достигает максимального значения при изменении силы тока или при изменении сопротивления реостата.

Используя закон Ома для полной цепи и закон Ома для участка цепи можно показать, что напряжение на внешнем резисторе (равно напряжению на источнике) равно

$$U = \mathcal{E} - Ir.$$

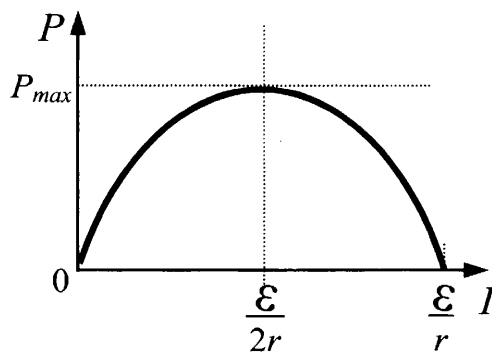
Тогда мощность, выделяемая на реостате,

$$P = IU = I(\mathcal{E} - Ir) = -rI^2 + \mathcal{E}I = -2I^2 + 6I.$$

График такой функции $P(I)$ представляет собой параболу, глядящую вет-

вями вниз, ее максимум достигается в вершине, то есть при $I = \frac{\mathcal{E}}{2r} = 1,5$ А

(находится как координата вершины параболы или как среднее значение между конями уравнения $P(I) = 0$ $I_1 = 0$ и $I_2 = \frac{\mathcal{E}}{r}$).



$$P_{\max} = \frac{\varepsilon^2}{4r} = 4,5 \text{ (Вт)}.$$

Можно доказать (путем исследования функции с помощью производной, например, см. *Пример 3.22*), что максимум функции $P(R) = \frac{\varepsilon^2}{(R+r)^2} R$ (мощности, выделяющейся на реостате, от сопротивления реостата) достигается при $R = r$ (когда внешнее сопротивление равно внутреннему сопротивлению источника). Это приведет, естественно, к такому же ответу.

Пример 3.21. Электрическая цепь состоит из источника тока с конечным внутренним сопротивлением и реостата. Сопротивление реостата можно изменять в пределах от 1 Ом до 5 Ом. Максимальная мощность тока $P_{\max'}$, выделяющаяся на реостате, равна 4,5 Вт и достигается при сопротивлении реостата $R = 2$ Ом. Какова ЭДС источника?

Решение. Докажем, что максимум зависимости мощности, выделяющейся на реостате, от сопротивления реостата

$$P(R) = \frac{\varepsilon^2}{(R+r)^2} R$$

достигается при $R = r$, то есть когда внешнее сопротивление равно внутреннему сопротивлению источника. Для этого приравняем производную функции $P(R)$ нулю.

$$P'(R) = \varepsilon^2 \left(\frac{R}{(R+r)^2} \right)' = \varepsilon^2 \frac{(R+r)^2 - 2(R+r)R}{(R+r)^4} = \varepsilon^2 \frac{R^2 + 2Rr + r^2 - 2R^2 - 2rR}{(R+r)^4} = \varepsilon^2 \frac{r^2 - R}{(R+r)^4}$$

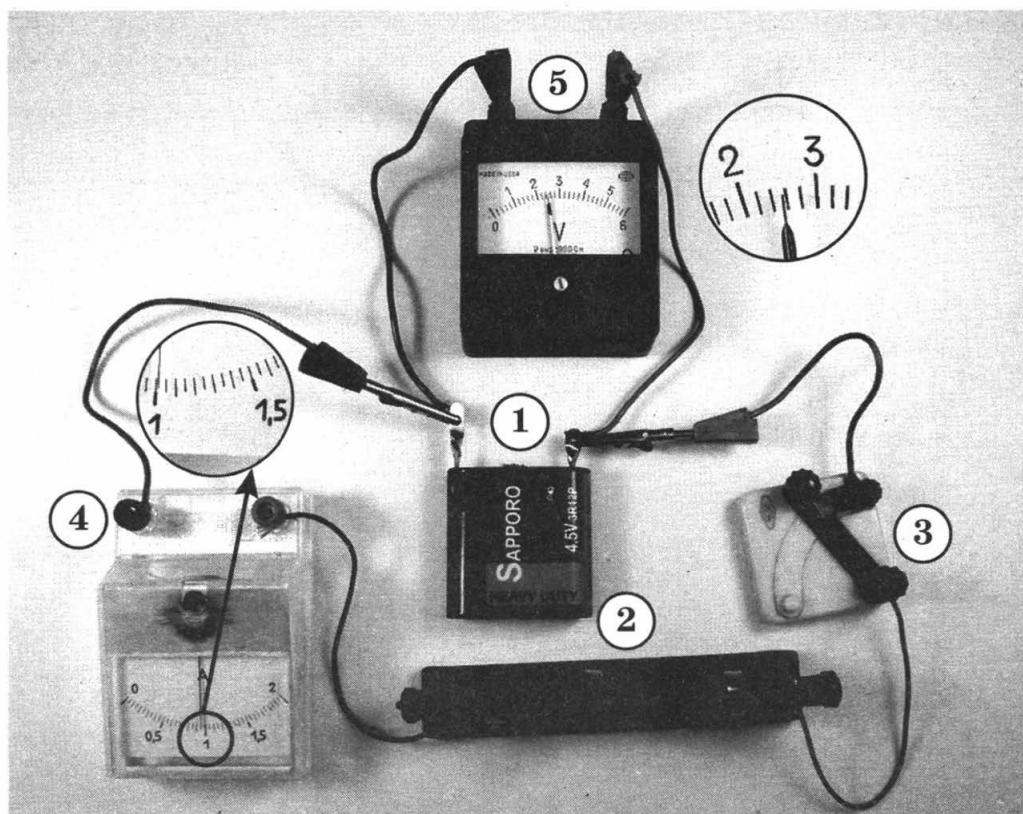
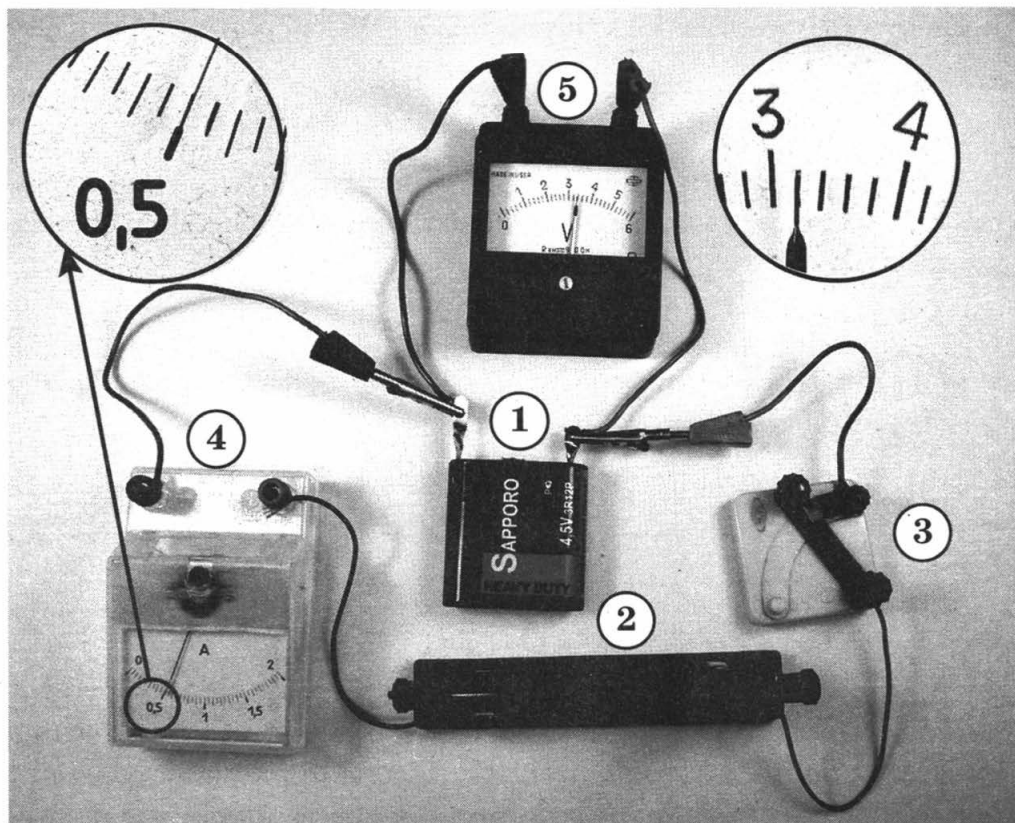
Видно, что $P'(R) = 0$ при $r^2 - R^2 = 0$, то есть при $R = r$.

Тогда из условия следует, что $r = R = 2 \text{ Ом}$ и

$$P_{\max} = P(2 \text{ Ом}) = \frac{\varepsilon^2}{(R+r)^2} R = \frac{2 \text{ Ом} \cdot \varepsilon^2}{16 \text{ Ом}^2} = 4,5 \text{ Вт}$$

Откуда $\varepsilon = \sqrt{4,5 \cdot 8} = 6 \text{ (В)}$

Пример 3.22. Ученик собрал электрическую цепь, состоящую из батарейки (1), реостата (2), ключа (3), амперметра (4) и вольтметра (5). После этого он измерил напряжение на полюсах источника тока и силу тока в цепи при различных положениях ползунка реостата (см. фотографии). Определите КПД источника тока в первом опыте.



Решение. Прежде всего, следует напомнить, что исторически сложилось, что КПД источника тока называется отношение мощности тока на внешней части цепи к суммарной мощности тока, выделяющейся на внешней и внутренней (на внутреннем сопротивлении источника) части цепи. Считается что количество теплоты, выделяющейся внутри источника, – это неизбежные, но бесполезные потери энергии, вырабатываемой сторонними силами в источнике.

Так как работа сторонних сил определяет ЭДС источника

$$\mathcal{E} - \frac{A_{\text{стор}}}{\Delta q} = \frac{A_{\text{стор}}}{It},$$

то $A_{\text{стор}} = \mathcal{E}It$, а мощность сторонних сил $P_{\text{стор}} = \mathcal{E}I$. Мощность сторонних сил и есть суммарная мощность, выделяющаяся на всех участках цепи. Тогда искомое КПД

$$\eta = \frac{U_R I}{\mathcal{E} I} = \frac{U_R}{\mathcal{E}}$$

К этому выводу можно прийти, применяя определение КПД источника (η) напрямую и используя закон Ома для полной цепи

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$$

$$\eta = \frac{I^2 R}{I^2 R + I^2 r} = \frac{IU_R}{I^2 (R+r)} = \frac{IU_R}{I \cdot \frac{\mathcal{E}}{R+r} \cdot (R+r)} = \frac{IU_R}{I\mathcal{E}} = \frac{U_R}{\mathcal{E}}$$

Тогда из расчета искомой величины КПД источника тока в первом опыте необходимо из рисунка определить напряжение на резисторе $U_1 = 3,2$ В.

Для расчета ЭДС источника можно использовать значение силы тока в первом опыте $I_1 = 0,5$ А, а также значение напряжения на резисторе и силу тока во втором опыте $U_2 = 2,6$ В и $I_2 = 1$ А.

Из закона Ома для полной цепи и закона Ома для участка цепи можно вывести уравнение, связывающее ЭДС источника и напряжения на нем при протекании тока в цепи. Действительно, $I = \frac{\mathcal{E}}{R+r} \Rightarrow \mathcal{E} = I(R+r) = IR + Ir = U_R + Ir$

или

$$U_R = \mathcal{E} - Ir$$

Тогда известные значения напряжений и сил тока в цепи в двух опытах позволяют составить систему уравнений

$$\begin{cases} U_1 = \mathcal{E} - I_1 r \\ U_2 = \mathcal{E} - I_2 r \end{cases}$$

Откуда:

$$r = \frac{U_1 - U_2}{I_2 - I_1} = \frac{3,2 \text{ В} - 2,6 \text{ В}}{0,5 \text{ А}} = 1,2 \text{ Ом}$$

$$\mathcal{E} = U_1 + I_1 r = 3,2 \text{ В} + (0,5 \text{ А} \cdot 1,2 \text{ Ом}) = 3,8 \text{ В}$$

Тогда КПД источника тока в первом опыте:

$$\eta = \frac{U_1}{\mathcal{E}} = \frac{3,2}{3,8} \cdot 100\% = 84\%.$$

Поскольку протекание тока в проводниках приводит к их разогреву, в заданиях, требующих развернутого ответа, могут быть объединены анализ электрических цепей постоянного тока и анализ тепловых процессов. Приведем только один пример.

Пример 3.23. К однородному медному цилиндрическому проводнику длиной 10 м приложили разность потенциалов 1 В. Определите промежуток времени, в течение которого температура проводника повысится на 10 К. Изменением сопротивления проводника и рассеянием тепла при его нагревании пренебrecь. (Удельное сопротивление меди $1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.)

Решение. Для решения задачи следует приравнять количество теплоты, выделяющееся в проводнике при протекании по нему тока (закон Джоуля – Ленца) в течение времени t , количеству теплоты, которое необходимо для нагревания проводника на ΔT градусов:

$$I^2 R \cdot t = cm \Delta T$$

Сопротивление и массу проводника выразим через его геометрические размеры

Сопротивление проводника с учетом его удельного сопротивления $\rho_{эл}$, длины l и площади поперечного сечения S :

$$R = (\rho_{эл} l) / S$$

Масса проводника с учетом плотности ρ

$$m = \rho l S$$

Тогда с учетом того, что по закону Ома для участка цепи

$$I = \frac{U}{R}$$

получим

$$\frac{U^2}{R} t = cm \Delta T \text{ или } \frac{U^2 S}{\rho_{эл} l} t = c \rho l S \Delta T \text{ или } \frac{U^2}{\rho_{эл} l} t = c \rho l \Delta T$$

откуда

$$t = (\Delta T c \rho l^2 \rho_{эл}) / U^2 \approx 57 \text{ с.}$$

Для получения численного ответа, следует из справочных таблиц в начале варианта ЕГЭ взять еще плотность меди и удельную теплоемкость меди.

Как уже указывалось выше, если в ходе протекания тока по проводнику происходит не только нагревание проводника, но и его движение (как это бывает в электродвигателях), то закон сохранения энергии следует применять с учетом, как разогрева проводника, так и совершенной механической работы. Итак, если при работе двигателя, напряжение на нем U и через него течет сила тока I , то работа электрического поля или потребление электроэнергии двигателем за время t равно UIt , а электрическая мощность $P = UI$. Если сопротивление обмотки электродвигателя равно R , то количество теплоты, выделившейся в электродвигателе за тот же промежуток времени $Q = I^2 R t$. А Механическая работа совершенная двигателем при механической мощности N равна $A_{мех} = Nt$.

Закон сохранения энергии в этом случае диктует следующее соотношение между этими величинами:

$$UIt = Q + A_{мех}$$

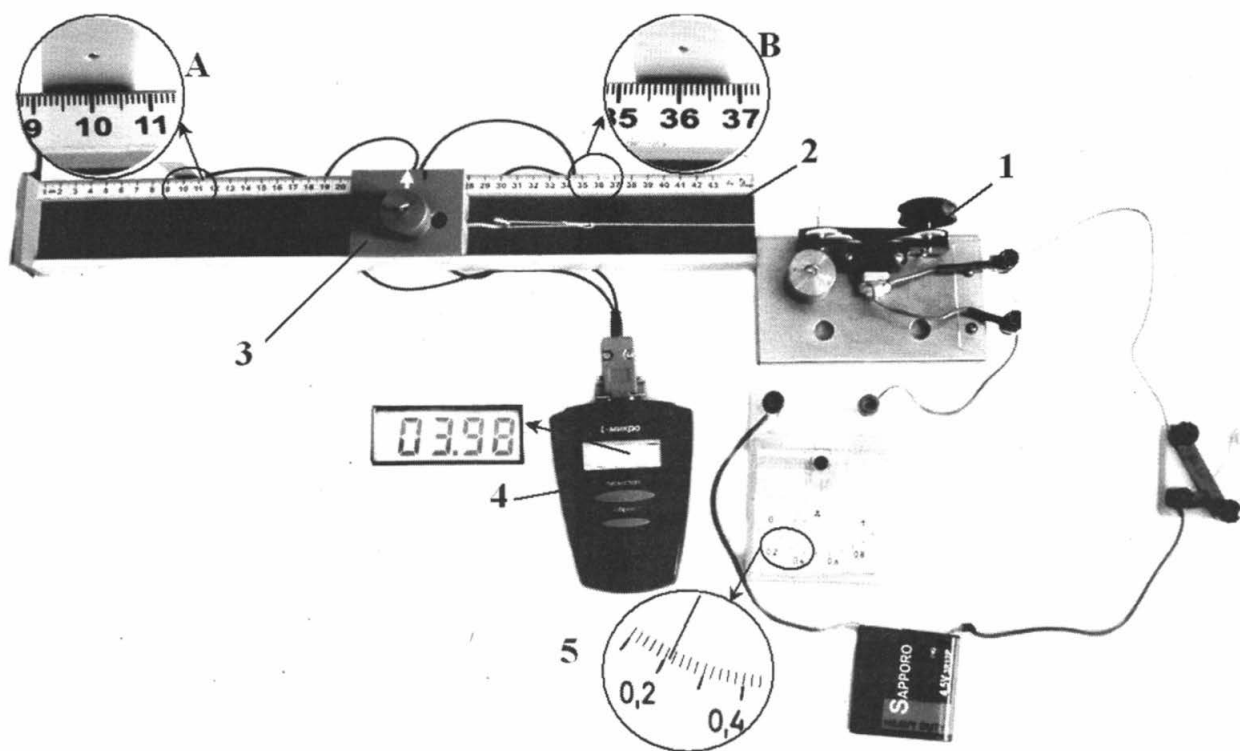
или

$$UI = I^2 R + N$$

Отношение механической мощности двигателя к потребленной электрической мощности называют КПД электродвигателя

$$\eta = \frac{N}{P} = \frac{A_{мех}}{UI}$$

Пример 3.24. На фотографии представлена установка, в которой электродвигатель (1) с помощью нити (2) равномерно перемещает каретку (3) вдоль направляющей горизонтальной линейки. При прохождении каретки мимо датчика А секундомер (4) включается, а после прохождения каретки мимо датчика В – выключается. Показания секундомера после прохождения датчика В показаны на дисплее рядом с секундомером. Сила трения скольжения каретки по направляющей была измерена с помощью динамометра. Она оказалась равной 0,4 Н. Чему равно напряжение на двигателе, если при силе тока, зафиксированной амперметром (5), работа силы упругости нити составляет 5% от работы источника тока во внешней цепи?



Решение. При перемещении каретки s совершается механическая работа $A = F_{\text{упр}} \cdot s$. При этом двигатель потребляет энергию $W = IUt$. По условию

$$\eta = \frac{A}{W} = \frac{F_{\text{упр}} s}{IUt} = 0,05$$

Поскольку каретка движется равномерно, то сила упругости нити равна силе трения

$$F_{\text{упр}} = F_{\text{тр}}.$$

Отсюда

$$U = \frac{F_{\text{тр}} \cdot s}{\eta \cdot I \cdot t}.$$

Снимая по фотографии показания с секундомера $t = 3,98$ с; расстояние между двумя датчиками на линейке $s = 26 \text{ см} = 0,26 \text{ м}$ и показания амперметра $I = 0,22 \text{ А}$, получим с учетом данных условия

$$\text{Следовательно, } U = \frac{0,4 \cdot 0,26}{0,05 \cdot 0,22 \cdot 3,98} \approx 2,4 (\text{В}).$$

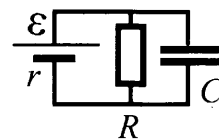
Конденсатор и элементы с нелинейной вольтамперной характеристикой в цепях постоянного тока

Большие затруднения у учащихся обычно вызывает включение в цепи постоянного тока таких устройств как конденсаторы, которые изучаются в школьном курсе электростатики и редко рассматриваются в цепях постоянного тока. Конечно, с точки зрения аттестации школьников совмещение этих двух тем является возможностью проверки умения использовать полученные знания в незнакомой ситуации. Между тем следует, прежде всего, преодолеть психологический страх перед такими задачами и просто усвоить несколько особенностей поведения конденсаторов в цепях постоянного тока:

- конденсатор представляет собой разрыв цепи, через воздушный зазор между его пластинами или через зазор, заполненный диэлектриком, постоянный ток не течет;
- сразу после подключения конденсатора (например, после замыкания ключа между одной из пластин конденсатора и точкой цепи постоянного тока) конденсатор заряжается, и по подводящим проводам, конечно, течет кратковременный ток, но в задачах рассматриваются равновесные состояния конденсатора, когда такой ток прекратился, следовательно, разность потенциалов между пластинами конденсатора равна напряжению между точками цепи постоянного тока, к которым он подключен;
- при разрядке конденсатора через резистор возникает спадающий во времени ток, резистор нагревается, но количество теплоты, выделяющейся на резисторе за время протекания тока, равно энергии запасенной в конденсаторе до этого.

Имеются, конечно, и более сложные закономерности, однако для решения большинства задач этого типа из банка ЕГЭ этих закономерностей будет достаточно. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 3.25. Какой должна быть ЭДС источника тока, чтобы напряженность E электрического поля в плоском конденсаторе была равна 2 кВ/м , если внутреннее сопротивление источника тока $r = 2 \text{ Ом}$, сопротивление резистора $R = 10 \text{ Ом}$, расстояние между пластинами конденсатора $d = 2 \text{ мм}$ (см. рисунок)?



Решение. Напряженность поля E между обкладками конденсатора определяется напряжением на обкладках U и расстоянием между ними d :

$$E = \frac{U}{d}$$

Значит, напряжение на обкладках конденсатора должно равняться $U = Ed$. Это напряжение равно напряжению на резисторе R , по которому течет ток I , так как он подключен к источнику тока. По закону Ома для участка цепи

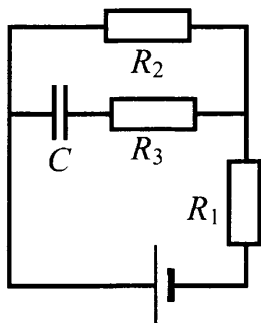
$$I = \frac{U}{R} = \frac{Ed}{R}.$$

А по закону Ома для полной цепи:

$$I = \frac{\varepsilon}{r + R}.$$

Приравняв два выражения для тока получим, что искомая ЭДС:

$$\mathcal{E} = I(R+r) = U \frac{R+r}{R} = \frac{Ed(R+r)}{R} = 4,8 \text{ (В)}.$$



Пример 3.26. Конденсатор емкостью 2 мкФ присоединен к источнику постоянного тока с ЭДС 3,6 В и внутренним сопротивлением 1 Ом. Сопротивления резисторов $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 7$ Ом, $R_3 = 3$ Ом. Каков заряд на левой обкладке конденсатора?

Решение. В стационарном состоянии конденсатор уже заряжен, то есть через резистор R_3 ток не течет, а через резисторы R_1 и R_2 течет постоянный ток равный по закону Ома для полной цепи.

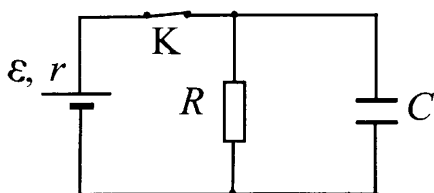
$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R_1 + R_2}$$

Раз через резистор R_3 ток не течет, то разность потенциалов на нем равна нулю, а, значит, разность потенциалов на конденсаторе равна разности потенциалов (напряжению U_C) на резисторе R_2 , к концам которого подключена цепка конденсатор-резистор R_3 . С учетом закона Ома для участка цепи, содержащего R_2 , получим

$$U_C = U_{R_2} = IR_2 = \frac{\mathcal{E}R_2}{r + R_1 + R_2}.$$

При известных емкости конденсатора C и напряжения U_C на нем модуль заряд на обкладках легко вычисляется

$$q = CU_C = \frac{C\mathcal{E}R_2}{r + R_1 + R_2} = 4,2 \cdot 10^{-6} \text{ (Кл)} = 4,2 \text{ (мкКл)}$$



Пример 3.27. В электрической схеме, показанной на рисунке, ключ K замкнут. Заряд конденсатора $q = 2$ мкКл, ЭДС батарейки $\mathcal{E} = 24$ В, ее внутреннее сопротивление $r = 5$ Ом, сопротивление резистора $R = 25$ Ом. Найдите количество теплоты, которое выделяется на резисторе после размыкания ключа K в результате разряда конденсатора. Потерями на излучение пренебречь.

Решение. Количество теплоты, выделяющееся на резисторе после размыкания ключа, это количество теплоты, выделяющееся при разрядке конденсатора через резистор. Оно равно энергии, запасенной в конденсаторе до размыкания ключа

$$Q = W_C = \frac{CU^2}{2}.$$

Так как заряд на конденсаторе $q = CU$, то

$$Q = \frac{qU}{2}$$

Напряжение на конденсаторе до размыкания ключа равно напряжению на резисторе, которое по закону Ома для участка цепи

$$U = IR$$

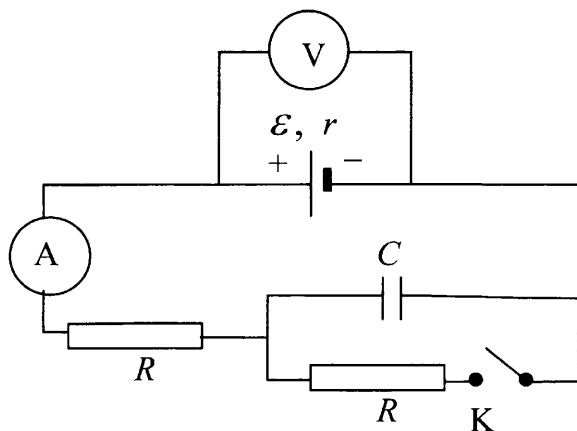
Сила тока через резистор по закону Ома для полной цепи

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}.$$

Объединяя приведенные выражения, получим искомое количество теплоты:

$$Q = \frac{q\mathcal{E}R}{2(R+r)} = 20 \text{ (мкДж)}.$$

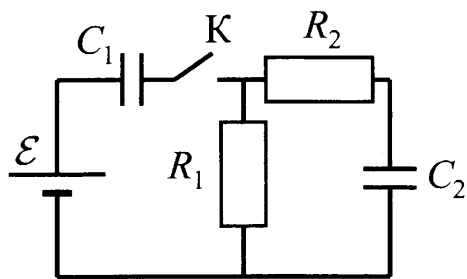
Пример 3.28. На рисунке показана электрическая цепь, содержащая источник тока (с внутренним сопротивлением), два резистора, конденсатор, ключ K , а также амперметр и идеальный вольтметр. Как изменятся показания амперметра и вольтметра в результате замыкания ключа K ? Ответ поясните, указав, какие физические явления и закономерности вы использовали для объяснения.



Решение. До замыкания ключа ток в цепи не течет, так как через конденсатор ток протекать не может. Амперметр показывает нулевой ток. Идеальный вольтметр при отсутствии тока через источник показывает ЭДС источника.

После замыкания ключа в цепи возникнет ток равный по закону Ома для полной цепи $I = \frac{\mathcal{E}}{r + 2R}$, поскольку ток течет во внешней части цепи через два последовательно соединенных резистора с сопротивлением R каждый. Напряжение на источнике, через который протекает ток I равно $U = \mathcal{E} - Ir$, поэтому показания вольтметра уменьшатся. Таким образом, показания амперметра станут отличными от нуля, а показания вольтметра уменьшатся.

Более сложны задания, в которых следует учесть работу сторонних сил в источнике тока при переходе цепи из одного стационарного состояния в другое. Как уже говорилось выше эта работа равна произведению ЭДС источника на заряд, вытекший из источника при переходе системы из одного стационарного состояния в другое $A_{стор} = \mathcal{E}\Delta q$. Бывает, что при переходе из одного состояния в другое заряд наоборот должен втекать в источник тока. Если источник тока аккумулятор (что обычно не оговаривается в условии), то можно считать, что при этом в аккумуляторе запасается энергия равная $\mathcal{E}|\Delta q|$. Если это происходит с необратимым источником тока, то такая энергия «запасается» в батарее в виде «тепла», переходит во внутреннюю энергию среды источника, источник нагревается. Обычно эту энергию можно вычислить из закона сохранения энергии или наоборот следует учесть для того, чтобы из баланса энергии установить какой-либо параметр цепи. Рассмотрим пару таких примеров.



Пример 3.29. В цепи, изображённой на рисунке, ЭДС батареи равна 100 В, сопротивления резисторов $R_1 = 10 \text{ Ом}$ и $R_2 = 6 \text{ Ом}$, а ёмкости конденсаторов $C_1 = 60 \text{ мкФ}$ и $C_2 = 100 \text{ мкФ}$. В начальном состоянии ключ K разомкнут, а конденсаторы не заряжены. Через некоторое время после замыкания ключа в системе установится равновесие. Какое количество теплоты выделится в цепи к моменту установления равновесия?

Решение. После замыкания ключа и установления равновесия ток через резисторы прекратится, конденсатор C_1 будет заряжен до напряжения, равного ЭДС батареи, а C_2 – не будет заряжен (его пластины соединены между собой через резисторы):

$$U_1 = \mathcal{E}, \quad U_2 = 0.$$

Конденсатор C_1 зарядившись приобретет энергию:

$$W = C_1 \frac{\mathcal{E}^2}{2}.$$

При этом через батарею пройдёт заряд q , который поступит на пластины конденсатора:

$$q = C_1 \mathcal{E}.$$

При этом сторонние силы в источнике тока совершат работу:

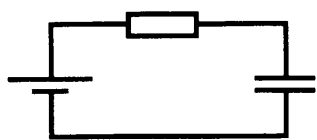
$$A = q\mathcal{E} = C_1 \mathcal{E}^2.$$

Разница между этой работой и энергией конденсатора:

$$A - W = C_1 \frac{\mathcal{E}^2}{2}.$$

Эта разница должна перейти в какой-либо вид энергии. Поскольку во время зарядки через резисторы протекал ток, то можно считать, что они нагревались, и количество теплоты и есть разница между работой сторонних сил и энергией конденсатора

$$Q = A - W = C_1 \frac{\mathcal{E}^2}{2} = 0,3 \text{ (Дж)}.$$



Пример 3.30. Источник постоянного напряжения с ЭДС 100 В подключён через резистор к конденсатору переменной ёмкости, расстояние между пластинами которого можно изменять (см. рисунок). Пластины медленно раздвинули. Какая работа была совершена против сил притяжения пластин, если за время движения пластин на резисторе выделилось количество теплоты 10 мкДж и заряд конденсатора изменился на 1 мкКл?

Решение. В ходе раздвигания пластин ёмкость конденсатора C уменьшилась на ΔC , а напряжение на нем осталось равным ЭДС батарейки $\mathcal{E}$. Значит, энергия электрического поля конденсатора уменьшилась на

$$\Delta W_{\text{к}} = \frac{|\Delta C| \mathcal{E}^2}{2}.$$

Уменьшился по модулю и заряд на каждой из пластин конденсатора на $\Delta q = \Delta C \mathcal{E}$. Значит в источнике тока «запаслась» или выделилась энергия

$$A = \mathcal{E} |\Delta q| = |\Delta C| \mathcal{E}^2.$$

Кроме того, по условию, в резисторе в ходе оттока заряда от конденсатора протекал ток и выделилось количество теплоты равное Q .

Внешние силы, совершая работу по оттягиванию разноименно заряженных пластин друг от друга, вкладывали энергию в систему. Значит, в ходе процесса внешние силы и конденсатор являются источниками энергии, а батарейка и резистор поглощают эту энергию. Соответственно баланс энергий запишется так

$$\frac{|\Delta C| \mathcal{E}^2}{2} + A = |\Delta C| \mathcal{E}^2 + Q$$

где A – положительная работа, совершённая против сил притяжения пластин внешними силами

Из этих уравнений получаем

$$A = Q + \frac{|\Delta C| \mathcal{E}^2}{2} = Q + \frac{|\Delta q| \mathcal{E}}{2}$$

По условию $|\Delta q| = \mathcal{E} |\Delta C| = 1 \text{ мкКл}$, откуда, подставляя остальные данные, получим

$$A = 10 \text{ мкДж} + 50 \text{ мкДж} = 60 \text{ мкДж}.$$

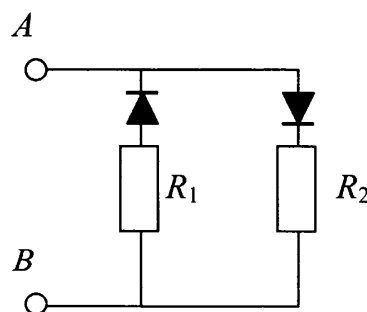
И в заключении рассмотрим два примера, в котором в цепь постоянного тока включены элементы с нелинейными вольтамперными характеристиками: идеальные диоды и газоразрядные лампы.

Идеальные диоды обладают нулевым сопротивлением, когда потенциал на входе больше потенциала на выходе, и бесконечным сопротивлением, когда потенциал на входе меньше потенциала на выходе. В неидеальных диодах сила тока мала, но не равна нулю при одних напряжениях, и начинает возрастать по экспоненциальному закону при достижении некоторого порогового напряжения.

А в газоразрядных лампах в зависимости от давления газа в них и диапазона напряжений, в которых она эксплуатируется, сила тока может возрастать с ростом напряжения по корневому $I = A\sqrt{U}$ или по более сложному закону.

Однако основные законы электрических цепей применимы и к таким элементами.

Пример 3.31. В цепи, изображённой на рисунке, сопротивление диодов в прямом направлении пренебрежимо мало, а в обратном – многократно превышает сопротивление резисторов. При подключении к точке A – положительного, а к точке B – отрицательного полюса батареи с ЭДС 12 В и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением, потребляемая мощность равна 7,2 Вт. При изменении полярности подключения батареи потребляемая мощность оказалась равной 14,4 Вт. Укажите условия протекания тока через диоды и резисторы в обоих случаях и определите сопротивление резисторов в этой цепи.



Решение.

При подключении положительного полюса батареи к точке A потенциал точки A выше потенциала точки B ($\varphi_A > \varphi_B$), поэтому ток через резистор R_1 не течёт, а течёт через резистор R_2 . Эквивалентная схема цепи имеет вид, изображенный на рисунке 1.

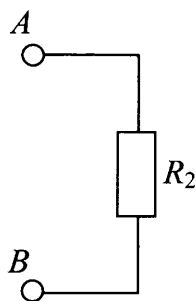


Рис. 1

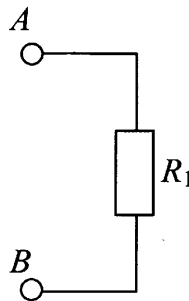


Рис. 2

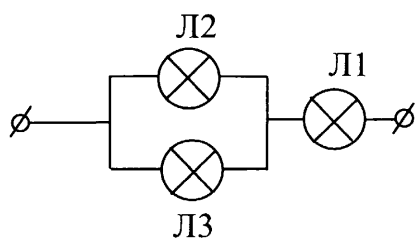
Потребляемая мощность

$$P_1 = \frac{\mathcal{E}^2}{R_2}.$$

При изменении полярности подключения батареи $\varphi_A < \varphi_B$, ток через резистор R_2 не течёт, но течёт через резистор R_1 . Эквивалентная схема цепи в этом случае изображена на рисунке 2. При этом потребляемая мощность

$$P_1 = \frac{\mathcal{E}^2}{R_1}.$$

Из этих уравнений: $R_2 = \frac{\mathcal{E}^2}{P_1} = 20 \text{ (Ом)}$ и $R_1 = \frac{\mathcal{E}^2}{P_2} = 10 \text{ (Ом)}$



Пример 3.32. Вольтамперные характеристики газовых ламп Л1, Л2 и Л3 при достаточно больших токах хорошо описываются квадратичными зависимостями $U_1 = \alpha I^2$, $U_2 = 3\alpha I^2$, $U_3 = 6\alpha I^2$, где α – некоторая известная размерная константа. Лампы Л2 и Л3 соединили параллельно, а лампу Л1 – последовательно с ними (см. рисунок). Определите зависимость напряжения от силы тока, текущего через такой участок цепи, если токи через лампы таковы, что выполняются вышеуказанные квадратичные зависимости.

Решение. В задаче требуется найти функциональную связь между напряжением на концах участка цепи U с силой тока I , втекающей в участок цепи, то есть протекающий через лампу Л1.

Несмотря на возможную различную зависимость функции $I(U)$ или $U(I)$ для различных технических устройств, для элементов цепи сохраняются следующие свойства цепей постоянного тока:

- 1) Напряжение на концах цепи из последовательно соединённых элементов равно сумме напряжений на элементах (свойства поля внутри проводников, благодаря которому движутся заряды в проводниках);
- 2) Для параллельно соединённых элементов напряжение на концах элемен-

тов совпадает (эквипотенциальность металлических проводников, соединяющих концы параллельно соединенных элементов)

3) Сумма силы токов, текущих в параллельно соединенных элементах, равна силе тока до разветвления цепи (закон сохранения заряда)

Используя 2) для ламп Л2 и Л3, с учетом их вольт – амперных характеристик имеем

$$U_2 = U_3 \text{ или } 3\alpha I_2^2 = 6\alpha I_3^2, \text{ откуда}$$

$$I_3 = \frac{I_2}{\sqrt{2}}$$

Используя 3), получим

$$I = I_2 + I_3 \text{ или } I = I_2 + \frac{I_2}{\sqrt{2}} \approx 1,71I_2, \text{ откуда}$$

$$I_2 = \frac{I}{1,71}$$

Тогда, используя 1) найдем искомую связь между U и I :

$$U = U_1 + U_2 = \alpha I^2 + 3\alpha I_2^2 \approx \alpha I^2 + 3\alpha \frac{I^2}{(1,71)^2} \approx \alpha I^2 + 1,02\alpha I^2 \approx 2\alpha I^2.$$

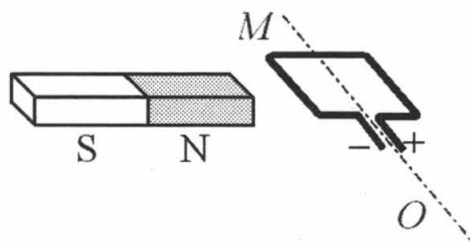
МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Вопросы, связанные с конфигурацией магнитных полей, создаваемых различными источниками (правило буравчика для поля прямого тока, однородное поле между полюсами подковообразного магнита, правило левой руки для силы Ампера и силы Лоренца и т.п.), отнесены к заданиям с выбором ответа. Там же рассматриваются обычно и качественные закономерности (есть индукционный ток или нет, куда он направлен и т.п.) явления электромагнитной индукции и самоиндукции. В заданиях, требующих развернутого ответа, обычно используются количественные закономерности этих явлений, причем они должны сочетаться с пониманием законов механики и термодинамики. Ясно, что сила Ампера или сила Лоренца, так же как сила кулоновского взаимодействия точечных зарядов в электростатике, являются силами, которые следует включить в перечень сил при использовании второго закона Ньютона или правила моментов при рассмотрении равновесия протяженных тел.

Однако в блок заданий, требующих развернутого ответа, начиная с 2010 года включаются задания, в которых требуется описать явление на качественном уровне. Они помещены в дальнейшем изложении в начало рассмотрения задач на определенную тему. При их оформлении требуется сослаться на законы, которые используются для описания этого явления.

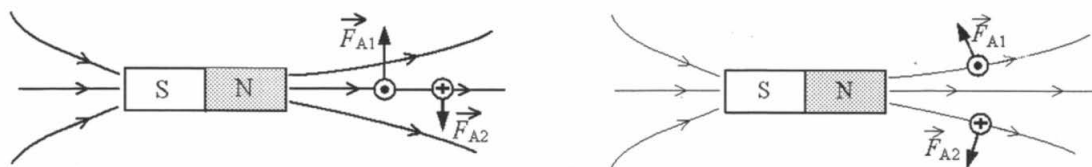
Движение тел при наличии силы Ампера

Пример 3.33. Рамку с постоянным током удерживают неподвижно в поле полосового магнита (см. рисунок). Полярность подключения источника тока к выводам рамки показана на рисунке. Как будет двигаться рамка на не-



подвижной оси $МО$, если рамку не удерживать? Ответ поясните, указав, какие физические закономерности вы использовали для объяснения. Считать, что рамка испытывает небольшое сопротивление движению со стороны воздуха.

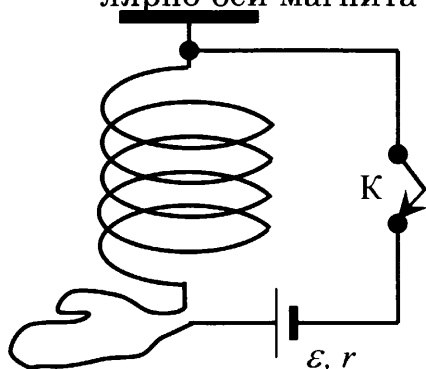
Решение. Рассмотрим сечение рамки плоскостью рисунка. В исходном положении в левом звене рамки ток направлен к нам, а в правом – от нас.



На левое звено рамки действует сила Ампера $\vec{F}_{A1}$, направленная по правилу левой руки вверх, а на правое звено – сила Ампера $\vec{F}_{A2}$, направленная вниз. Эти силы разворачивают рамку на неподвижной оси $МО$ по часовой стрелке (см. рисунок).

Рамка устанавливается перпендикулярно оси магнита так, что контакт «+» оказывается внизу. При этом равнодействующая сил Ампера $\vec{F}_{A1}$ и $\vec{F}_{A2}$ направлена в сторону магнита и уравнивается воздействием неподвижной оси $МО$, на которую насажена рамка (см. рисунок).

Следовательно, рамка повернется по часовой стрелке и встанет перпендикулярно оси магнита так, что контакт «+» окажется внизу.



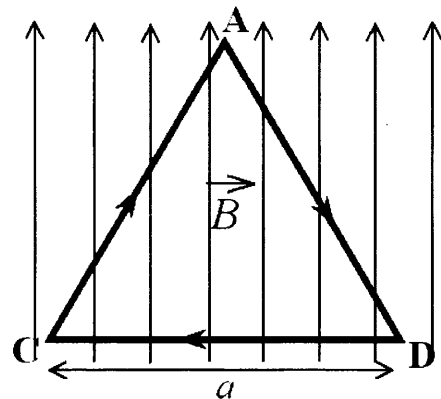
Пример 3.34. Мягкая пружина из нескольких крупных витков провода подвешена к потолку. Верхний конец пружины подключается к источнику тока через ключ K , а нижний – с помощью достаточно длинного мягкого провода (см. рисунок). Как изменится длина пружины через достаточно большое время после замыкания ключа K ? Ответ поясните, указав, какие физические явления и закономерности вы использовали для объяснения.

Решение. До замыкания ключа пружина находится в состоянии равновесия, в котором упругие силы, действующие на каждый виток пружины со стороны соседних витков, уравнивают силу тяжести, действующую на виток.

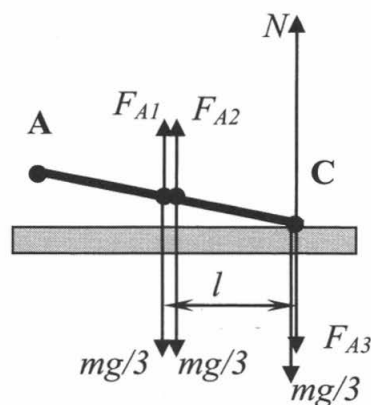
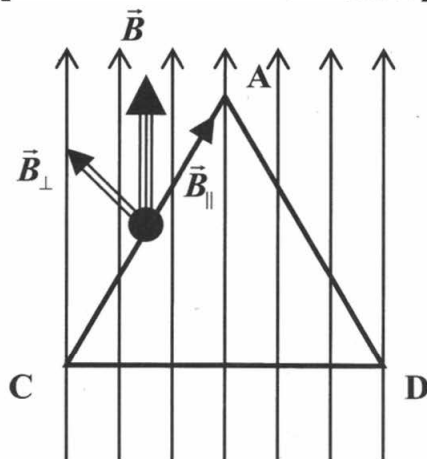
При замыкании ключа K по цепи пойдет ток. В соседних витках пружины токи потекут сонаправлено. Проводники с сонаправленными токами притягиваются друг к другу, поскольку на каждый виток действует сила Ампера со стороны магнитного поля созданного соседним витком. В результате пружина сожмется. Будет достигнуто новое состояние равновесия, в котором упругие силы, действующие на каждый виток пружины со стороны соседних витков, должны уменьшиться, так как теперь они будут уравнивать силу тяжести, действующую на виток, вместе с силой Ампера.

Таким образом, пружина сожмется, её длина уменьшится.

Пример 3.35. На непроводящей горизонтальной поверхности стола лежит проводящая жёсткая рамка из однородной тонкой проволоки, согнутой в виде равностороннего треугольника ADC со стороной, равной a (см. рисунок). Рамка, по которой течет ток I , находится в однородном горизонтальном магнитном поле, вектор индукции которого $\vec{B}$ перпендикулярен стороне CD. Каким должен быть модуль индукции магнитного поля, чтобы рамка начала поворачиваться вокруг стороны CD, если масса рамки m ?



Решение. По рамке течет ток, сила тока равна I . В магнитном поле с индукцией B на каждую сторону рамки действует сила Ампера, причем на все стороны разная. Сила, действующая на сторону CD, по правилу левой руки направлена в плоскость листа, то есть прижимает рамку к столу. Силы, действующие на стороны AC и AD, направлены из плоскости листа (для применения правила левой руки следует вектор магнитной индукции разложить на две составляющие вдоль провода с током и перпендикулярно ему, и учесть, что магнитное поле, индукция которого направлена вдоль тока, не оказывает влияния на проводник с током). Сила, действующая на эти стороны рамки, будут стараться оторвать рамку от стола. Рисунок (вид слева) показывает воздействие этих сил. Поскольку сила Ампера действует одинаково на каждый элемент проводника, подобно силе тяжести, то точка приложения этой силы при рассмотрении равновесия твердого тела, будет расположена в центре сторон AC и AD, так же как и точка приложения силы тяжести протяженного однородного стержня. На рисунке, помимо сил Ампера и сил тяжести, действующих на стороны рамки, показана сила реакции стола, к которому прижимается силой Ампера и силой тяжести сторона CD.



Условие равновесия рамки в момент отрыва сторон AC и AD – это равенство нулю суммарного момента всех сил относительно выбранной оси. Относительно оси CD это условие запишется :

$$2mgl/3 = F_{A1}l + F_{A2}l \text{ или } 2mg/3 = F_{A1} + F_{A2}$$

Силы Ампера равны соответственно

$$F_{A1} = IBa \sin 30^\circ$$

$$F_{A2} = IBa \sin 150^\circ = IBa \sin 30^\circ$$

Тогда равновесие рамки будет в момент отрыва выполняться, если

$$\frac{2mg}{3} = \frac{2IBa}{2} \text{ или при } B = \frac{2mg}{3Ia}.$$

Значит рамка оторвется если $B \geq \frac{2mg}{3Ia}$

Аналогично решается задача с квадратной рамкой, лежащей на горизонтальном столе (см. рис. 17)

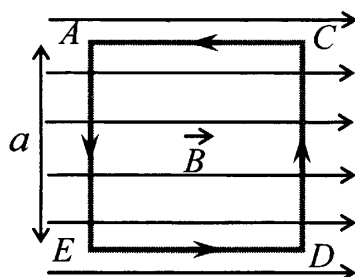
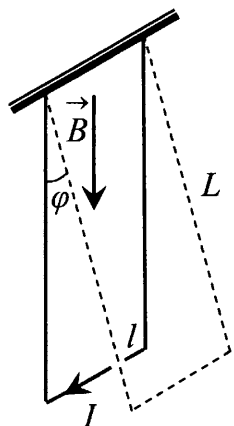


Рис. 17

В этом случае рамка при большой силе тока начнет вращаться вокруг стороны CD. И следует учесть моменты сил тяжести, действующих на 3 стороны рамки и силу Ампера, действующую на одну сторону AE рамки. Силы Ампера, действующие на стороны ED и AC будут равны нулю, поскольку токи направлены вдоль линий магнитной индукции.



Пример 3.36. Металлический стержень длиной $l = 0,1$ м и массой $m = 10$ г, подвешенный на двух параллельных проводящих нитях длиной $L = 0,1$ м, располагается горизонтально в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл, как показано на рисунке. Вектор магнитной индукции направлен вертикально. Какую максимальную скорость приобретёт стержень, если по нему пропустить ток силой 10 А в течение 0,1 с? Угол φ отклонения нитей от вертикали за время протекания тока мал.

Решение. При кратковременном протекании тока по стержню, находящемуся в магнитном поле, на него действует направленная горизонтально (по правилу левой руки) сила Ампера

$$F = IBl.$$

Предположим, что за время действия силы Ампера $t = 0,1$ с стержень переместится на малое расстояние. Тогда суммарная сила натяжения нитей не повлияет на движение стержня в горизонтальном направлении, и это движение можно считать равноускоренным.

В соответствии со вторым законом Ньютона сила вызывает горизонтальное ускорение стержня, которое в начальный момент равно

$$a = \frac{F}{m} = \frac{IBl}{m} = 10 \text{ м/с}^2.$$

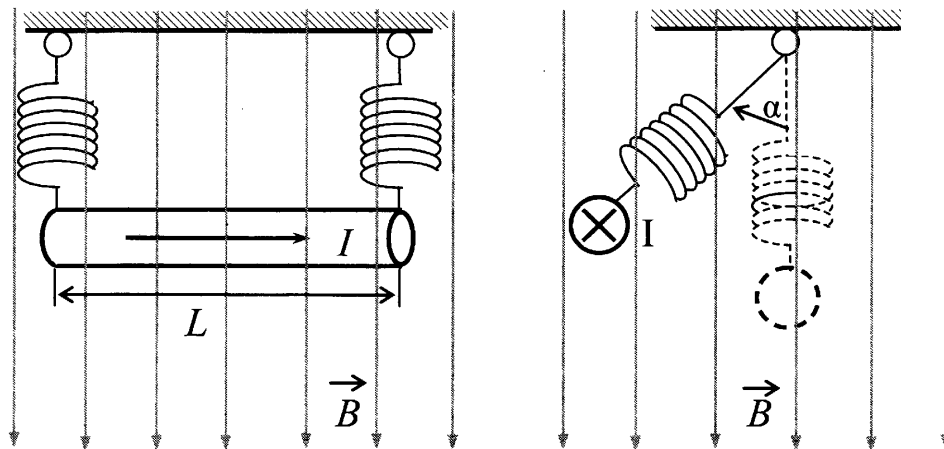
Оценка показывает что при ускорении примерно равном такой величине, смещение стержня по горизонтали за 0,1 с будет равно $s = \frac{at^2}{2} \approx 0,05 \text{ м} = 5 \text{ см}$, то

есть действительно мало по сравнению с длиной нитей 1 м.

Скорость стержня в момент выключения тока можно вычислить по формуле для равноускоренного движения

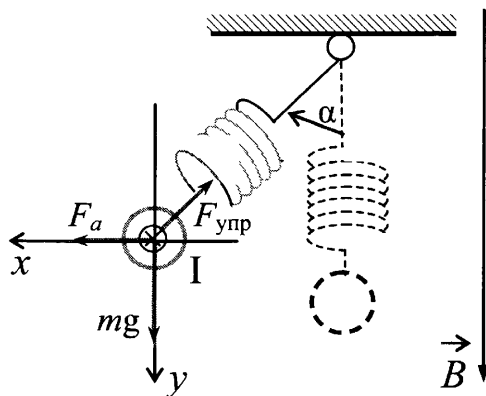
$$v = at = \frac{IBl}{m}t = 1 \text{ (м / с)}.$$

Пример 3.37. По прямому горизонтальному проводнику длиной 1 м с площадью поперечного сечения $1,25 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$, подвешенному с помощью двух одинаковых невесомых пружинок жесткостью 100 Н/м, течет ток $I = 10 \text{ А}$ (см. рисунок). Какой угол α составляют оси пружинок с вертикалью при включении вертикального магнитного поля с индукцией $B = 0,1 \text{ Тл}$, если абсолютное удлинение каждой из пружинок при этом составляет $7 \cdot 10^{-3} \text{ м}$? (Плотность материала проводника $8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$).



Вид сбоку

Решение. Силы, действующие на проводник, показаны на рисунке



В соответствии со вторым законом Ньютона в состоянии покоя ($a = 0$) сумма всех сил равна нулю:

$$\vec{F}_a + \vec{F}_{\text{упр}} + m\vec{g} = 0$$

В проекции на выбранные оси координат (см. рис) это приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} IBL - 2k\Delta l \cdot \sin \alpha = 0, \\ mg - 2k\Delta l \cdot \cos \alpha = 0. \end{cases}$$

Перенеся слагаемые, содержащие угол α , в правые части уравнений и по-

делив одно уравнение на другое, получим:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{IBL}{mg}.$$

Так как в условии приведена плотность материала стержня ρ , выразим массу проводника через плотность и объем, учитывая, что объем цилиндрического тела через площадь сечения и длину $V=SL$

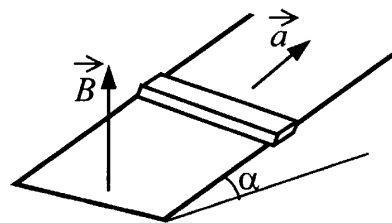
$$m = \rho LS.$$

Тогда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{IB}{\rho Sg} = 1.$$

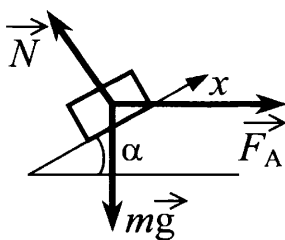
Откуда $\alpha = 45^\circ$.

Пример 3.38. Горизонтальный проводящий стержень прямоугольного сечения поступательно движется с ускорением вверх по гладкой наклонной плоскости в вертикальном однородном магнитном поле (см. рисунок). По стержню протекает ток I . Угол наклона плоскости $\alpha = 30^\circ$. Отношение массы стержня к его длине $\frac{m}{L} = 0,1$ кг/м. Модуль индукции магнитного поля $B = 0,2$ Тл. Ускорение стержня $a = 1,9$ м/с².



Чему равна сила тока в стержне?

Решение. Как осуществляется контакт концов стержня с источником тока на гладкой наклонной плоскости не указано, но видимо, это легкие провода, нависающие сверху и сцепленные с концами движущегося стержня. Силы, действующие в таком случае на стержень с током в ходе движения его вверх, показаны на рисунке.



Сила тяжести направлена вертикально вниз, сила реакции опоры направлена перпендикулярно к наклонной плоскости. Направление силы Ампера при таком направлении вектора индукции магнитного поля может быть направлено согласно правилу левой руки либо вправо, либо влево, в зависимости от направления силы тока. При направлении силы Ампера влево, тело должно было бы двигаться с ускорением направленным вниз или оторваться от плоскости. Значит сила Ампера направлена так, как показано на рисунке.

По второму закону Ньютона в системе отсчета, связанной с наклонной плоскостью (она инерциальная) сумма всех сил равна произведению массы на ускорение:

$$\vec{F}_A + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$$

В проекции на ось x (см. рисунок) это даст:

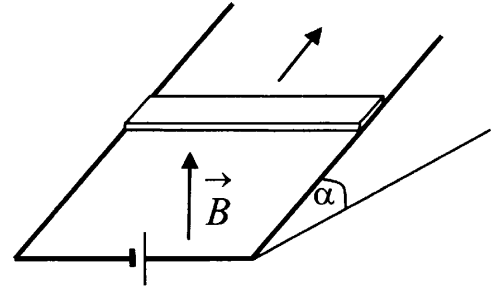
$$ma = -mgsin\alpha + IBLcos\alpha$$

где m – масса стержня, a – модуль ускорения, IBL – модуль силы Ампера, L – длина стержня.

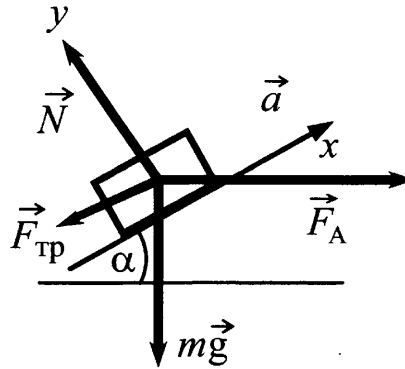
Решая систему двух уравнений получим

$$I = \frac{m(a + gsin\alpha)}{L Bcos\alpha} \approx 4 \text{ (A)}$$

Пример 3.39. На проводящих рельсах, проложенных по наклонной плоскости, в однородном вертикальном магнитном поле $\vec{B}$ находится горизонтальный прямой проводник прямоугольного сечения массой $m = 20$ г. Плоскость наклонена к горизонту под углом $\alpha = 30^\circ$. Расстояние между рельсами $L = 40$ см. Когда рельсы подключены к источнику тока, по проводнику протекает постоянный ток $I = 11$ А. При этом проводник поступательно движется вверх по рельсам равномерно и прямолинейно. Коэффициент трения между проводником и рельсами $\mu = 0,2$. Чему равен модуль индукции магнитного поля B ?



Решение. Ток к движущемуся проводнику подводится по рельсам, с которыми он находится в контакте. В системе имеется сила трения, мешающая движению (см. рис.).



Рассуждения аналогичны, приведенным в Примере 3.38 с той только разницей, что придется второй закон Ньютона записать с учетом того, что сумма всех сил равна нулю (проводник движется равномерно). Кроме того закон Ньютона записывается в проекциях на 2 оси, причем с учетом силы трения. Итак

$$\vec{F}_A + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{mp} = m\vec{a}$$

В проекциях на выбранные оси координат (рис.), это уравнение в совокупности с законом сухого трения $F_{mp} = \mu N$ и законом Ампера $F_A = IBL$ дает

$$-mgsin\alpha - \mu N + IBLcos\alpha = 0$$

$$N - mgcos\alpha - IBLsin\alpha = 0$$

Откуда

$$\mu = \frac{IBL \cos \alpha - mg \sin \alpha}{IBL \sin \alpha + mg \cos \alpha}$$

Преобразования этого уравнения приводят к искомому значению

$$B = \frac{mg(\mu \cos \alpha + \sin \alpha)}{IL(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)} \approx 0,04 \text{ (Тл)}.$$

Заметим, что при $\operatorname{ctg} \alpha = \mu = 0,2$, т.е. $\alpha \approx 79^\circ$, равномерное движение вверх оказывается невозможным, так как, чем больше будет магнитное поле, тем сильнее будет возрастать сила Ампера. Проводник будет сильнее прижиматься к рельсам и сила трения будет возрастать настолько, что составляющей силы Ампера, направленной вдоль плоскости будет недостаточно, чтобы преодолеть силы, направленные вниз вдоль наклонной плоскости.

Движение частиц и тел под действием силы Лоренца

Задания, требующие развернутого ответа, в которых следует применить силу Лоренца для описания движения тел усложняются тем, что в них требуется применить и знания электростатики, и законы механики. Если речь идет о классической ситуации движения заряженной частицы перпендикулярно линиям магнитной индукции магнитного поля, то имеется в виду, что сила тяжести существенно меньше силы Лоренца и ей можно пренебречь. В этом случае, как известно, частица движется по окружности радиуса R с постоянной по модулю скоростью v . Второй закон Ньютона приобретает вид

$$F_L = ma_{uc},$$

где центростремительное ускорение

$$a_{uc} = \frac{v^2}{R},$$

а сила Лоренца, действующая на частицу с зарядом q и скоростью v со стороны магнитного поля с индукцией B ,

$$F_L = Bvq.$$

Совместное решение этих уравнений приводит к вычислению радиуса окружности и периода обращения по ней

$$R = \frac{mv}{Bq} \text{ и } T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{Bq}$$

Эти соотношения проверяются в заданиях с выбором ответа Единого Государственного Экзамена по физике.

В заданиях, требующих развернутого ответа, необходимо рассчитать скорость частицы, влетающей в магнитное поле, исходя из разности потенциалов электрического поля $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ массы и заряда частицы, пользуясь тем, что работа электрического поля равна изменению кинетической энергии частицы

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = qU.$$

В ряде случаев требуется проследить за изменением параметров частицы в меняющемся магнитном поле или учесть силу тяжести частицы (обычно это уже «тело» или «шарик» в тексте задачи. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 3.40. Протон ускоряется постоянным электрическим полем конденсатора, напряжение на обкладках которого 2160 В. Затем он влетает в однородное магнитное поле и движется по дуге окружности радиуса 20 см в плоскости, перпендикулярной линиям магнитной индукции. Каков модуль вектора индукции магнитного поля? Начальной скоростью протона в электрическом поле пренебречь.

Решение (ссылки на законы выделены в решении *курсивом*).

Изменение кинетической энергии протона при движении протона в элек-

трическом поле конденсатора равно работе электрического поля: $\frac{mv^2}{2} = eU$, где e – заряд протона – элементарный заряд.

Объединив это уравнение со *вторым законом Ньютона* для движения тела по окружности

$$F = ma_{\text{цс}} = m \frac{v^2}{R}$$

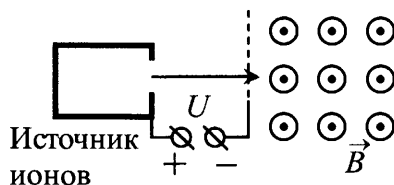
и с выражением для *силы Лоренца*

$$F = F_{\text{л}} = Bvq$$

получим систему уравнений для ответа на поставленный вопрос

Решив систему уравнений, получаем $B = \sqrt{\frac{2mU}{eR^2}} \approx 0,034 \text{ (Тл)}$

Пример 3.41. Ион ускоряется в электрическом поле с разностью потенциалов $U = 10 \text{ кВ}$ и попадает в однородное магнитное поле перпендикулярно к вектору его индукции $\vec{B}$ (см. рисунок). Радиус траектории движения иона в магнитном поле $R = 0,2 \text{ м}$, отношение массы иона к его электрическому заряду $\frac{m}{q} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ кг/Кл}$. Определите значение модуля индукции магнитного поля. Кинетической энергией иона при его вылете из источника пренебрегите.



Решение. Аналогично решению *Примера 3.40*, только заряд иона неизвестен и масса тоже. Однако конечное уравнение содержит отношение массы к заряду, которое дано в условии, поэтому

$$B = \sqrt{\frac{2mU}{qR^2}} \approx 0,5 \text{ (Тл)}$$

Пример 3.42. Заряженный шарик влетает в область магнитного поля $B = 0,2 \text{ Тл}$, имея скорость $v = 1000 \text{ м/с}$, перпендикулярную вектору магнитной индукции. Какой путь он пройдет к тому моменту, когда вектор его скорости повернется на 1° ? Масса шарика $m = 0,01 \text{ г}$, заряд $q = 500 \text{ мкКл}$.

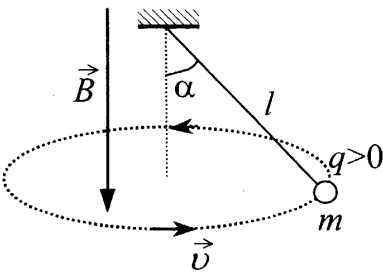
Решение. Прежде чем писать уравнения, необходимо уточнить, можно ли в данной задаче пренебречь силой тяжести и считать, что тело движется только под действием силы Лоренца. Из условия $F_{\text{л}} = Bvq = 0,1 \text{ Н}$, а сила тяжести $F_{\text{тяж}} = mg = 0,0001 \text{ Н}$, следовательно ей можно пренебречь ($F_{\text{тяж}} = 0,001F_{\text{л}}$).

Применив второй закон Ньютона для движения частицы в магнитном поле под действием только силы Лоренца, получаем радиус окружности, по которой движется шарик

$$Bvq = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv}{Bq}$$

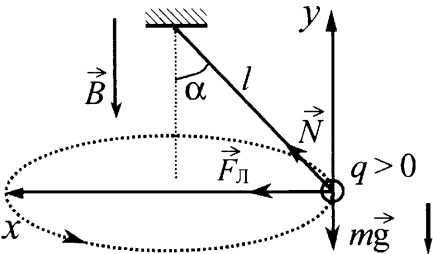
Вектор скорости шарика повернется на 1° , когда шарик пролетит $1/360$ часть окружности, поэтому искомый путь

$$s = \frac{2\pi R}{360} = \frac{2\pi}{360} \frac{mv}{Bq} \approx 1,74 \text{ (м)}$$



Пример 3.43. В однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, направленной вертикально вниз, равномерно вращается в горизонтальной плоскости против часовой стрелки положительно заряженный шарик массой m , подвешенный на нити длиной l (конический маятник). Угол отклонения нити от вертикали равен α , скорость движения шарика равна v . Найдите заряд шарика.

Решение. В данной системе шарик движется под действием силы тяжести, натяжения нити и силы Лоренца, направленной по правилу левой руки в центр окружности (см. рис.)



II закон Ньютона Для равномерного движения по окружности

$$\vec{N} + \vec{F}_{\text{л}} + m\vec{g} = m\vec{a}_{\text{цс}}$$

В проекциях на выбранные оси с учетом $a_{\text{цс}} = \frac{v^2}{R}$ (см. рис.):

$$\begin{cases} N \sin \alpha + qvB = \frac{mv^2}{R} \\ N \cos \alpha - mg = 0 \end{cases}$$

где $R = l \sin \alpha$ (см. рис.)

Решая систему уравнений совместно (проще всего выражения, содержащие α , оставить слева, а остальные слагаемые перенести налево, а затем поделить одно уравнение на второе с учетом того, что $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$) получим

$$q = \frac{m}{B} \left(\frac{v}{l \sin \alpha} - \frac{g}{v} \operatorname{tg} \alpha \right)$$

Пример 3.44. В постоянном магнитном поле заряженная частица движется по окружности. Когда индукцию магнитного поля стали медленно увеличивать, обнаружилось, что скорость частицы изменяется так, что кинетическая энергия частицы оказывается пропорциональной частоте её обращения. Найдите радиус орбиты частицы в поле с индукцией B , если в поле с индукцией B_0 он равен R_0 .

Для частицы с массой m и зарядом q , движущейся равномерно по окружности радиуса R под действием силы Лоренца $F_{\text{л}} = qvB$ в однородном магнитном поле с индукцией B второй закон Ньютона запишется как:

$$\frac{mv^2}{R} = qvB.$$

Откуда радиус орбиты $R = \frac{mv}{qB}$, а частота обращения

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi R} = \frac{qB}{2\pi m}.$$

По условию задачи кинетическая энергия частицы пропорциональна частоте обращения, т.е. выполняется соотношение

$$\frac{E}{E_0} = \frac{\nu}{\nu_0},$$

Откуда используя выражение для частоты получаем

$$\frac{E}{E_0} = \frac{B}{B_0}$$

Так как кинетическая энергия частицы $E = \frac{mv^2}{2}$, то $\frac{E}{E_0} = \frac{mv^2}{mv_0^2} = \frac{B}{B_0}$ и

$$\frac{v}{v_0} = \sqrt{\frac{B}{B_0}}$$

Откуда с учетом $R = \frac{mv}{qB}$:

$$\frac{R}{R_0} = \frac{v}{v_0} \cdot \frac{B_0}{B} = \frac{B_0}{B} \sqrt{\frac{B}{B_0}} = \sqrt{\frac{B_0}{B}}.$$

Значит

$$R = R_0 \sqrt{\frac{B_0}{B}}$$

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

Как и в других темах, проверка понимания явления электромагнитной индукции, закона электромагнитной индукции $\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ и правила Ленца, определяющего направление индукционного тока, проводится в ЕГЭ с помощью заданий с выбором ответа. Однако бывают и исключения. Это обычно задания, требующие объяснения явления на качественном уровне. Рассмотрим два примера.

Пример 3.45. Намагниченный стальной стержень начинает свободное падение с нулевой начальной скоростью из положения, изображённого на рис. 1. Пролетая сквозь закреплённое проводочное кольцо, стержень создаёт в нём электрический ток, сила которого изменяется со временем так, как показано на рис. 2.

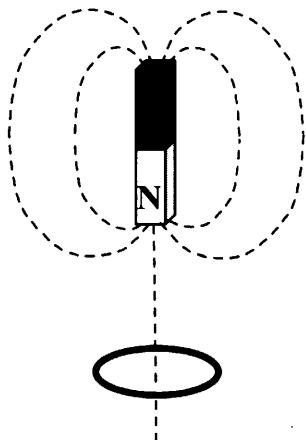


Рис. 1

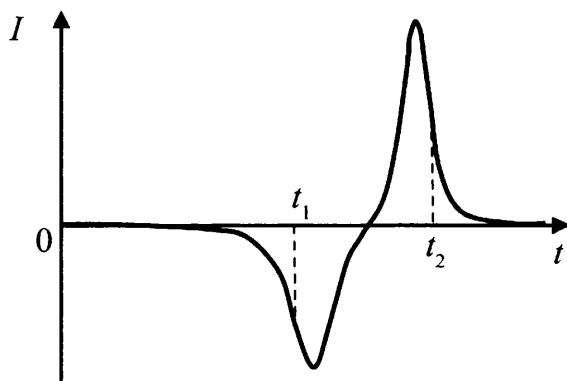
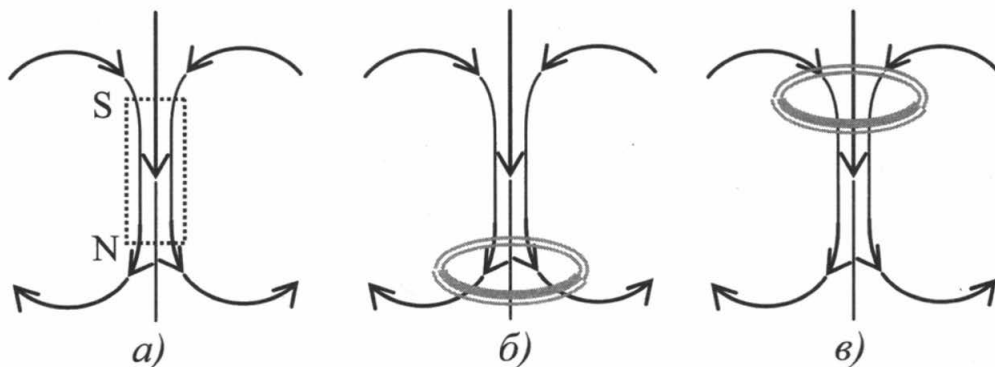


Рис. 2

Почему в моменты времени t_1 и t_2 ток в кольце имеет различные направления? Ответ поясните, указав, какие физические явления и закономерности вы использовали для объяснения. Влиянием тока в кольце на движение магнита пренебречь.

Решение. Индукционный ток в кольце вызван ЭДС индукции, возникающей при пересечении проводником линий магнитного поля. Направление индукционного тока определяется тем, нарастает поток Φ вектора магнитной индукции (с учетом знака Φ), пронизывающего кольцо, или убывает. На языке линий магнитной индукции ответ на вопрос о направлении тока зависит от того увеличивается или уменьшается число магнитных линий, пронизывающих кольцо, и, кроме того, куда они направлены.

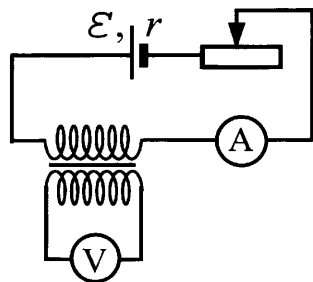
Линии магнитного поля проходят не только снаружи тела магнита, но и внутри него. В данном случае внутри магнита они направлены сверху вниз и идут существенно гуще, чем во внешнем пространстве (рис. а). Пренебрегая слабым магнитным полем вдали от магнита, рассмотрим положение магнита до пересечения плоскости кольца северным полюсом (рис. б) и после пересечения этой плоскости южным полюсом (рис. в).



Направление линий по отношению к нормали, восстановленной в плоскости кольца, при движении магнита из положения *б* в положение *в* не меняется, поэтому направление тока в кольце будет определяться только тем, убывает или увеличивается число линий, пронизывающих кольцо. Как видим, при полете магнита вниз вблизи положения на рис *б* (соответствует моменту времени t_1) число линий растёт, а вблизи положения *в* (момент времени t_2) уменьшается. Поэтому ток при пролёте мимо этих положений будет течь в разных направлениях.

Модуль силы тока зависит от скорости изменения магнитного потока, поэтому нарастает со скоростью движения. Однако при пролёте мимо плоскости кольца середины магнита ($t_1 < t < t_2$) линии, пронизывающие кольцо, идут практически параллельно, их густота не меняется, значит, магнитный поток остается постоянным, его изменение равно нулю, и сила тока в кольце также равна нулю.

Пример 3.46. На рисунке приведена электрическая цепь, состоящая из гальванического элемента, реостата, трансформатора, амперметра и вольтметра. В начальный момент времени ползунок реостата установлен посередине и неподвижен. Опираясь на законы электродинамики, объясните, как будут изменяться показания приборов в процессе перемещения ползунка реостата влево. ЭДС самоиндукции пренебречь по сравнению с $\mathcal{E}$.



Решение. При перемещении ползунка влево сопротивление цепи уменьшается, а сила тока увеличивается в соответствии с *законом Ома для полной цепи*

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}, \text{ где } R - \text{сопротивление внешней цепи.}$$

Трансформатор – устройство, действие которого основано на *явлении электромагнитной индукции*. Изменение тока, текущего по первичной обмотке трансформатора (катушка, соединенная последовательно с реостатом), вызывает изменение индукции магнитного поля, создаваемого этой обмоткой. Это приводит к изменению магнитного потока, пронизывающего вторичную обмотку трансформатора (катушка соединенная с вольтметром). В соответствии с *законом индукции Фарадея* возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ во вторичной обмотке, а следовательно, напряжение U на ее концах, регистрируемое вольтметром. Поэтому во время перемещения движка влево вольтметр будет регистрировать напряжение на концах вторичной обмотки.

Когда перемещение движка прекратится, амперметр будет показывать постоянную силу тока в цепи, а напряжение, измеряемое вольтметром, окажется равным нулю, так как ЭДС индукции возникает только *при изменении* потока, пронизывающего вторую катушку, а при постоянном токе в первичной катушке, этот поток не меняется во времени.

Отметим, что, несмотря на кажущуюся качественность рассуждений, в решении упомянуты все физические законы, на основании которых получено решение. Именно это, помимо получения верного ответа является критерием полноты решения задачи, требующей развернутого ответа.

В основном, в заданиях, требующих развернутого ответа, при использовании закона электромагнитной индукции требуется понять за счет изменения какого параметра: модуля вектора магнитной индукции B , площади контура S или угла между плоскостью контура и вектором $\vec{B}$ происходит изменение потока вектора магнитной индукции $\Phi = BS \cos \alpha$. Кроме того, конечно, в задаче требуется применить знания законов постоянного тока, который вызывается сторонними силами возникающими при изменении Φ . Описание явления электромагнитной индукции с помощью ЭДС индукции $\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$ и использовано для того, чтобы далее применить формализм, известный из анализа цепей постоянного тока, где в качестве источника тока используются аккумуляторы, батарейки, генераторы и т.п., которые также характеризуются ЭДС источника. Знак «-» в законе электромагнитной индукции связан с выбором направления обхода контура относительно направления вектора $\vec{B}$ и дальнейшим направлением индукционного тока относительно этого направления обхода. Однако в задачах ЕГЭ легче использовать закон электромагнитной индукции для расчета модуля ЭДС индукции, записывая его в виде $\mathcal{E}_{\text{инд}} = \left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right|$ и определяя направление тока по правилу Ленца. Рассмотрим сначала примеры, где меняется значение B при неизменных остальных параметрах, определяющих Φ .

Пример 3.47. Медное кольцо, диаметр которого 20 см, а диаметр провода кольца 2 мм, расположено в однородном магнитном поле. Плоскость кольца перпендикулярна вектору магнитной индукции. Определите модуль скорости изменения магнитной индукции поля со временем, если при этом в кольце возникает индукционный ток 10 А. Удельное сопротивление меди $\rho_{\text{Cu}} = 1,72 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.

Решение. Индукционный ток возникает в кольце за счет явления электромагнитной индукции. По закону электромагнитной индукции ЭДС индукции в кольце по модулю равно скорости изменения магнитного потока

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right|.$$

Магнитный поток $\Phi = BS \cos \varphi$ в данном случае меняется за счет изменения модуля вектора магнитной индукции B , поскольку по условию плоскость кольца перпендикулярна вектору магнитной индукции ($\cos \varphi = 1$) и диаметр кольца D не меняется. Поэтому

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \left| \frac{\Delta BS}{\Delta t} \right| = S \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{\pi D^2}{4} \cdot \left| \frac{\Delta B}{\Delta t} \right|$$

Сила тока в кольце при возникновении в нем сторонних сил, характеризуемых $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ по закону Ома для полной цепи

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R},$$

где R – сопротивление провода, из которого сделано кольцо.

$$R = \frac{\rho_{Cu} l}{S_{np}},$$

где $S_{np} = \frac{\pi d^2}{4}$ – площадь поперечного сечения медного провода диаметром d ,

$l = \pi D$ – длина провода, образующего кольцо. Тогда

$$I = \frac{\mathcal{E}_{инд}}{R} = \left(\frac{\pi D^2}{4} \cdot \left| \frac{\Delta B}{\Delta t} \right| \right) / \left(\frac{\rho_{Cu} l}{S_{np}} \right) = \left(\frac{\pi D^2}{4} \cdot \left| \frac{\Delta B}{\Delta t} \right| \right) / \left(\frac{4 \rho_{Cu} \pi D}{\pi d^2} \right) = \frac{\pi D d^2}{16 \rho_{Cu}} \cdot \left| \frac{\Delta B}{\Delta t} \right|$$

Отсюда

$$\left| \frac{\Delta B}{\Delta t} \right| = \frac{16 I \rho_{Cu}}{\pi D d^2} \approx 1 \text{ (Тл / с)}$$

Пример 3.48. Плоская горизонтальная фигура площадью $0,1 \text{ м}^2$, ограниченная проводящим контуром с сопротивлением 5 Ом , находится в однородном магнитном поле. Пока проекция вектора магнитной индукции на вертикальную ось Oz медленно и равномерно возрастает от $B_{1z} = -0,15 \text{ Тл}$ до некоторого конечного значения B_{2z} , по контуру протекает заряд $0,008 \text{ Кл}$. Найдите B_{2z} .

Так как по условию плоскость контура горизонтальна, ось z – вертикальна, а поле однородно закон электромагнитной индукции запишется следующим образом

$$\mathcal{E}_{инд} = \left| \frac{\Delta B S}{\Delta t} \right| = S \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t},$$

где $\Delta B = B_{2z} - B_{1z} > 0$, так как по условию проекция возрастает.

Сила тока в контуре при возникновении в нем сторонних сил, характеризующих $\mathcal{E}_{инд}$ по закону Ома для полной цепи

$$I = \frac{\mathcal{E}_{инд}}{R},$$

где R – сопротивление контура.

Заряд, протекающий за время Δt через поперечное сечение проводника из которого сделан плоская фигура,

$$q = I \Delta t$$

Объединяя три уравнения, получим

$$q = I \Delta t = \frac{S}{R} (B_{2z} - B_{1z}).$$

Откуда

$$B_{2z} = B_{1z} + \frac{Rq}{S} = 0,25 \text{ (Тл)}.$$

Пример 3.49. Замкнутый контур из тонкой проволоки помещён в магнитное поле. Плоскость контура перпендикулярна вектору магнитной индукции поля. Площадь контура $S = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$. В контуре возникают колебания тока с амплитудой $i_m = 35 \text{ мА}$, если магнитная индукция поля меняется с течением времени в соответствии с формулой $B = \alpha \cos(bt)$, где $\alpha = 6 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}$, $b = 3500 \text{ с}^{-1}$. Чему равно электрическое сопротивление контура R ?

Решение. При изменении пронизывающего контур магнитного поля в проводящем контуре возникает ЭДС электромагнитной индукции $\mathcal{E}$, а соответственно, и электрический ток. Согласно закону Ома для полной цепи сила тока

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Согласно закону электромагнитной индукции ЭДС пропорциональна скорости изменения магнитного потока сквозь контур:

$$\mathcal{E} = \left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right|.$$

При уменьшении промежутка времени формула переходит в выражение, где справа стоит производная по времени от потока $\Phi(t)$ как функции времени.

$$\mathcal{E} = |\Phi'_t(t)|$$

В данном случае $\Phi(t) = B(t)S \cos \varphi = S \cdot B(t)$, так что

$$\Phi'_t(t) = SB'_t(t) = S(\cos(bt))'_t = -Sb \sin(bt).$$

Следовательно,

$$I = \frac{|\Phi'_t(t)|}{R} = \frac{|-Sb \sin(bt)|}{R} = \frac{Sab}{R} \sin(bt).$$

Согласно полученной формуле сила тока в контуре колеблется, и амплитуда этих колебаний

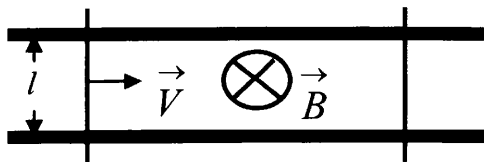
$$I_m = \frac{Sab}{R}.$$

Следовательно,

$$R = \frac{Sab}{I_m} = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot 10^{-3} \cdot 3500}{35 \cdot 10^{-3}} = 1,2 \text{ (Ом)}$$

Второй класс задач, связан с возникновением ЭДС индукции при изменении площади контура. Обычно это связано с движением одной (или двух) из границ контура, при котором происходит уменьшение или увеличения площади ограниченной замкнутым проводником, полностью погруженным в однородное магнитное поле. Также возможен вариант сдвигающимся контуром, который въезжает или выезжает из области пространства, где создано однородное поле. В этом случае для расчета потока вектора магнитной индукции требуется учесть площадь той части замкнутого контура, которая «погружена» в магнитное поле.

При движении одной из сторон контура прямоугольной формы и возникновении в контуре тока, движущаяся сторона контура оказывается проводником, по которому течет электрический ток и который находится в магнитном поле. Это дает возможность комбинирования заданий на использование закона электромагнитной индукции с использованием знаний о силе Ампера. Рассмотрим несколько примеров.



Пример 3.50. Два параллельных друг другу рельса, лежащих в горизонтальной плоскости, находятся в однородном магнитном поле, индукция $\vec{B}$ которого направлена

вертикально вниз (см. рисунок). Левый проводник движется вправо со скоростью $\vec{V}$, а правый – покоится. С какой скоростью $\vec{v}$ надо перемещать правый проводник (такой же), чтобы в три раза уменьшить силу Ампера, действующую на левый проводник? (Сопротивлением рельсов пренебречь.)

Решение. Поскольку речь идет о силе Ампера, которую требуется изменить,

$$F_A = IBl,$$

то ясно из параметров, определяющих эту силу, может быть изменена только сила тока I .

Сила тока, определяется ЭДС индукции и сопротивлением контура.

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R}$$

Так как сопротивлением рельсов можно пренебречь, а сопротивление движущихся перемычек не меняется, то сила тока может измениться только за счет изменения $\mathcal{E}_{\text{инд}}$.

ЭДС индукции определяется изменением потока вектора магнитной индукции за единицу времени

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right|$$

Поток $\Phi = BS \cos \alpha$ в однородном поле при таком движении перемычек может измениться только за счет изменения площади контура

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \left| \frac{\Delta(BS)}{\Delta t} \right| = B \cdot \left| \frac{\Delta S}{\Delta t} \right|$$

Поскольку силу Ампера надо уменьшить втрое, ЭДС индукции надо уменьшить в 3 раза. Значит, скорость изменения площади, ограниченной контуром, также должна быть меньше в три раза.

Изменение площади контура определяется относительной скоростью движения одного проводника относительно второго

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{l \Delta s_{\text{отн}}}{\Delta t} = l v_{\text{отн}}$$

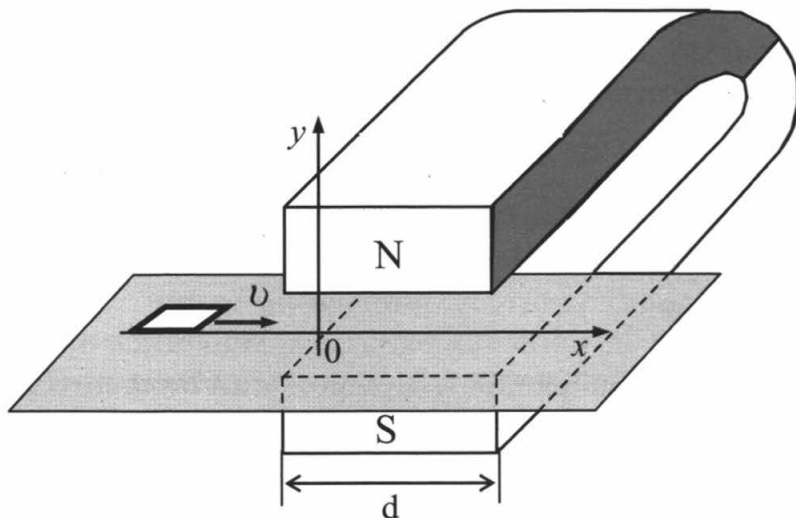
Чтобы площадь, ограниченная рельсами и двумя перемычками, уменьшалась в 3 раза медленней, нужно, чтобы правый проводник начал двигаться вправо, причем со скоростью

$$v_{\text{отн}} = \frac{1}{3} V.$$

Это произойдет, если его скорость будет равна

$$v = \frac{2}{3} V.$$

Пример 3.51. Квадратная рамка со стороной $b = 5$ см изготовлена из медной проволоки сопротивлением $R = 0,1$ Ом. Рамку перемещают по гладкой горизонтальной поверхности с постоянной скоростью V вдоль оси Ox . Начальное положение рамки изображено на рисунке. За время движения рамка проходит между полюсами магнита и вновь оказывается в области, где магнитное поле отсутствует. Индукционные токи, возникающие в рамке, оказывают тормозящее действие, поэтому для поддержания постоянной скорости движения к ней прикладывают внешнюю силу F , направленную вдоль оси Ox . С какой скоростью движется рамка, если суммарная работа внешней силы за время движения равна $A = 2,5 \cdot 10^{-3}$ Дж? Ширина полюсов магнита $d = 20$ см, магнитное поле имеет резкую границу, однородно между полюсами, а его индукция $B = 1$ Тл.



Решение. При пересечении рамкой границы области магнитного поля со скоростью V изменение потока через рамку равно

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = B \frac{\Delta S}{\Delta t} = Bb \frac{\Delta x}{\Delta t} = Bbv .$$

Тогда ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| = Bbv ,$$

А сила тока

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R} = \frac{Bbv}{R}$$

При этом возникает тормозящая сила Ампера, равная по модулю внешней силе

$$F = F_A = BIb = \frac{(Bb)^2 v}{R} .$$

Ток течет в рамке только при входе в пространство между полюсами и при выходе, так как только в эти периоды времени меняется поток через рамку, поэтому внешняя сила, обеспечивающая равномерное движение рамки совершает работу только в эти промежутки времени. Перемещение рамки в эти промежутки времени равно $2b$, поэтому приложенная внешняя сила совершает работу

$$A = 2Fb = \frac{2B^2 b^3 v}{R} .$$

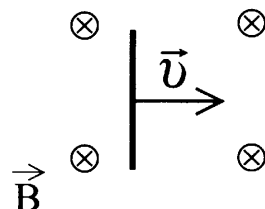
Отсюда искомая скорость

$$v = \frac{AR}{2B^2b^3} = 1 \text{ (м / с)}.$$

Во всех приведенных выше примерах не возникал вопрос, где же локализованы сторонние силы, возникновение которых констатирует закон электромагнитной индукции. Замена механизма возникновения индукционного тока эквивалентной электрической цепью, конечно, удобна, поскольку при этом мы можем использовать умение анализировать цепи постоянного тока. Однако при анализе цепей постоянного тока зачатую важно знать, в каком конкретно месте цепи стоит источник тока, поскольку результат распределения токов и напряжений в цепи будет, например зависеть от того в какое место цепи мы поставим источник тока. В случае двигающихся переключек достаточно очевидно, что сторонние силы, перемещающие заряды внутри проводника локализованы именно в движущейся переключке. Природа этих сторонних сил с очевидностью является силой Лоренца, действующая на электроны, которые движутся вместе с переключкой.

В задачах, где важно знать место локализации сторонних сил, чтобы правильно нарисовать эквивалентную электрическую схему удобно применить силовой подход для расчета ЭДС сторонних сил, возникающих при явлении электромагнитной индукции. Целесообразность применения силового подхода для описания появления сторонних сил также очевидна при рассмотрении движения отдельных линейных проводников в магнитном поле.

Пример 3.52. Горизонтально расположенный проводник длиной 1 м движется равноускоренно в вертикальном однородном магнитном поле, индукция которого равна 0,5 Тл и направлена перпендикулярно проводнику и скорости его движения (см. рисунок). Начальная скорость проводника равна нулю, а его ускорение 8 м/с². Какова ЭДС индукции на концах проводника в тот момент, когда он переместился на 1 м?



Решение.

На свободные электроны в проводнике, двигающиеся с такой же скоростью, что и проводник действует сила Лоренца, направленная, в данном случае, в нижнюю сторону рисунка. Это приведет к их смещению вдоль проводника и его поляризации (внизу «-»,верху «+»), так что внутри проводника возникнет электростатическое поле, напряженность которого направлена сверху вниз. Это поле «поляризационных» зарядов препятствует смещению оставшихся в проводнике свободных электронов.

Сила Лоренца $F_L = eBV$ и направлена вдоль проводника, тогда ее работа при перемещении вдоль проводника будет равна $A_{стор} = eBVl$. В этом случае можно назвать отношение работы сторонней силы Лоренца ЭДС индукции.

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \frac{A_{стор}}{e} = \frac{eBVl}{e} = BVl$$

Заметим, что после прекращения смещения внутри проводника должно установиться однородное поле с напряженностью E , в каждой точке которо-

го его воздействие на электрон должно уравнивать силу Лоренца, т.е. поле сторонних силы будет противоположно направлено полю электростатических

$$Ee = F_L = eBV \text{ или } E = BV$$

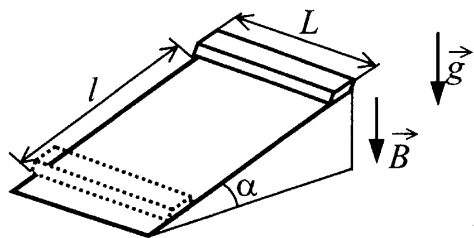
Это поле можно характеризовать и разностью потенциалов $\Delta\varphi = El = BVl$.

Будем полагать, что установление такого равновесия происходит достаточно быстро по сравнению с изменением скорости проводника в целом, который по условию движется равноускоренно. Перемещении проводника на расстояние $s=1\text{ м}$ произойдет при нулевой начальной скорости за время $t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$ и

он достигнет за это время скорости $V = at = a\sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{2as}$. Тогда искомая «ЭДС индукции»

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = BVl = Bl\sqrt{2as} = 2(B)$$

Хотя в данном случае формализм «воображаемого» источника тока с такой ЭДС вряд ли имеет смысл. Лучше, наверное говорить о разности потенциалов электростатического поля между концами проводника, которое возникает в результате движения проводника.



Пример 3.53. Тонкий алюминиевый брусок прямоугольного сечения, имеющий длину $L = 0,5$ м, соскальзывает из состояния покоя по гладкой наклонной плоскости из диэлектрика в вертикальном магнитном поле индукцией $B = 0,1$ Тл (см. рисунок). Плоскость наклонена к горизонту под углом $\alpha = 30^\circ$. Продольная ось бруска при движении сохраняет горизонтальное направление. Найдите величину ЭДС индукции на концах бруска в момент, когда брусок пройдет по наклонной плоскости расстояние $l = 1,6$ м.

Решение. При движении проводника на электроны внутри него начинает действовать сила Лоренца

$$F_L = eBV \sin(90^\circ - \alpha) = eBV \cos \alpha.$$

Она направлена вдоль алюминиевого бруска и отношению ее работы к переносимому заряду можно назвать ЭДС сторонних сил или ЭДС индукции. При перенесении одного электрона вдоль длины бруска работа силы Лоренца будет равна

$$A_{\text{стор}} = eBVl \cos \alpha.$$

В этом случае ЭДС индукции:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \frac{A_{\text{стор}}}{e} = \frac{eBVl \cos \alpha}{e} = BVl \cos \alpha$$

Скорость V проводника в конечном положении можно найти используя второй закон Ньютона и закон равноускоренного движения, а можно используя закона сохранения энергии, так как поверхность наклонной плоскости гладкая

$$\frac{mV^2}{2} = mgh = mgl \sin \alpha$$

откуда

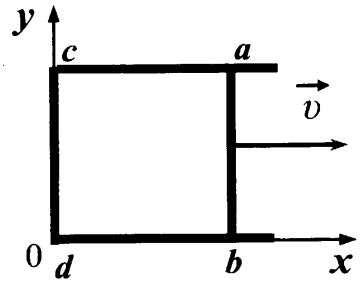
$$V = \sqrt{2mgl \sin \alpha}$$

Тогда

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = Bvl \cos \alpha = Bl \cos \alpha \sqrt{2mgl \sin \alpha} \approx 0,17(B)$$

Пример 3.54. По П-образному проводнику $abcd$ постоянного сече-

ния скользит со скоростью $\vec{v}$ медная перемычка ab длиной l из того же материала и такого же сечения. Проводники, образующие контур, помещены в постоянное однородное магнитное поле, вектор индукции которого направлен перпендикулярно плоскости проводников (см. рисунок). Какова индукция магнитного поля B , если в тот момент, когда $ab = ac$, разность потенциалов между точками a и b равна U ? Сопротивление между проводниками в точках контакта пренебрежимо мало, а сопротивление проводов велико.



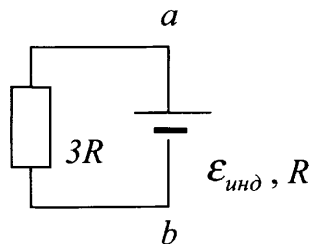
Решение. При движении перемычки в ней возникают сторонняя сила, являющаяся силой Лоренца, действующая на каждый электрон внутри перемычки идвигающая электроны по все цепи.

$$F_{\text{Л}} = eBv$$

ЭДС индукции, можно вычислить как отношение работы силы Лоренца при перемещении электрона по перемычке к заряду электрона

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \frac{A_{\text{стор}}}{e} = \frac{eBvl}{e} = Bvl$$

Так как сторонние силы локализованы в движущейся перемычке, эквивалентная электрическая схема с учетом равенства сопротивлений всех сторон квадрата $abcd$ выглядит следующим образом (рис.)



Сопротивление перемычки становится внутренним сопротивлением источника, а сама перемычка источником тока.

Используя закон Ома для полной цепи и ее участка, получим разность потенциалов электрического поля внутри проводника между точками ab . Она равна напряжению на резисторе сопротивлением $3R$.

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R + 3R} = \frac{Bvl}{4R}$$

$$U = I \cdot 3R = \frac{3RBvl}{4R} = \frac{3Bvl}{4}$$

Откуда искомая индукция магнитного поля

$$B = \frac{4U}{3vl}$$

Явление самоиндукции

Как известно, катушка, по которой течет меняющийся во времени ток, оказывается погруженной в меняющееся во времени магнитное поле, созданное ею самой. Это приводит к возникновению в ней, по аналогии с явлением электромагнитной индукции (когда катушка погружается в меняющееся магнитное поле другого источника, например, второй катушки), ЭДС самоиндукции. Вводя понятие индуктивности катушки L , как коэффициента пропорциональности между током в катушке I и магнитным потоком Φ собственного магнитного поля, пронизывающим катушку,

$$\Phi = LI,$$

легко получить выражение для ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E}_{\text{самоинд}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}$$

ЭДС самоиндукции по правилу Ленца, препятствует нарастанию тока в цепях с катушкой при попытке резко его увеличить, и наоборот, препятствует уменьшению тока, если его хотят резко уменьшить, например, размыкая ключ в цепи с катушкой. На понимание этих качественных явлений в банке заданий ЕГЭ, требующих развернутого ответа, имеются соответствующие качественные задания на описание процессов в цепи, содержащей катушку индуктивности.

Пример 3.55. Катушка, обладающая индуктивностью L , соединена с источником питания с ЭДС $\mathcal{E}$ и двумя одинаковыми резисторами R . Электрическая схема соединения показана на рис. 1. В начальный момент ключ в цепи разомкнут.

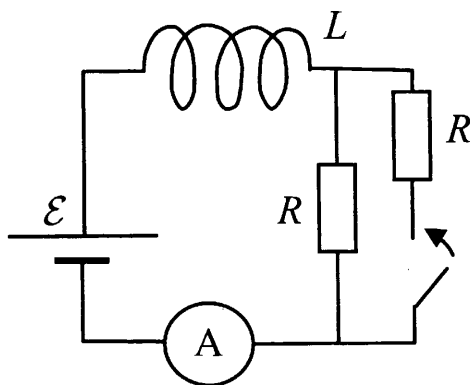


Рис. 1

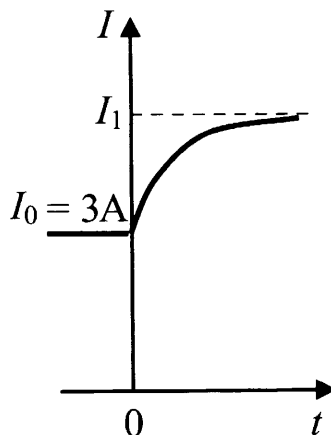


Рис. 2

В момент времени $t = 0$ ключ замыкают, что приводит к изменениям силы тока, регистрируемым амперметром, как показано на рис. 2. Основываясь на известных физических законах, объясните, почему при замыкании ключа сила тока плавно увеличивается до некоторого нового значения – I_1 . Определите значение силы тока I_1 . Внутренним сопротивлением источника тока пренебречь.

Решение. До замыкания ключа сила тока через амперметр определяется законом Ома для замкнутой цепи, так как омическое сопротивление проводов катушки мало:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

При замыкании ключа сопротивление цепи скачком уменьшается в 2 раза, но ЭДС самоиндукции, согласно правилу Ленца, препятствует изменению силы тока через катушку. Поэтому сила тока через катушку при замыкании ключа не претерпевает скачка. Постепенно ЭДС самоиндукции уменьшается до нуля, а сила тока через катушку плавно возрастает до стационарного значения

$$I_1 = 2 \frac{\mathcal{E}}{R} = 2I_0 = 6 \text{ (A)}.$$

Для нахождения закона изменения тока, следовало бы решить систему уравнений, основанных на законе Ома для полной цепи и законе электромагнитной индукции в применении к явлению самоиндукции:

$$I = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_{\text{инд}}}{(R/2)} \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_{\text{инд}} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

Однако это требует умения решать уравнения, включающие и функцию и ее производную (дифференциальные уравнения)

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

При попытке разрядить конденсатор, замкнув его обкладки проводником, скрученным в катушку, время разрядки оказывается существенно большим, чем при замыкании обкладок конденсатора прямым проводником, ток в цепи нарастает постепенно. Конденсатор, тем не менее, разряжается и ток, через катушку, обеспечивающий движение электронов от одной обкладки конденсатора к другой, начинает спадать. Явление самоиндукции на этой стадии не дает току угасать и движение электронов продолжается уже после того как конденсатор разрядился до нуля. В результате он заряжается так, что знаки заряда на обкладках меняются по знаку. Если сопротивление проводов катушки мало, то заряды на обкладках конденсатора восстанавливаются по модулю, поменяв знак. В результате процесс разрядки может быть повторен еще раз с протеканием тока в обратном направлении и возвратом конденсатора в исходное состояние. Время такого полного процесса называют *периодом колебаний* T , процессы периодического изменения заряда на одной из обкладок, силы и направления тока через катушку, напряжения между пластинами конденсатора, его энергии называют *электромагнитными колебаниями*, само техническое устройство из конденсатора и катушки *колебательным контуром*, а его идеализированную модель, в которой сопротивление проводов катушки и соединительных проводов равно нулю, *идеальным колебательным контуром*.

Как показывают расчеты в идеальном колебательном контуре с конденсатором емкостью C и индуктивностью L , период колебаний определяется формулой Томсона

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

При этом, если в начальный момент времени заряд на одной из обкладок конденсатора был равен q_0 , то при замыкании его на идеальную катушку заряд будет меняться по гармоническому закону

$$q = q_0 \cos \omega t, \quad \text{где} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

При этом сила тока, в начальный момент равнялась нулю будет меняться по закону

$$I = I_0 \sin \omega t$$

Поскольку сила тока, это производная по времени от заряда, протекающего через катушку, то $I(t) = q'_t(t) = -\omega q_0 \sin \omega t$ и $|I_0| = |\omega q_0|$.

В идеальном колебательном контуре в ходе колебаний энергия конденсатора

$W_C = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}$ периодически становится равной нулю. В этот момент времени

сила тока через катушку максимальна и равна I_0 . Считается, что катушка, по которой течет ток и вокруг которой в этот момент существует магнитное поле обладает энергией, если вся энергия конденсатора перешла в этот иной вид энергии W_L , то, используя закон сохранения энергии, ее можно приравнять энергии конденсатора. Используя приведенные выше соотношения, легко показать

$$W_L = \frac{q_0^2}{2C} = \frac{I_0^2}{2\omega^2 C} = \frac{LCI_0^2}{2C} = \frac{LI_0^2}{2}$$

Наличие энергии, пропорциональной квадрату силы тока в катушке, по которой течет ток, можно показать и независимыми экспериментами.

В произвольный момент времени t в ходе колебаний в контуре сумма энергий конденсатора и катушки сохраняется

$$\frac{q_0^2}{2C} = \frac{q(t)^2}{2C} + \frac{LI(t)^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2}$$

Задания по этой теме, требующие развернутого решения, предполагают комбинирование приведенных соотношений и четкое понимание того, что происходит с физическими величинами в ходе всего периода колебаний.

Пример 3.56. В идеальном колебательном контуре амплитуда колебаний силы тока в катушке индуктивности $I_m = 5$ мА, а амплитуда напряжения на конденсаторе $U_m = 2,0$ В. В момент времени t напряжение на конденсаторе равно 1,2 В. Найдите силу тока в катушке в этот момент.

Решение. В идеальном контуре сохраняется энергия колебаний:

$$\frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2},$$

$$\frac{CU_m^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2}.$$

Из первого уравнения получим:

$$I^2 = I_m^2 - \frac{C}{L}U^2$$

Из второго уравнения:

$$\frac{C}{L} = \frac{I_m^2}{U_m^2}.$$

Подставляя $\frac{C}{L}$ в выражение для I^2 получим:

$$I = I_m \sqrt{1 - \frac{U^2}{U_m^2}} = 4,0 \text{ мА}$$

Пример 3.57. Определите период электромагнитных колебаний в колебательном контуре, если амплитуда силы тока равна I_m , а амплитуда электрического заряда на пластинах конденсатора равна q_m .

Решение. Связь между амплитудой силы тока I_m и амплитудой электрического заряда q_m при гармонических колебаниях $I_m = q_m \omega$
Циклическая частота по определению

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Откуда получаем

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \frac{q_m}{I_m}$$

Пример 3.58. Простой колебательный контур содержит конденсатор емкостью $C = 1$ мкФ и катушку индуктивности $L = 0,01$ Гн. Какой должна быть емкость конденсатора, чтобы циклическая частота колебаний электрической энергии в контуре увеличилась на $\Delta\omega = 2 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$?

Решение. С учетом формулы Томсона $T = 2\pi\sqrt{LC}$ циклическая частота колебаний заряда и тока в контуре:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Частота колебаний энергии конденсатора в 2 раза выше:

$$W_C = \frac{q(t)^2}{2C} = \frac{q_0^2 \cos^2 \omega t}{2C} = \frac{q_0^2}{4C} (2\cos^2 \omega t) = \frac{q_0^2}{4C} (1 + \cos 2\omega t),$$

так как за период конденсатор успевает заряжаться до максимальной энер-

гии $\frac{q_0^2}{2C}$ два раза. Поэтому данное в условии значение

$$\Delta\omega = \frac{2}{\sqrt{LC_2}} - \frac{2}{\sqrt{LC_1}}.$$

Откуда

$$C_2 = \frac{4C_1}{(\Delta\omega\sqrt{LC_1} + 2)^2} = 0,25 \text{ (мкФ)}.$$

Пример 3.59. В идеальном колебательном контуре, состоящем из конденсатора и катушки индуктивности, амплитуда силы тока $I_m = 50$ мА. В таблице приведены значения разности потенциалов на обкладках конденсатора, измеренные с точностью до 0,1 В в последовательные моменты времени.

t, мкс	0	1	2	3	4	5	6	7	8
U, В	0,0	2,8	4,0	2,8	0,0	-2,8	-4,0	-2,8	0,0

Найдите значение электроёмкости конденсатора.

Решение. Анализ таблицы показывает, что период колебаний в контуре

$$T = 8 \text{ мкс} = 8 \cdot 10^{-6} \text{ с}$$

Максимальное напряжение $U_m = 2,8 \text{ В}$

Из закона сохранения энергии

$$\frac{CU_m^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2},$$

откуда

$$\frac{C}{L} = \frac{I_m^2}{U_m^2} \quad (1)$$

Из формулы Томсона

$$T = 2\pi\sqrt{LC},$$

Откуда

$$LC = \frac{T^2}{4\pi^2} \quad (2)$$

Перемножая правые и левые части двух равенств (1) и (2), получим

$$C^2 = \frac{I_m^2}{U_m^2} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2}$$

или

$$C = \frac{I_m}{U_m} \cdot \frac{T}{2\pi} = \frac{0,05 \text{ А}}{2,8 \text{ В}} \cdot \frac{8 \cdot 10^{-6} \text{ с}}{6,28} \approx 23 \text{ (нФ)}$$

Пример 3.60. В таблице показано, как изменялся заряд конденсатора в колебательном контуре с течением времени.

$t, 10^{-6} \text{ с}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$q, 10^{-9} \text{ Кл}$	2	1,42	0	-1,42	-2	-1,42	0	1,42	2	1,42

Вычислите по этим данным энергию магнитного поля катушки в момент времени $5 \cdot 10^{-6} \text{ с}$, если емкость конденсатора равна 50 пФ. Ответ выразите в нДж, округлив его до целых.

Решение. Анализ таблицы показывает, что период колебаний в контуре

$$T = 8 \text{ мкс} = 8 \cdot 10^{-6} \text{ с}$$

Максимальный заряд на конденсаторе $q_m = 2 \text{ нКл} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$

В момент времени $5 \cdot 10^{-6} \text{ с}$ заряд на конденсаторе по модулю $q = 1,42 \text{ нКл}$

Из закона сохранения энергии для этого момента времени

$$\frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C} = \frac{q_m^2}{2C},$$

$$\text{Откуда } \frac{LI^2}{2} = \frac{q_m^2}{2C} - \frac{q^2}{2C} = \frac{q_m^2 - q^2}{2C} = \frac{(4 - 2) \cdot 10^{-18}}{2 \cdot 50 \cdot 10^{-12}} = 0,02 \cdot 10^{-6} = 20 \cdot 10^{-9} = 20 \text{ (нДж)}$$

Пример 3.61. В колебательном контуре, состоящем из катушки с индуктивностью L и воздушного конденсатора емкостью C , происходят гармонические колебания силы тока с амплитудой I_0 . В тот момент, когда сила тока в катушке равна нулю, быстро (по сравнению с периодом колебаний) пространство между пластинами заполняют диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 1,5$. На сколько изменится полная энергия контура?

Решение. В момент, когда сила тока в катушке равна нулю, заряд максимален и равен Q_0 . Из закона сохранения энергии:

$$\frac{1}{2} L I_0^2 = \frac{Q_0^2}{2C}$$

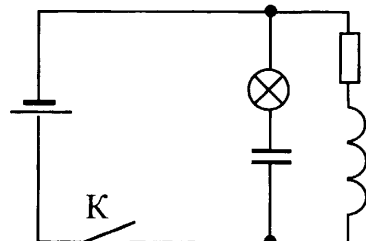
Если емкость меняют за время $\tau \ll T$, то заряд не успевает измениться, поэтому изменение энергии конденсатора:

$$\Delta W = \frac{Q^2}{2\epsilon C} - \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q_0^2(1-\epsilon)}{2\epsilon C} = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \cdot \frac{1-\epsilon}{\epsilon} = \frac{1}{2} L I_0^2 \cdot \frac{1-\epsilon}{\epsilon} = -\frac{1}{6} L I_0^2.$$

Энергия конденсатора уменьшится на $\frac{1}{6} L I_0^2$

Не следует думать, что наличие в условии задачи (в схеме установки, о которой идет речь в условии) катушки и конденсатора обязательно требует использование соотношений имеющих отношение к колебательному контуру. Так в задачах по механике наличие пружины и груза вовсе не означало, что требуется рассматривать гармонические колебания груза. Возможно вам придется использовать закон сохранения энергии для состояний системы до начала колебаний и после того как они затихнут, сами колебания не входят при этом в рассмотрение.

Пример 3.62. В электрической цепи, показанной на рисунке, ЭДС источника тока равна 12 В; емкость конденсатора 2 мФ; индуктивность катушки 5 мГн, сопротивление лампы 5 Ом и сопротивление резистора 3 Ом. В начальный момент времени ключ K замкнут. Какая энергия выделится в лампе после размыкания ключа? Внутренним сопротивлением источника тока пренебречь. Сопротивлением катушки и проводов пренебречь.



Решение. Пока ключ замкнут, через катушку L , сопротивлением проводов которой можно пренебречь, течет ток I , определяемый сопротивлением резистора:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R},$$

Если внутреннее сопротивление источника равно нулю, то напряжение на выходных клеммах источника равно $\mathcal{E}$, значит напряжение на конденсаторе

$$U_C = \mathcal{E}.$$

При этом катушка, по которой течет ток силой I , хранит запас энергии электромагнитного поля в катушке

$$W_L = \frac{L I^2}{2} = \frac{L \mathcal{E}^2}{2R^2}.$$

В конденсаторе запасена энергия

$$W_C = \frac{CU_C^2}{2} = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}.$$

После размыкания ключа начинаются электромагнитные колебания, и вся энергия, запасенная в конденсаторе и катушке, выделяется в лампе и резисторе:

$$E = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} + \frac{L\mathcal{E}^2}{2R^2} = 0,184 \text{ Дж.}$$

Согласно закону Джоуля-Ленца, выделяемая в резисторе мощность пропорциональна его сопротивлению. Так как сила тока в лампе и резисторе одинакова, энергия 0,184 Дж распределится в лампе и резисторе пропорционально их сопротивлениям. Значит $E_L + E_R = E$

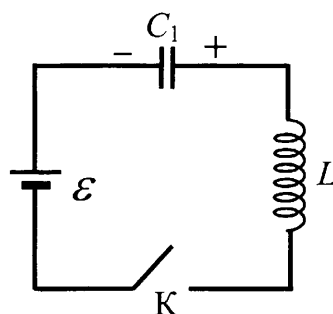
$$\frac{E_L}{E_R} = \frac{R_L}{R_R} = \frac{5}{3}$$

Откуда

$$E_L = \frac{5}{8}E = 0,115 \text{ Дж.}$$

Если в колебательный контур включен еще источник тока в котором работа сторонних сил характеризуется ЭДС источника, то при решении задачи следует понимать, что в произвольный момент времени ЭДС источника может складываться или вычитаться из ЭДС самоиндукции, а в законе сохранения энергии следует учесть работу сторонних сил, которая, как мы помним положительна, если заряды в рассматриваемом процессе «выходят» из источника, и отрицательна, если они «входят» в источник и там нейтрализуют друг друга.

Пример 3.63. В изображенной на рисунке схеме ЭДС батареи $\mathcal{E} = 10 \text{ В}$, емкость конденсатора $C = 2 \text{ мкФ}$, индуктивность катушки L неизвестна. При разомкнутом ключе К конденсатор заряжен до напряжения $U_0 = 0,5\mathcal{E}$. Пренебрегая омическим сопротивлением цепи, определите максимальный заряд на конденсаторе после замыкания ключа.



Решение. После замыкания ключа в системе возникнут колебания, связанные с явлением самоиндукции. Если проводники в системе обладают омическим сопротивлением, то колебания затухнут, и напряжение на конденсаторе будет равно ЭДС источника.

Однако в задаче предлагается рассмотреть случай когда потерь нет, значит в ходе колебаний энергия будет перетекать из катушки в конденсатор и обратно. При максимальном заряде на конденсаторе энергия его максимальна

$$\frac{Q_{\max}^2}{2C},$$

значит сила тока в цепи в этот момент времени равна нулю. При этом

заряд конденсатора увеличился до $Q_{\max}$ и изменение заряда конденсатора

$$\Delta Q = Q_{\max} - CU_0.$$

При этом работа батареи положительна, если заряд на конденсаторе увеличился

$$A = \Delta Q \cdot \mathcal{E} = \mathcal{E} \cdot (Q_{\max} - CU_0).$$

Изменение энергии конденсатора

$$\Delta W = \frac{Q_{\max}^2}{2C} - \frac{CU_0^2}{2}$$

По закону сохранения энергии (омическим сопротивлением пренебрегаем, а энергия катушки равна нулю) совершенная работа равна изменению энергии конденсатора.

$$\frac{Q_{\max}^2}{2C} - \frac{CU_0^2}{2} = \mathcal{E} \cdot (Q_{\max} - CU_0)$$

С учетом условия $U_0 = \frac{1}{2} \mathcal{E}$, получаем квадратное уравнение для $Q_{\max}$:

$$Q_{\max}^2 - 2C\mathcal{E}Q_{\max} + \frac{3}{4}C^2\mathcal{E}^2 = 0.$$

У этого квадратного уравнения есть два решения

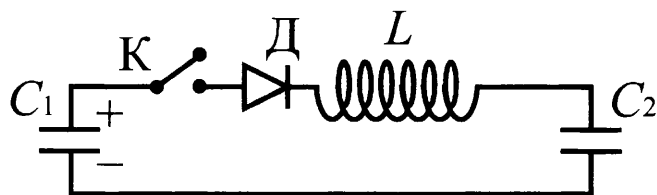
$$Q_{\max 1} = \frac{1}{2}C\mathcal{E} \text{ соответствует начальному состоянию. } Q_{\max 2} = \frac{3}{2}C\mathcal{E} > Q_{\max 1}.$$

Значит искомое значение

$$Q_{\max} = \frac{3}{2}C\mathcal{E} = 30 \text{ мкКл.}$$

В некоторых случаях катушка служит вспомогательным средством, замедляющим процессы в системе. Дело в том, что любая цепь обладает индуктивностью, правда существенно меньшей, чем катушка, и, если например, соединить два конденсатора, один из которых заряжен, друг с другом, то в системе возникают колебания с очень малым периодом, то есть с очень большой частотой. Если омическое сопротивление проводников, соединяющих элементы мало, то, как известно, из теории электромагнитных волн, из такой системы энергия уносится, в основном, в виде электромагнитных волн. Поэтому добавление катушки позволяет уменьшить частоту колебаний. В то же время добавление в цепь такого элемента как полупроводниковый диод, не дает току протекать в разных направлениях. Поэтому сочетание катушка с диодом позволяет, с одной стороны, использовать модель системы с отсутствием потерь энергии на нагревание, а с другой стороны, утверждать, что энергия в системе не будет расходоваться и на излучение электромагнитных волн.

Пример 3.64. К конденсатору C_1 через диод и катушку индуктивности L подключён конденсатор ёмкостью $C_2 = 2$ мкФ. До замыкания ключа K конденсатор C_1 был заряжен до напряжения $U = 50$ В, а конденсатор C_2 не заряжен. После замыкания ключа система перешла в новое состояние равновесия, в котором напряжение на конденсаторе C_2 оказалось равным $U_2 = 20$ В. Какова ёмкость конденсатора C_1 ? (Активное сопротивление цепи пренебрежимо мало.)



Решение. Так как процесс зарядки конденсатора C_2 происходит из-за наличия катушки медленно, то нет потерь энергии на излучение. Диод способствует тому, что в системе не может возникнуть электромагнитных колебаний. Поэтому после замыкания ключа K первоначальная энергия заряженного конденсатора C_1 в новом состоянии равновесия распределяется между конденсаторами и катушкой, а после прекращения тока в катушке между конденсаторами:

$$W_{\text{э}} = W'_{\text{э}1} + W'_{\text{э}2} + \frac{LI^2}{2} = W_{\text{э}1} + W_{\text{э}2}.$$

Кроме того, выполняется закон сохранения заряда:

$$q = q_1 + q_2$$

Энергия заряженного конденсатора C_1 до замыкания ключа K :

$$W_{\text{э}} = \frac{C_1 U^2}{2}.$$

Суммарная энергия заряженных конденсаторов после замыкания ключа K :

$$W_{\text{э}1} + W_{\text{э}2} = \frac{C_1 U_1^2}{2} + \frac{C_2 U_2^2}{2}.$$

Заряд q конденсатора C_1 до замыкания ключа, а также заряды q_1 и q_2 конденсаторов после замыкания ключа и прихода системы в равновесие

$$q = C_1 U; q_1 = C_1 U_1; q_2 = C_2 U_2.$$

Объединяя соотношения, получаем систему уравнений

$$C_1 U^2 = C_1 U_1^2 + C_2 U_2^2,$$

$$C_1 U = C_1 U_1 + C_2 U_2.$$

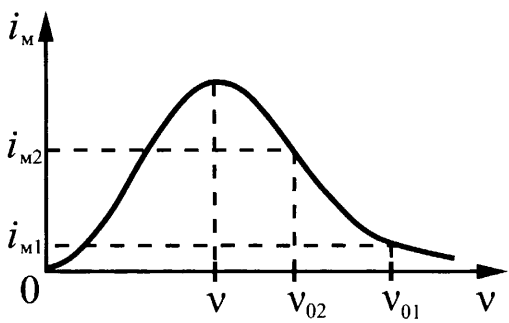
Решая эту систему, получаем

$$C_1 = \frac{C_2 U_2}{2U - U_2} = 0,5 \text{ (мкФ)}.$$

И, в заключение, следует сказать о вынужденных колебаниях в контуре, обладающем собственным периодом $T = 2\pi\sqrt{LC}$ и, соответственно, собственной частотой $\nu_0 = \frac{1}{T}$. Роль «вынуждающей силы» для такой колебательной системы выполняет генератор незатухающих колебаний, который в условиях наличия омического сопротивления в контуре, приводит систему к колебаниям, задаваемым генератором, а не собственной частотой колебаний. Математическое описание системы оказывается совершенно аналогичным описанию вынужденных колебаний в механических системах с потерями на трение. Поэтому результат таких расчетов показывает, что в системе устанавливаются колебания с частотой задаваемой генератором, но амплитуда этих колебаний оказывается максимальной, когда частота «вынуждающей силы», то есть частота колебаний напряжения на генераторе равна частоте собственных колебаний контура $\nu_0 = \frac{1}{T}$. Такая частота называется *резонансной*, а само явление резонансом. Приход к резонансу может

осуществляться не только варьированием частоты на генераторе при неизменных параметрах контура, но и, наоборот, подбором емкости и индуктивности колебательного контура при заданной частоте напряжения на генераторе (источнике переменного напряжения). В банке заданий, требующих развернутого ответа, имеются задание на понимание такого описания поведения колебательного контура после установления в нем вынужденных колебаний с частотой ν .

Пример 3.65. К колебательному контуру подсоединили источник тока, на клеммах которого напряжение гармонически меняется с частотой ν . Электроёмкость C конденсатора колебательного контура можно плавно менять от минимального значения $C_{\min}$ до максимального $C_{\max}$, а индуктивность его катушки постоянна. Ученик постепенно увеличивал ёмкость конденсатора от минимального значения до максимального и обнаружил, что амплитуда силы тока в контуре всё время возрастала.

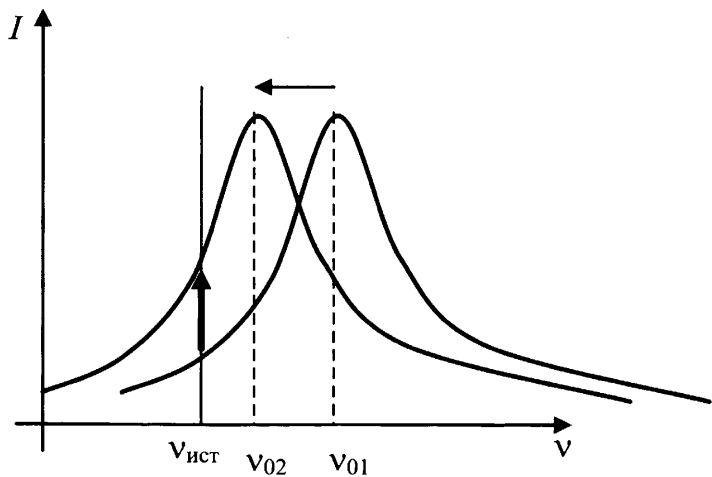


Опираясь на свои знания по электродинамике, объясните наблюдения ученика.

Решение. В описанном опыте колебания в контуре являются вынужденными, они совершаются с частотой ν , задаваемой источником тока. Но колебательный контур имеет собственную частоту колебаний ν_0 , и амплитуда колебаний тока в нём увеличивается как при увеличении частоты ν от нуля до ν_0 , так и при уменьшении частоты от больших значений до значения ν_0 . Резонансная кривая (рис.) имеет максимум при $\nu = \nu_0$. Собственная частота колебаний контура зависит от ёмкости конденсатора и согласно формуле Томсона

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Раз ученик, увеличивал ёмкость конденсатора от $C_{\min}$ до $C_{\max}$, то резонансная частота уменьшалась от ν_{01} до ν_{02} и вершина резонансного колокола сдвигалась влево (рис.).



Раз это привело к возрастанию амплитуды тока при заданной частоте, значит выбранная частота $\nu_{\text{ист}}$ была меньше и ν_{01} , и ν_{02} .

Оптику традиционно относят к разделу школьного курса «Электродинамика», основываясь на том, что свет во многих явлениях ведет себя как электромагнитная волна. Закономерности геометрической оптики можно вывести, используя принцип Гюйгенса и изменение скорости распространения электромагнитной волны в различных средах.

Однако представления о свете как о потоке частиц – фотонов также имеет право на существование, так как с начала 20 века успешно развивается квантовая оптика, и явления фотоэффекта или спектры газов трудно объяснить, не опираясь на эти представления.

Следуя структуре открытого банка ФИПИ мы рассмотрим сложные задания, относящиеся к оптике и требующие развернутого ответа в разделе «Электродинамика».

Сложные задания по геометрической оптике включают в себя комбинации закона преломления на границе двух сред и школьного курса геометрии (что естественно), совместное использование формулы тонкой линзы и ее линейного увеличения, комбинирование знаний по механике и геометрической оптики, когда механическое движение проецируется на экран через собирающую линзу.

Закон преломления света.

При падении луча под углом α на границу раздела сред с абсолютными (относительно вакуума) показателями преломления n_α и n_γ , угол преломления γ связан с углом падения соотношением, называемым *законом преломления света*

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{n_\gamma}{n_\alpha} \quad \text{или} \quad n_\alpha \sin \alpha = n_\gamma \sin \gamma$$

Так как $\sin \gamma \leq 1$, то при $\frac{n_\gamma}{n_\alpha} < 1$, т.е. при переходе из оптически более плотной среды в менее плотную (из воды в воздух, например), при $\alpha \geq \arcsin\left(\frac{n_\gamma}{n_\alpha}\right)$ наблюдается не преломление света, а его отражение от границы раздела обратно в среду с показателем преломления n_α . Это явление получило название *явление полного внутреннего отражения*. А угол $\theta = \arcsin\left(\frac{n_\gamma}{n_\alpha}\right)$ – *угла полного внутреннего отражения*.

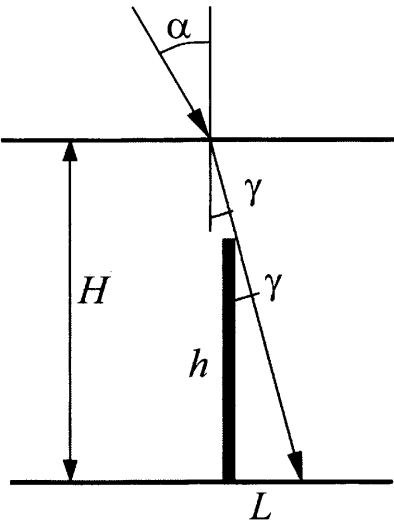
В оптике также соблюдается *принцип обратимости лучей*. Поэтому картина преломления на границе раздела двух прозрачных сред одинакова, откуда бы луч не падал на границу раздела. Скользящий вдоль поверхности воды луч, идущий из воздуха в воду под углом 90° , войдет в нее так, что угол преломления будет равен углу полного внутреннего отражения при падении луча, наоборот, из воды в воздух.

Ясно, что при использовании этих законов требуется твердое знание определенных синуса, косинуса, тангенса углов в прямоугольном треугольнике и умение получить одну из этих функций из другой. Если в задаче требуется найти какой-либо угол, то в принципе достаточно найти его тригонометрическую функцию (например, $\sin \alpha = 0,75$) и в ответе написать $\alpha = \arcsin(0,75)$. Конечно, если оказа-

лось, что $\operatorname{tg}\alpha = 1$, то стыдно не знать, что $\alpha = 45^\circ$. За такое «незнание» эксперты могут и снять балл при проверке задания.

Пример 3.66. В дно водоема глубиной 3 м вертикально вбита свая, скрытая под водой. Высота сваи 2 м. Свая отбрасывает на дне водоема тень длиной 0,75 м. Определите угол падения солнечных лучей на поверхность воды. Показатель преломления воды $n = \frac{4}{3}$.

Луч, формирующий границу тени показан на рисунке.



Согласно рисунку, высота сваи h связана с длиной тени L и углом γ между сваей и скользящим по ее вершине лучом света соотношением:

$$\sin\gamma = \frac{L}{\sqrt{h^2 + L^2}}.$$

Угол γ является и углом преломления солнечных лучей на поверхности воды. Согласно закону преломления

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n, \text{ или } \sin\alpha = n \cdot \sin\gamma.$$

Следовательно,

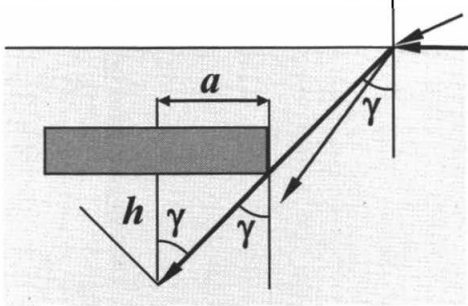
$$\sin\alpha = n \frac{L}{\sqrt{h^2 + L^2}} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}}{\sqrt{4 + \frac{9}{16}}} = \frac{4}{\sqrt{73}};$$

$$\alpha = \arcsin \frac{4}{\sqrt{73}} \approx 28^\circ$$

Пример 3.67. Под водой находится понтон прямоугольной формы шириной 4 м, длиной 6 м и высотой 1 м. Расстояние от поверхности воды до нижней поверхности понтона 2,5 м. Небо затянуто сплошным облачным покровом, полностью рассеивающим солнечный свет. Определите глубину тени под понтоном (отсчитывая ее от нижней поверхности понтона). Рассеиванием света водой пренебречь. Показатель преломления воды относительно воздуха принять равным $\frac{4}{3}$.

Область тени – это пирамида, боковые грани которой очерчивают те лучи света, которые до преломления распространялись вдоль поверхности воды, а после преломления касаются краев понтона (см рис.). Ясно, что полная тень будет определяться лучами, касающимися более узкой части понтона. Лучи, касающиеся сторон, определяющих длину понтона, будут ограничивать зону полутени.

Согласно рисунку, глубину h тени можно определить по формуле



$$h = \frac{a}{\operatorname{tg} \gamma},$$

где $a = 2$ м – полуширина понтона. Значение $\operatorname{tg} \gamma$ найдем из закона преломления света:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = n,$$

где n – показатель преломления воды, а $\alpha = 90^\circ$. Откуда:

$$\sin \gamma = \frac{\sin \alpha}{n} = \frac{1}{n} = \frac{3}{4}.$$

Используя тригонометрические соотношения

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sin \gamma}{\sqrt{1 - \sin^2 \gamma}} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1 - \frac{9}{16}}} = \frac{3}{\sqrt{7}};$$

Тогда

$$h = \frac{a}{\operatorname{tg} \gamma} = \frac{2\sqrt{7}}{3} \approx 1,76 \text{ (м)}$$

ЛИНЗЫ

Местонахождение изображения точечного источника света S_1 определяют по пересечению двух лучей (рис. 18 а). При этом предполагается, что остальные все лучи, вышедшие из источника и прошедшие через ту же оптическую систему, придут в ту же точку, то есть изображение формируется не двумя лучами, а огромным их числом. Такое изображение называют действительным, так как оно может быть получено на экране, если экран поставить в точку пересечения лучей.

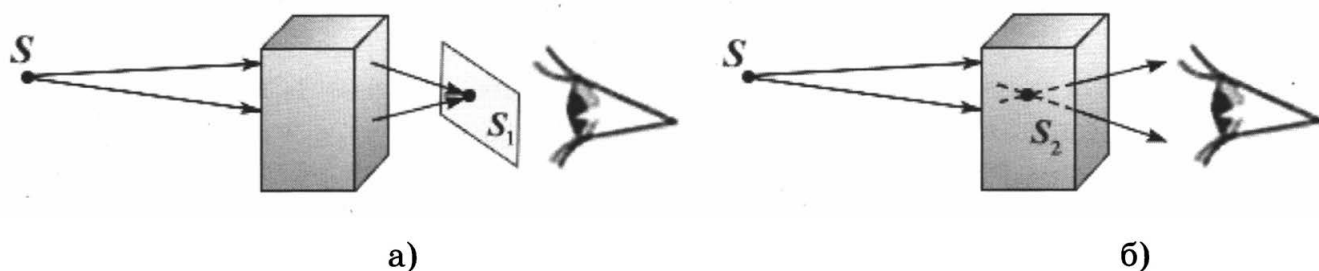


Рис. 18

Если пройдя оптическую систему, лучи расходятся, о месте положения светящейся точки судят по пересечению их продолжений (рис. 18 б). Такую точку называют *мнимым* изображением светящейся точки.

Реальные источники света имеют конечные размеры. В этом случае их рассматривают как совокупность точечных источников, расположенных друг относительно друга в определенном порядке. Так, с помощью отдельных светящихся лампочек формируется изображение на уличных рекламных щитах.

Линза представляет собой однородное прозрачное тело, ограниченное двумя сферическими поверхностями (рис. 19).

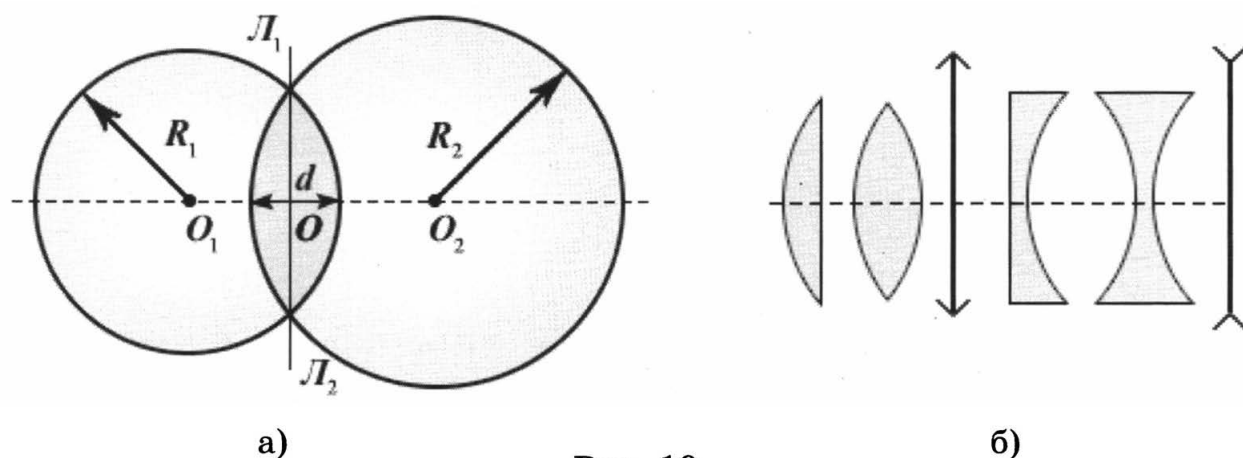


Рис. 19

Линия O_1O_2 , соединяющая центры сфер, ограничивающие поверхность линзы, называется *главной оптической осью* линзы. Плоскость L_1L_2 , проходящая через линию пересечения сфер, ограничивающих линзу, называется *плоскостью линзы*. Плоскость линзы перпендикулярна главной оптической оси линзы. Точка O пересечения плоскости линзы и ее главной оптической оси называется *центром линзы*. Отрезок оптической оси, заключенный между сферами, ограничивающими линзу, называется *толщиной линзы* d . Линза называется *тонкой*, если $d \ll R_1$ и $d \ll R_2$, где R_1 и R_2 – радиусы сфер, ограничивающих линзу. Эти радиусы называются *радиусами кривизны* поверхностей линзы.

На рисунке 19б представлены простейшие профили стеклянных линз. Первые две из них в воздухе являются собирающими линзами, а вторые две – рассеивающими. Эти названия связаны с тем, что в собирающей линзе луч, преломляясь, отклоняется в сторону оптической оси, а в рассеивающей наоборот.

Изучение преломления лучей, прилегающих к оптической оси, на сферических поверхностях, ограничивающих линзу, показывает, что лучи, проходящие через тонкую линзу из стекла в воздухе, обладают рядом свойств, позволяющих построить изображение источников света в этой линзе.

1. Лучи, идущие параллельно главной оптической оси, отклоняются за собирающей линзой (рис. 20, а) так, что собираются в точке, называемой *фокусом*. В

рассеивающей линзе лучи, идущие параллельно главной оптической оси, отклоняются так, что в фокусе, находящемся со стороны падающих лучей, собираются их продолжения (рис. 20, б). Расстояние до фокусов с одной и другой стороны тонкой линзы одинаково и не зависит от профиля правой и левой поверхностей линзы.

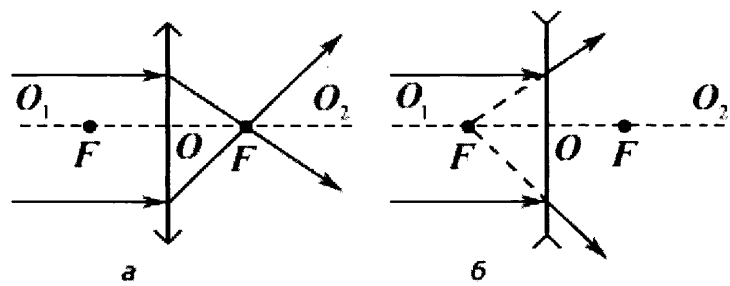


Рис. 20

2. Луч, идущий через центр линзы (рис. 21, а – собирающая линза, рис. 21, б – рассеивающая линза), не преломляется.

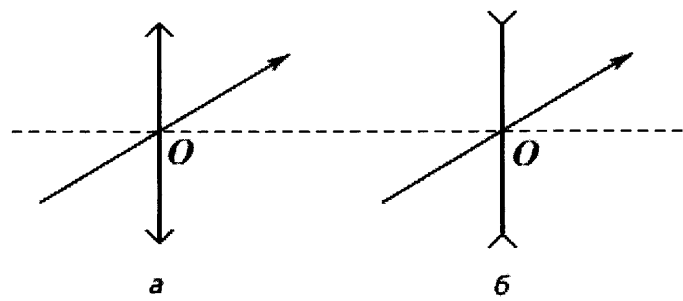


Рис. 21

3. Лучи, идущие параллельно друг другу, но не параллельно главной оптической оси, пересекаются в точке (побочном фокусе) на фокальной плоскости, которая проходит через фокус перпендикулярно главной оптической оси (рис. 22, а – собирающая линза, рис. 22, б – рассеивающая линза).

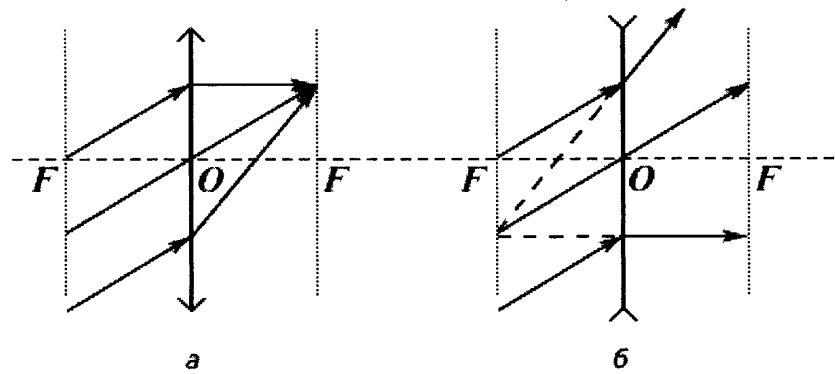


Рис. 22

При построении (рис. 23, а) изображения какой-либо точки (например, конца стрелки) с помощью собирающей линзы, из этой точки выпускают два луча: параллельно главной оптической оси и через центр О линзы. При построении изображения отрезка, перпендикулярного главной оптической оси, его изображение оказывается также отрезком, перпендикулярным главной оптической оси.

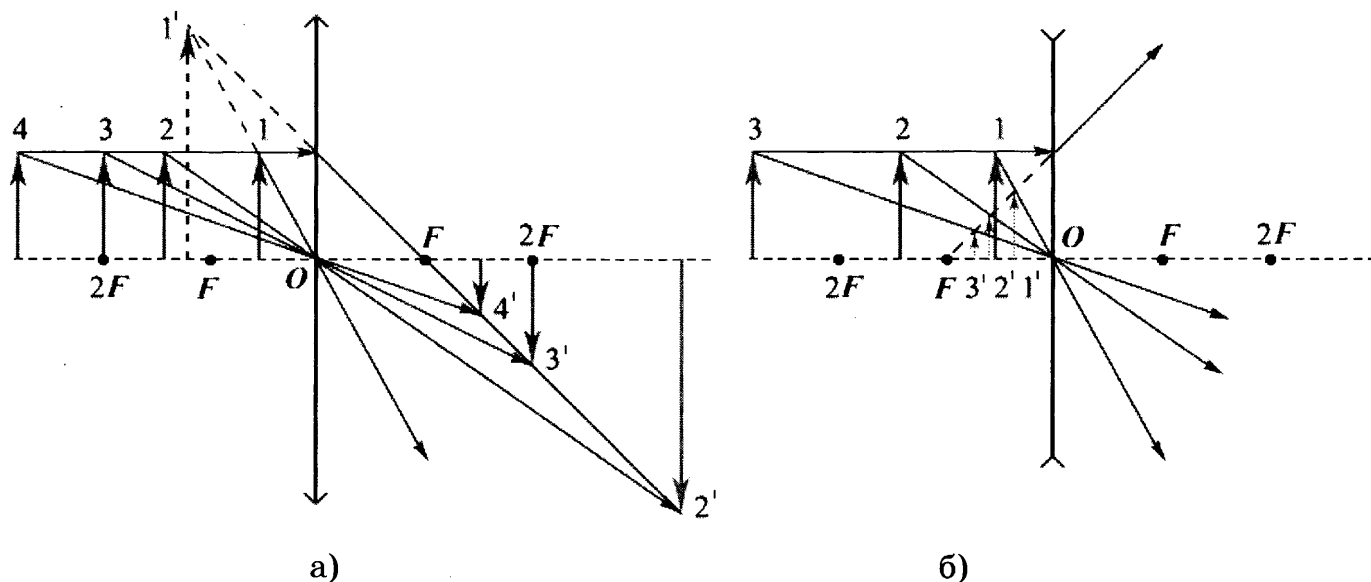


Рис. 23

В зависимости от расстояния от стрелки до линзы (меньше фокусного, от фокусного до двух фокусных, и более двух фокусных) можно получить три типа изображения:

- мнимое, увеличенное, прямое
- действительное, увеличенное, перевернутое
- действительное, уменьшенное, перевернутое

Расстояние $a = 2F$ дает действительное, перевернутое изображение того же размера, что источник.

В случае рассеивающей линзы изображение предмета может получиться только одного типа – мнимое, уменьшенное, прямое. В этом легко убедиться, проведя аналогичные построения конца стрелки с помощью двух лучей (рис. 23 б).

Отношение размера изображения H в направлении, перпендикулярном главной оптической оси, к размеру предмета h в этом направлении называется линейным увеличением предмета в тонкой линзе (обозначается буквой Γ). Как видно из рис. 6, из подобия треугольников следует, что для тонкой линзы при любом типе изображения линейное увеличение равно:

$$\Gamma = \frac{H}{h} = \frac{b}{a} = \frac{f}{d}$$

где $a = d$ и $b = f$ – расстояния от предмета до линзы и от изображения до линзы (к сожалению разные учебники обозначают эти расстояния разными буквами, поэтому использованы два наиболее распространенных).

Эти расстояния в тонкой *собирающей* линзе связаны соотношением

$$\frac{1}{a} \pm \frac{1}{b} = \frac{1}{d} \pm \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$$

Это соотношение называют *формулой тонкой линзы*. Знак «-» в ней ставится в случае мнимого изображения.

Если рассматривать *рассеивающую* линзу, то формула тонкой линзы запишется так:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{F}$$

где буквы обозначают соответствующие расстояния (положительные числа).

Величина $D = \pm \frac{1}{F}$ называется *оптической силой линзы*. Если фокусное расстояние F выражено в метрах, то оптическая сила линзы D получается в диоптриях (дптр).

Оптическая сила рассеивающей линзы считается отрицательной. Иногда и фокусное расстояние рассеивающей линзы считают отрицательным (даже в заданиях ЕГЭ, см *Пример 3.72*), чтобы не ставить знак минус в формуле тонкой линзы знак «минус» перед выражением $\frac{1}{F}$. Однако расстояние считать отрицательным некорректно, на наш взгляд.

Формула тонкой линзы и проведенные построения позволяют сделать вывод об отношении линейных размеров протяженного изображения к линейным размерам протяженного источника.

Пример 3.68. Тонкая линза L даёт чёткое действительное изображение предмета AB на экране $\mathcal{E}$ (см. рис. 1). Что произойдёт с изображением предмета на экране, если верхнюю половину линзы закрыть куском чёрного картона K (см. рис. 2)? Постройте изображение предмета в обоих случаях. Ответ поясните, указав, какие физические закономерности вы использовали для объяснения.

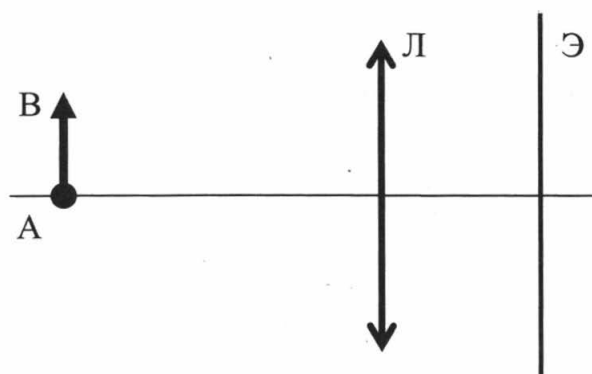


Рис. 1

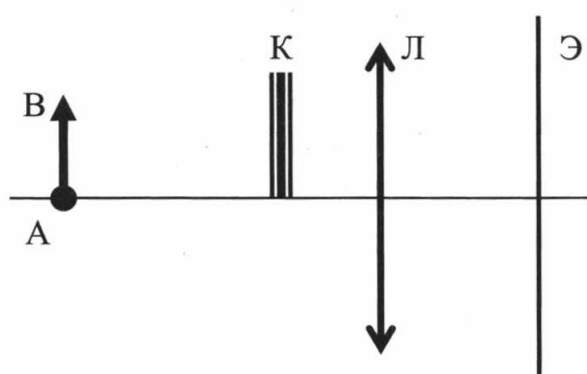
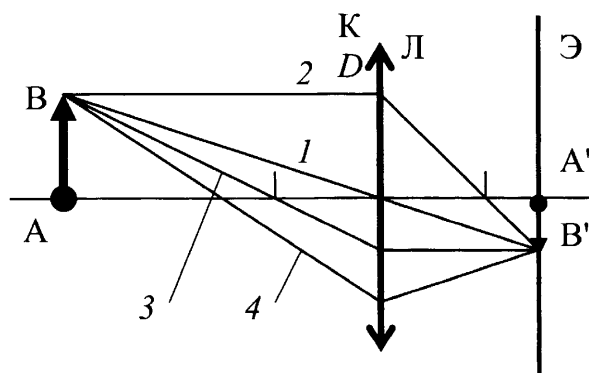


Рис. 2

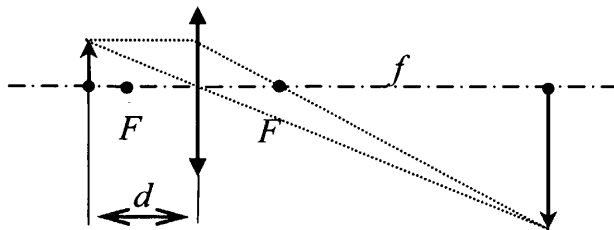
Решение. Построение изображения предмета AB в линзе в отсутствии картона показано на рисунке: луч 1 проходит через центр линзы, луч 2 идет параллельно оптической оси и через правый фокус линзы. Точка B' – изображение точки B . Все остальные лучи выходящие из точки B и прошедшие через линзу (например, лучи 3 и 4) также придут в точку B' .

Кусок картона K перекрывает только часть лучей (например, 1 и 2), формирующих изображение. Изображение теперь будет формироваться только лучам, не попадающим на картон (например, 3 и 4). Благодаря таким лучам изображение предмета окажется на прежнем месте, не изменит формы, но станет менее ярким, т.к. часть энергии, направление распространения которой показывают лучи, выходящие из точки B , не попадет в точку B' .



Пример 3.69. На экране с помощью тонкой линзы получено изображение стержня с пятикратным увеличением. Стержень расположен перпендикулярно главной оптической оси, и плоскость экрана также перпендикулярна этой оси. Экран передвинули на 30 см вдоль главной оптической оси линзы. Затем, при неизменном положении линзы, передвинули стержень так, чтобы изображение снова стало резким. В этом случае получено изображение с трехкратным увеличением. Определите фокусное расстояние линзы.

Решение. На рисунке схематически изображено положение линзы, предмета и изображения на экране, образованного лучами, прошедшими через линзу. d – расстояние от линзы до предмета, f – расстояние от линзы до экрана.



Используя формулу тонкой линзы, определяем фокусное расстояние линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{d},$$

Откуда

$$F = \frac{fd}{f+d}.$$

Увеличение Γ , даваемое линзой, по условию равно 5. Значит

$$\Gamma = \frac{f}{d} = 5,$$

что позволяет записать фокусное расстояние линзы в виде

$$F = \frac{fd}{f+d} = \frac{f}{\frac{f}{d}+1} = \frac{f}{\Gamma+1} = \frac{f}{6}$$

После перемещения экрана для новых расстояний до предмета и его изображения это соотношение также будет выполнено:

$$F = \frac{f_1}{\Gamma_1+1} = \frac{f_1}{4}$$

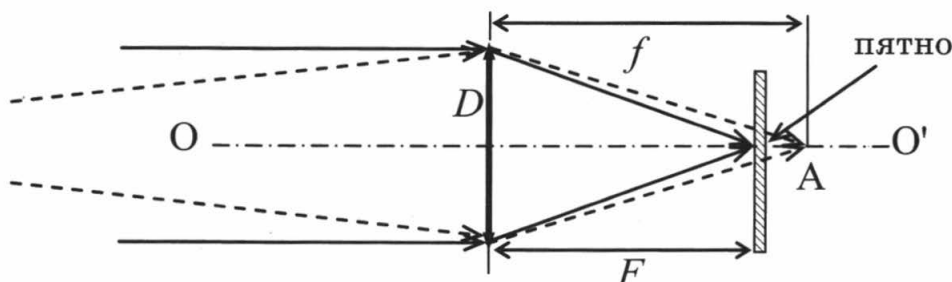
Таким образом, $f = 6F$, а $f_1 = 4F$, то есть экран оказался ближе к линзе на величину $\Delta l = 6F - 4F = 2F$

По условию $\Delta l = 30$ см, значит $2F = 30$ см и $F = 15$ см

Пример 3.70. Условимся считать изображение на пленке фотоаппарата резким, если вместо идеального изображения в виде точки на пленке получается изображение пятна диаметром не более некоторого предельного значения. Поэтому, если объектив находится на фокусном расстоянии от пленки, то резкими считаются не только бесконечно удаленные предметы, но и все предметы, находящиеся дальше некоторого расстояния d . Оцените предельный размер пятна, если при фокусном расстоянии объектива 50 мм и диаметре

входного отверстия 5 мм резкими оказались все предметы, находившиеся на расстояниях более 5 м от объектива. Сделайте рисунок, поясняющий образование пятна.

Решение. На рисунке показаны лучи идущие до объектива параллельно друг другу, а после линзы объектива собирающиеся на пленке в фокусе линзы (показаны сплошной линией). Лучи, идущие от предмета, расположенного на конечном расстоянии $d=5\text{ м}$, собираются в точке А на расстоянии f (показаны пунктирными линиями), то есть за пленкой, и поэтому образуют на пленке пятно диаметром δ .



Из подобия равнобедренных треугольников с вершиной в точке А и с основаниями в виде диаметра линзы D и диаметра пятна δ , получим соотношение:

$$\frac{\delta}{D} = \frac{f - F}{f}$$

Из формулы тонкой линзы

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{d} = \frac{1}{F}$$

Следует, что:

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{F} - \frac{1}{f} = \frac{f - F}{Ff} = \frac{1}{F} \cdot \frac{f - F}{f} = \frac{1}{F} \cdot \frac{\delta}{D}.$$

Откуда

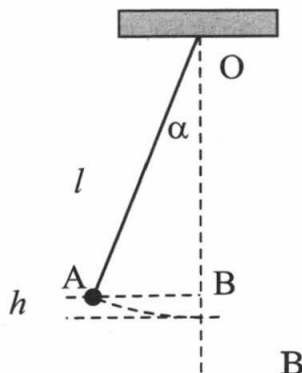
$$\delta = \frac{FD}{d} = \frac{50\text{ мм} \cdot 5\text{ мм}}{5000\text{ мм}} = 0,05\text{ мм}$$

Пример 3.71. Небольшой груз, подвешенный на нити длиной 2,5 м, совершает гармонические колебания, при которых его максимальная скорость достигает 0,2 м/с. При помощи собирающей линзы с фокусным расстоянием 0,2 м изображение колеблющегося груза проецируется на экран, расположенный на расстоянии 0,5 м от линзы. Главная оптическая ось линзы перпендикулярна плоскости колебаний маятника и плоскости экрана. Определите максимальное смещение изображения груза на экране от положения равновесия.

Решение. Определим сначала максимальное смещение А от вертикали реального груза. При колебаниях маятника максимальная скорость груза v может быть определена из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = mgh,$$

где $h = l(1 - \cos \alpha) = 2l \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ – максимальная высота подъема груза (см. рис.).



связи с малостью угла α :

$$\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{1}{2} \sin \alpha = \frac{A}{2l},$$

где A – максимальное смещение груза от вертикали (см. рис.). Отсюда

$$\frac{mv^2}{2} = 2mgl \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2mgl \cdot \frac{1}{4} \sin^2 \alpha = \frac{mglA^2}{2l^2} = \frac{mgA^2}{2l}.$$

Откуда $v^2 = \frac{gA^2}{l}$ или

$$A = v \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Максимальное смещение A_1 изображения груза на экране, расположенном на расстоянии b от плоскости тонкой линзы, определяется увеличением

линзы $\Gamma = \frac{b}{a}$, где a – расстояние от груза до линзы:

$$A_1 = A\Gamma = A \frac{b}{a}$$

Так как расстояние b и фокусное расстояние линзы известны, расстояние a можно определить, применив формулу тонкой линзы:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

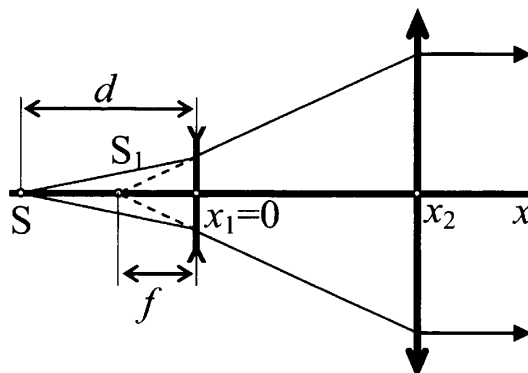
$$a = b \frac{F}{b - F}$$

Следовательно,

$$A_1 = v \sqrt{\frac{l}{g} \frac{b}{a}} = v \sqrt{\frac{l}{g} \left(\frac{b - F}{F} \right)} \approx 0,15 \text{ (м)}.$$

Пример 3.72. На оси Ox в точке $x_1 = 0$ находится оптический центр тонкой рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = -20$ см, а в точке $x_2 = 20$ см – тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_2 = 30$ см. Главные оптические оси обеих линз лежат на оси x . Свет от точечного источника S , расположенного в точке $x < 0$, пройдя данную оптическую систему, распространяется параллельным пучком. Найдите координату x точечного источника.

Решение. На рисунке изображен ход лучей через систему линз.



Обозначим фокусное расстояние рассеивающей линзы F_1 и будем считать его положительным числом.

Лучи через рассеивающую линзу от источника рассеиваются так, что их продолжения сформировали бы при отсутствии собирающей линзы мнимое изображение в точке S_1 . Поэтому расстояния d и f связаны между собой формулой тонкой линзы для рассеивающей линзы.

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{F_1}$$

Поскольку после рассеивающей линзы лучи, падая на собирающую линзу, идут после нее параллельно, фокус собирающей линзы должен лежать в точке S_1 . Значит

$$x_2 + f = F_2,$$

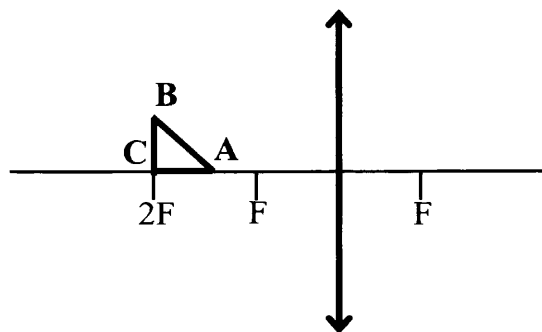
откуда $f = F_2 - x_2 = 10 \text{ см}$

Тогда из формулы тонкой линзы

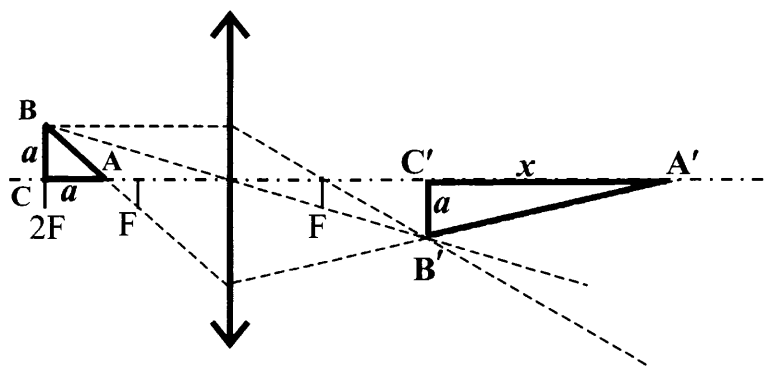
$$\frac{1}{d} = \frac{1}{f} - \frac{1}{F_1} = \frac{F_1 - f}{fF_1} \text{ и } d = \frac{fF}{F_1 - f} = 20 \text{ см}$$

К сожалению, в банке ЕГЭ встречаются задания, решение которых основано на формальном использовании формулы тонкой линзы, однако противоречит фундаментальным понятиям геометрической оптики. Одно из них приведено ниже

Пример 3.73. Равнобедренный прямоугольный треугольник ABC площадью 50 см^2 расположен перед тонкой собирающей линзой так, что его катет AC лежит на главной оптической оси линзы. Фокусное расстояние линзы 50 см . Вершина прямого угла C лежит дальше от центра линзы, чем вершина острого угла A . Расстояние от центра линзы до точки C равно удвоенному фокусному расстоянию линзы (см. рисунок). Постройте изображение треугольника и найдите площадь получившейся фигуры.



Задание следует воспринимать только как формальное построение изображений точек А, В и С с формальным получением треугольной фигуры с формальным вычислением площади треугольника, образовавшегося при построении изображений точек А, В, С (см. рис.).



Дело в том, что реального изображения треугольника, плоскость которого расположена вдоль оптической оси получить невозможно. Если линия $C'B'$ будет на экране четкой, то для получения четкого изображения остальных точек, потребуется перемещать экран в эти точки. Изображение $C'B'$ будет при этом неизбежно размываться.

Формально задача по замыслу авторов решается так.

Длина катетов $AC = BC = a = \sqrt{2S} = 10 \text{ см}$.

Длину x горизонтального катета $A'C'$ изображения находим по формуле

линзы: $\frac{1}{2F-a} + \frac{1}{2F+x} = \frac{1}{F}$, откуда $x = \frac{aF}{F-a}$. Длина вертикального катета

$B'C'$ изображения равна a , т.к. для него $d = f = 2F$.

Площадь изображения

$$S_1 = \frac{1}{2} A'C' \cdot B'C' = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{F}{F-a} = S \cdot \frac{F}{F-\sqrt{2S}} = \frac{5}{4} S \approx 62,5 \text{ см}^2.$$

Первые эксперименты, которые заставили усомниться в волновой теории света, господствовавшей в физике XIX века, были эксперименты по выбиванию электронов из металлических пластин при облучении их ультрафиолетовым излучением. Явление в дальнейшем было названо *фотоэффектом*. Видимый свет выбивает электроны только из таких металлов как цезий, калий и литий, однако все закономерности для ультрафиолетового излучения и видимого света одинаковы. Позже было обнаружено множество полупроводниковых материалов, с поверхности которых также выбиваются электроны.

В дальнейшем представления, предложенные для объяснения фотоэффекта, были приняты физической наукой и вылились в создание квантовой механики, в которой представления и законы классической механики претерпели существенные изменения.

После открытия структуры ядра квантовые представления были использованы и для описания ядерных систем.

Квантовая механика, где фотоны движутся со скоростью света c , и ядерная физика, где впервые экспериментально обнаружен дефект масс при перегруппировке частиц, связаны со специальной теорией относительности (СТО), созданной А. Эйнштейном в начале XX века. Понимание постулатов СТО в ЕГЭ проверяется в заданиях с кратким ответом. Однако в заданиях, требующих развернутого ответа, используются выводы из этой теории, которые нужно, например, учитывать при рождении или при распаде частиц в ходе ядерных реакций.

Фотоэффект

Основное противоречие с волновой теорией света состоит при фотоэффекте в наличии *красной границы фотоэффекта* – такой предельной длины волны, выше которой электроны не выбиваются, какой бы высокой ни была интенсивность излучения.

Теорию фотоэффекта с использованием понятие *фотон* – частицы несущей определенную энергию, создал А. Эйнштейн. Энергия такой частицы или минимальная порция энергии излучения *квант*, присущая электромагнитному излучению с частотой ν , была предложена М. Планком и равна

$$E_{\phi} = h\nu = \frac{hc}{\lambda},$$

где $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка c – скорость света в вакууме, λ – длина волны излучения в волновой теории, связанная с частотой излучения.

Согласно теории Эйнштейна для фотоэффекта энергия поглощается веществом порциями $h\nu$, и поглощение одного фотона приводит к выбиванию одного электрона. Для того, чтобы электрон покинул место вылета, необходимо затратить некоторое количество энергии, характерной для каждого металла (вещества) и называемое *работой выхода* A_{ϕ} . Остаток энергии фотона равен кинетической энергии

вылетевшего и ставшего свободным электрона $\frac{mv^2}{2}$. Закон сохранения энергии в трактовке Эйнштейна называют *уравнением Эйнштейна для фотоэффекта*

$$h\nu = A_{\text{вых}} + \frac{mv^2}{2}$$

Красная граница фотоэффекта это такая длина волны излучения, когда энергии фотона хватает только на то, чтобы электрон стал свободным, но кинетическая энергия его равна нулю, то есть

$$h\nu_{\text{кр}} = h \frac{c}{\lambda_{\text{кр}}} = A_{\text{вых}}$$

При количественном изучении фотоэффекта возникло еще несколько терминов, характеризующих процесс:

- фотокатод
- фототок
- ток насыщения
- запирающий потенциал (запирающее напряжение)

Они связаны с тем, что фотоэффект изучали на установках, схематически показанных на рисунке 24а, получая зависимость тока между пластинами от интенсивности падающего света W и электрического напряжения между пластинами. При отсутствии напряжения между ними, вылетающие электроны долетают до правой пластины, и в цепи течет небольшой *фототок* (рис. 24б). При соединении освещаемой пластинки к клемме «-» источника тока (пластина становится *фотокатодом*), а неосвещаемой пластины к клемме «+» (пластина становится анодом), сила тока в цепи возрастает за счет более быстрого движения ускоряемых электронов, выбитых светом. При дальнейшем повышении положительного потенциала неосвещаемой пластины (по отношению к освещаемой) наступает насыщение, поскольку теперь число электронов пересекающих пространство между пластинами за единицу времени определяется только числом выбитых электронов. *Ток насыщения $I_{\text{нас}}$* определяется числом фотонов падающих на фотокатод, то есть интенсивностью света W .

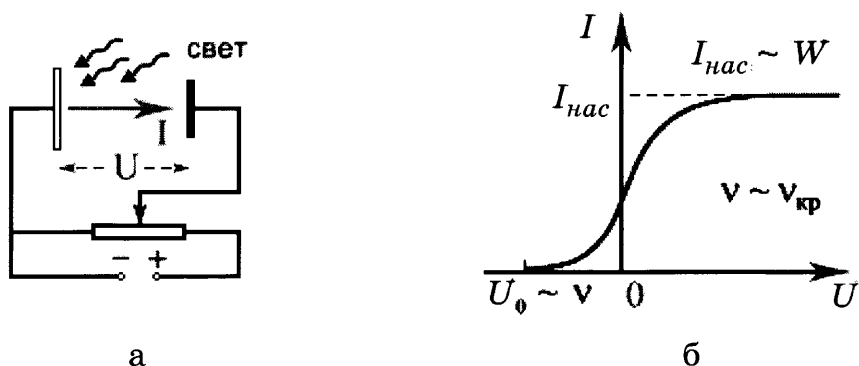


Рис. 24

При смене полярности клемм источника, присоединяемых к пластинам, происходит наоборот замедление электронов под действием электрического поля между пластинами. При некоторой отрицательной разности потенциалов между пластинами U_0 , кинетической энергии вылетевших электронов хватает только на то, чтобы долететь до неосвещаемой пластины. Затем они останавливаются и поворачивают обратно. Сила тока, имевшаяся при отсутствии внешнего источника

тока, присоединенного к пластинам, падает до нуля. Такое напряжение $U_3 = U_0$ называется *запирающим напряжением* и работа поля между пластинами при таком напряжении равна кинетической энергии вылетевших электронов

$$\frac{mv^2}{2} = eU_3$$

Измеримая величина U_3 позволила измерять кинетическую энергию электронов при фотоэффекте.

Умение применять совокупность этих величин, описывающих фотоэффект позволяет решать значительное число заданий, требующих развернутого ответа, по данной теме. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 4.1. Какова максимальная скорость электронов, выбиваемых из металлической пластины светом с длиной волны $\lambda = 3 \cdot 10^{-7}$ м, если красная граница фотоэффекта 540 нм?

Решение. Запишем уравнение Эйнштейна для фотоэффекта:

$$h\nu = A_{\text{вых}} + \frac{mv^2}{2}$$

Частота и длина волны излучения, переносимого фотонами, связана со скоростью света:

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

Красная граница фотоэффекта $\lambda_{\text{кр}}$ задается условием:

$$h \frac{c}{\lambda_{\text{кр}}} = A_{\text{вых}}$$

Откуда

$$v = \sqrt{\frac{2ch \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_{\text{кр}}} \right)}{m}} = 800000 \text{ (м / с)} = 800 \text{ (км / с)}$$

Пример 4.2. Чему равна скорость электронов, выбиваемых из металлической пластины, если при задерживающем напряжении на ней $U = 3$ В фотоэффект прекращается?

Решение. Фотоэффект прекращается, когда кинетическая энергия электронов равна работе электрического поля:

$$\frac{mv^2}{2} = eU_3$$

Откуда искомая скорость $v = \sqrt{\frac{2eU_3}{m}} \approx 10^6 \text{ (м / с)}$

Пример 4.3. Фотоны, имеющие энергию 5 эВ, выбивают электроны с поверхности металла. Работа выхода электронов из металла равна 4,7 эВ. Какой импульс приобретает электрон при вылете с поверхности металла?

Импульса электрона:

$$p = mv.$$

Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта:

$$h\nu = A_{\text{вых}} + \frac{mv^2}{2} = A_{\text{вых}} + \frac{m^2v^2}{2m} = A_{\text{вых}} + \frac{p^2}{2m}$$

Откуда

$$p = \sqrt{2m(h\nu - A_{\text{вых}})} = 3 \cdot 10^{-25} \text{ (кг} \cdot \text{м/с)}.$$

Пример 4.4. При облучении катода светом с длиной волны $\lambda = 300$ нм фототок прекращается при напряжении между анодом и катодом $U = 1,4$ В. Определите красную границу фотоэффекта λ_0 для вещества фотокатода.

Решение. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта:

$$h \frac{c}{\lambda} = A_{\text{вых}} + \frac{mv^2}{2}$$

Красная граница фотоэффекта определяется работой выхода, так как при

этой длине волны $\frac{mv^2}{2} = 0$:

$$h \frac{c}{\lambda_0} = A_{\text{вых}}$$

Запирающее напряжение определяет максимальную кинетическую энергию электрона, вылетающего из фотокатода

$$\frac{mv^2}{2} = eU$$

Решив систему из трех приведенных уравнений, получим:

$$\lambda_0 = \frac{hc\lambda}{hc - eU\lambda} \approx 450 \text{ (нм)}$$

Пример 4.5. В двух опытах по фотоэффекту металлическая пластинка облучалась светом с длинами волн соответственно $\lambda_1 = 350$ нм и $\lambda_2 = 540$ нм. В этих опытах максимальные скорости фотоэлектронов отличались в $\frac{v_1}{v_2} = 2$ раза. Какова работа выхода с поверхности металла?

Решение. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта в первом и втором опытах опыте:

$$h\nu_1 = A_{\text{вых}} + \frac{mv_{1\text{max}}^2}{2}. \quad (1)$$

$$h\nu_2 = A_{\text{вых}} + \frac{mv_{2\text{max}}^2}{2}. \quad (2)$$

Связь длины волны света с частотой для первого и второго опыта:

$$\lambda_1 = \frac{c}{\nu_1}. \quad (3)$$

$$\lambda_2 = \frac{c}{\nu_2}. \quad (4)$$

Отношение максимальных скоростей фотоэлектронов:

$$n = \frac{v_{1\max}}{v_{2\max}}. \quad (5)$$

Решая систему уравнений (1) – (5), получаем:

$$A_{\text{вых}} = \frac{hc(n^2 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1})}{\lambda_2(n^2 - 1)} \approx 3 \cdot 10^{-19} (\text{Дж}) \approx 1,9 (\text{эВ}).$$

Пример 4.6. Красная граница фотоэффекта для вещества фотокатода $\lambda_0 = 290$ нм. При облучении катода светом с длиной волны λ фототок прекращается при напряжении между анодом и катодом $U = 1,9$ В. Определите длину волны λ .

Решение. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта:

$$\frac{hc}{\lambda} = A_{\text{вых}} + \frac{mv^2}{2}. \quad (1)$$

Красная граница фотоэффекта связана с работой выхода:

$$\frac{hc}{\lambda_0} = A_{\text{вых}}. \quad (2)$$

Запирающее напряжение определяет максимальную кинетическую энергию

электрона: $\frac{mv^2}{2} = eU. \quad (3)$

Решая систему уравнений (1), (2) и (3), получаем: $\lambda = \frac{hc\lambda_0}{hc + eU\lambda_0} \approx 200 (\text{нм}).$

Пример 4.7. При облучении металлической пластинки квантами света с энергией 3 эВ из нее выбиваются электроны, которые проходят ускоряющую разность потенциалов $\Delta U = 5$ В. Какова работа выхода $A_{\text{вых}}$, если максимальная энергия ускоренных электронов E_e равна удвоенной энергии фотонов, выбивающих их из металла?

Решение. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта:

$$h\nu = \frac{mv^2}{2} + A_{\text{вых}}.$$

Изменение энергии ускоренных электронов определяется работой поля $e\Delta U$, поэтому:

$$E_e = \frac{mv^2}{2} + e\Delta U = h\nu - A_{\text{вых}} + e\Delta U.$$

По условию $E_e = 2h\nu$, поэтому

$$2h\nu = h\nu - A_{\text{вых}} + e\Delta U$$

Отсюда

$$A_{\text{вых}} = e\Delta U - h\nu = 2 (\text{эВ}).$$

Пример 4.8. При увеличении в 2 раза частоты света, падающего на поверхность пластины, задерживающее напряжение для фотоэлектронов увеличилось в 3 раза. Первоначальная частота падающего света была равна $0,75 \cdot 10^{15}$ Гц. Какова длина волны, соответствующая «красной границе» фотоэффекта для этого материала?

Решение. Так как запирающее напряжение определяет максимальную кинетическую энергию электрона, вылетающего из фотокатода

$$\frac{mv^2}{2} = eU,$$

то уравнение Эйнштейна для фотоэффекта в первом и втором опытах опыте:

$$h\nu = A_{\text{вых}} + \frac{mv_{1\text{max}}^2}{2} \quad (1)$$

$$2h\nu = A_{\text{вых}} + 3\frac{mv_{2\text{max}}^2}{2}. \quad (2)$$

Умножая уравнение (1) на 3 и вычитая из него (2) получим

$$h\nu = 2A_{\text{вых}}$$

Красная граница фотоэффекта определяется работой выхода металла, поэтому

$$h\nu_{\text{кр}} = A_{\text{вых}} = \frac{h\nu}{2}.$$

Откуда

$$\nu_{\text{кр}} = \frac{\nu}{2} = 0,375 \cdot 10^{15} \text{ Гц}$$

А соответствующая длина волны

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{c}{\nu_{\text{кр}}} = 8 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 800 \text{ нм}$$

В тексте задания на использование законов фотоэффекта могут быть описаны реальные технические устройства, которые используются или использовались в научных исследованиях в разные годы, а также схемы установок, требующие использования знаний из других разделов физики, например геометрической оптики.

Пример 4.9. Для увеличения яркости изображения слабых источников света используется вакуумный прибор – электронно-оптический преобразователь. В этом приборе фотоны, падающие на катод, выбивают из него фотоэлектроны, которые ускоряются разностью потенциалов $\Delta U = 15000 \text{ В}$ и бомбардируют флуоресцирующий экран, рождающий вспышку света при попадании каждого электрона. Длина волны для падающего на катод света $\lambda_1 = 820 \text{ нм}$, а для света, излучаемого экраном, $\lambda_2 = 410 \text{ нм}$. Во сколько раз N прибор увеличивает число фотонов, если один фотоэлектрон рождает при падении на катод в среднем $k = 10$ фотонов? Работу выхода электронов $A_{\text{вых}}$ принять равной 1 эВ. Считать, что энергия падающих на экран электронов переходит в энергию света без потерь.

Решение. Каждый первичный электрон рождается по условию после поглощения только одного из $k = 10$ первичных фотонов, поэтому число n_2 первичных электронов и число n_1 первичных фотонов связаны между собой соотношением

$$n_2 = \frac{n_1}{k}$$

В электрическом поле электрон, проходя между точками с разностью потенциалов ΔU увеличивает свою энергию на $\Delta E = e\Delta U = 15000 \text{ эВ}$

Начальная энергия фотоэлектронов, порождаемых первичными фотонами согласно уравнению Эйнштейна

$$E_{\kappa} = \frac{hc}{\lambda_1} - A_{\text{вых.}} \approx 0,5(\text{эВ}).$$

Она много меньше ΔE , и ею можно пренебречь.

Так как энергия падающих на экран электронов переходит в энергию света без потерь, то один электрон рождает

$$n_2 = \frac{\Delta E}{h\nu_2} = \frac{\Delta E\lambda_2}{hc}$$

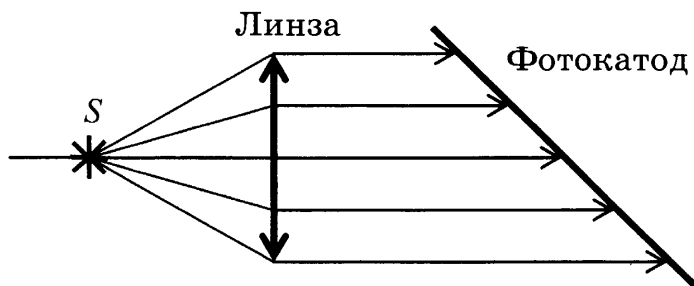
вторичных фотонов. Поэтому общее число вторичных фотонов при падении n_1 первичных электронов будет равно

$$n_3 = n_1 \cdot n_2 = n_1 \cdot \frac{\Delta E\lambda_2}{hc} = \frac{n_1}{k} \cdot \frac{e\Delta U\lambda_2}{hc}$$

Отсюда отношение числа первичных фотонов к числу вторичных равно :

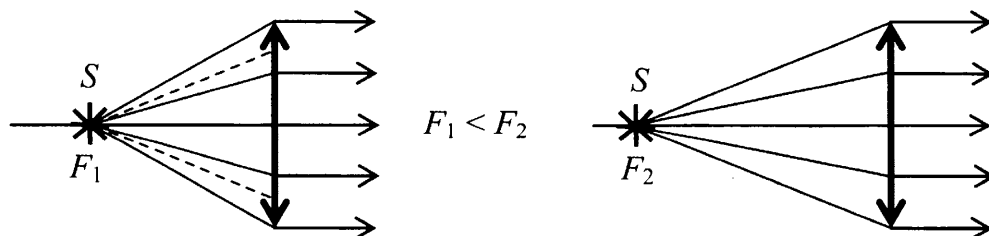
$$N = \frac{n_3}{n_1} = \frac{e\Delta U\lambda_2}{khc} \approx 500$$

Пример 4.10. В установке по наблюдению фотоэффекта свет от точечного источника S , пройдя через собирающую линзу, падает на фотокатод параллельным пучком. В схему внесли изменение: на место первоначальной линзы поставили другую того же диаметра, но с бóльшим фокусным расстоянием. Источник света переместили вдоль главной оптической оси линзы так, что на фотокатод свет снова стал падать параллельным пучком. Как изменился при этом (уменьшился или увеличился) фототок насыщения? Объясните, почему изменяется фототок насыщения, и укажите, какие физические закономерности Вы использовали для объяснения.



Решение. Поскольку первоначально свет за линзой идёт параллельным пучком, точечный источник света находится в фокусе линзы.

Во втором опыте при использовании линзы с бóльшим фокусным расстоянием, где свет после линзы также идет параллельным пучком источник света оказывается на большем расстоянии от линзы (см. рисунок).



Так как свет от источника идет, по-видимому, с одинаковой интенсивностью во всех направлениях, то число фотонов, попадающих на первую линзу, больше, чем во втором случае. Если на сферах с радиусами F_1 и F_2 выделить участок площади S , равной площади сечения линзы, то отношение числа фотонов, упавших на площадку S при равномерном распределении фотонов по сферам, окружающим источник, будет больше на площадке, лежащей на сфере с меньшим радиусом F_1 (причем в $\frac{F_2^2}{F_1^2}$ раз, это отношение площадей поверхности сфер).

Таким образом, число фотонов, падающих на вторую линзу в единицу времени, меньше, чем падающих на первую, поэтому фототок насыщения, пропорциональный числу фотонов, падающих на фотокатод в единицу времени будет во втором опыте меньше

Следующий элемент усложнения заданий, требующих развернутого ответа с использованием закономерностей фотоэффекта, состоит в анализе поведения электрона, выбитого из пластины при фотоэффекте и попавшего в электрическое или магнитное (или в оба одновременно) поле. Рассмотрим несколько примеров

Пример 4.11. Фотон с длиной волны, соответствующей красной границе фотоэффекта, выбивает электрон из металлической пластинки (катода), находящейся в сосуде, из которого откачан воздух. Электрон разгоняется однородным электрическим полем напряженностью $E = 5 \cdot 10^4$ В/м. До какой скорости электрон разгонится в этом поле, пролетев путь $s = 5 \cdot 10^{-4}$ м? Релятивистские эффекты не учитывать.

Решение. Раз длина волны излучения, выбивающего электрон, соответствует красной границе фотоэффекта, начальная скорость вылетевшего электрона $v_0 = 0$.

Изменение кинетической энергии частицы равно работе силы, действующей на электрон со стороны электрического поля:

$$A = \frac{mv^2}{2}.$$

Работа силы связана с напряженностью поля и пройденным путем:

$$A = Fs = eEs.$$

Отсюда $v^2 = \frac{2eEs}{m}$, и

$$v = \sqrt{\frac{2eEs}{m}} \approx 3 \cdot 10^6 \text{ (м/с)}.$$

Пример 4.12. Фотокатод с работой выхода $4,42 \cdot 10^{-19}$ Дж освещается светом. Вылетевшие из катода электроны попадают в однородное магнитное поле с индукцией $2 \cdot 10^{-4}$ Тл перпендикулярно линиям индукции этого поля и движутся по окружностям. Максимальный радиус такой окружности 2 см. Какова частота ν падающего света?

Решение. Согласно уравнению Эйнштейна для фотоэффекта

$$h\nu = A_{\text{вых}} + \frac{mv^2}{2}$$

На электрон в магнитном поле действует сила Лоренца. Так как скорость электрона перпендикулярна линиям магнитной индукции

$$F_L = Bve$$

Сила Лоренца сообщает электрону центростремительное ускорение, соответствующее радиусу окружности $r = 0,02 \text{ м}$

$$a_{\text{цс}} = \frac{v^2}{r}$$

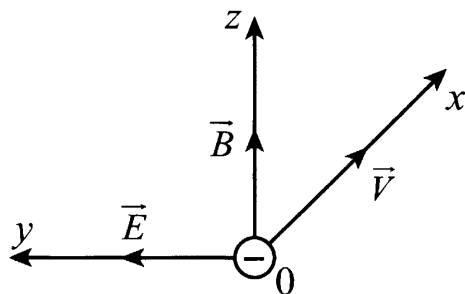
В соответствии со II законом Ньютона для электрона, вращающегося по окружности

$$F_L = ma_{\text{цс}}$$

Совместное решение этой системы уравнений дает

$$\nu = \frac{A}{h} + \frac{e^2 B^2 r^2}{hm} \approx 1,35 \cdot 10^{15} \text{ Гц}$$

Пример 4.13. Электроны, вылетевшие в положительном направлении оси OX под действием света с катода фотоэлемента, попадают в электрическое и магнитное поля (см. рисунок). Какой должна быть частота падающего света ν , чтобы в момент попадания самых быстрых электронов в область полей действующая на них сила была направлена против оси OY ? Работа выхода для вещества катода $2,39 \text{ эВ}$, напряжённость электрического поля $3 \cdot 10^2 \text{ В/м}$, индукция магнитного поля 10^{-3} Тл .



Решение. Модуль силы, действующей на электрон со стороны электрического поля $\vec{E}$, не зависит от скорости:

$$|F_{\text{э}}| = |e| \cdot E,$$

а модуль силы Лоренца прямо пропорционален скорости электрона:

$$|F_{\text{л}}| = |e| \cdot vB.$$

Для того чтобы электроны отклонялись в сторону, противоположную оси OY , должно быть

$$F_{\text{э}} > F_{\text{л}}$$

или

$$E > vB.$$

Откуда

$$v < \frac{E}{B}.$$

Используя уравнение Эйнштейна для фотоэффекта:

$$h\nu = A_{\text{вых}} + \frac{mv^2}{2},$$

получим:

$$\nu < \frac{1}{h} \left(\frac{mE^2}{2B^2} + A_{\text{вых}} \right) \approx 6,4 \cdot 10^{14} \text{ Гц.}$$

Таким образом, $\nu < 6,4 \cdot 10^{14} \text{ Гц}$

Наиболее сложным для понимания, являются задачи, в которых электроны выбиваются не с пластины, а с шарика, который в ходе облучения заряжается. Еще с момента открытия фотоэффекта Герцем известно, что при облучении отрицательно заряженной пластины она разряжается легко, а при облучении положительно заряженной пластины потери заряда не происходит. С точки зрения современной теории строения веществ, этот опыт трактуется так, что если металлическая пластина потеряла небольшое число электронов и оказалась заряженной, работа выхода для нее остается прежней, но электрон, ставший свободным и имеющий кинетическую энергию меньше определенной величины, не может преодолеть притяжение положительно заряженной пластины и возвращается на нее.

В случае облучения шарика, а не пластины, ситуация упрощается тем, что можно рассчитать работу электрического поля при удалении электрона от поверхности заряженного зарядом Q шарика радиуса R на бесконечность:

$$A = e\varphi_R = -\frac{keQ}{R},$$

где φ_R – потенциал поля вблизи поверхности шара, $k = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$ – константа в законе Кулона, Q – на шаре.

Пример 4.14. Алюминиевый шарик радиуса $R = 3 \text{ мм}$ освещают ультрафиолетовым излучением с длиной волны $\lambda = 236 \text{ нм}$. Работа выхода электронов из алюминия равна $A = 4,25 \text{ эВ}$. Каково максимальное число N фотоэлектронов, которое сможет испустить этот шарик?

Решение. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта:

$$h\nu = A + E_k$$

Изменение кинетической энергии фотоэлектронов равно работе сил притяжения фотоэлектрона к заряжающемуся положительно при фотоэффекте шарiku:

$$0 - \frac{mv^2}{2} = A = e\varphi_R = -\frac{keQ}{R}$$

Откуда

$$Q = \frac{Rmv^2}{2ke} = \frac{RE_k}{ke} = \frac{R(h\nu - A_{\text{вых}})}{ke}$$

Число электронов, которые потерял шарик, равно:

$$N = \frac{Q}{e} = \frac{R(h\nu - A_{\text{вых}})}{ke^2} \approx 2 \cdot 10^6$$

Фотонная теория. Давление света

Успех в описании фотоэффекта с помощью представлений о том, что свет является пучком фотонов, каждый из которых несет энергию $h\nu$, позволил расширить эту трактовку на многие другие явления. Одним из таких явлений является давление света.

Поток энергии, падающий за единицу времени на пластину площадью S при облучении ее светом с длиной волны λ или частотой $\nu = c/\lambda$, называют мощностью излучения P и измеряют в $\frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$. С точки зрения фотонной теории света

$$P = \frac{N \cdot h\nu}{St},$$

где N – число фотонов падающих на единицу площади поверхности за время t .

В 1899 году проф. Лебедев П.Н. показал экспериментально, что свет оказывает давление на твердые тела, что предсказывал еще Максвелл на основании взаимодействия электромагнитных волн с металлом. Для согласования волнового и квантового описания давления света фотонам, из которых состоит свет, следует приписать импульс

$$p_{\phi} = \frac{h\nu}{c}$$

Тогда если на площадку площади S падают и поглощаются N фотонов за t секунд, то есть их импульс меняется со скоростью $\frac{N}{t} p_{\phi} = \frac{N}{t} \cdot \frac{h\nu}{c}$, то, значит, на них действует сила равная по второму закону Ньютона скорости изменения импульса ($F = \frac{\Delta p_{\text{имп}}}{\Delta t} = \frac{N}{t} \cdot \frac{h\nu}{c}$). Тогда по третьему закону Ньютона и они действуют

на площадку с силой $F = \frac{N}{t} \cdot \frac{h\nu}{c}$, то есть они оказывают на площадку давление $p_{\text{свет}} = \frac{F}{S} = \frac{N}{St} \cdot \frac{h\nu}{c} = \frac{P}{c}$, где P – мощность излучения, приходящаяся на единицу площади поверхности (поскольку сверху дроби оказалась энергия всех падающих фотонов). Данное рассуждение (с большим количеством буквы p , да простят меня читатели!) проведено для фотонов одной частоты. Если же в световом пучке есть фотоны разной частоты, то каждый из них будет оказывать свое давление. Складывая эти давления, мы в числителе дроби все равно получим общую мощность излучения, а внизу скорость света. Таким образом для полностью поглощаемого площадкой света:

$$p_{\text{погл_свет}} = \frac{P}{c}$$

Если фотоны упруго отражаются, то изменение их импульса будет в 2 раза больше, соответственно давление на зеркальную поверхность окажется в 2 раза выше:

$$p_{\text{отр_свет}} = \frac{2P}{c}.$$

Если доля отраженного света равна k , то давление складывается из двух слагаемых и суммарное давление света, оказываемое световым пучком, приходящимся на единицу поверхности мощности P :

$$p_{\text{свет}} = p_{\text{отр_свет}} + p_{\text{погл_свет}} = k \frac{2P}{c} + (1-k) \frac{P}{c}$$

В заданиях, требующих развернутого ответа, во-первых, проверяется знание выражения для энергии и импульса отдельного фотона в сочетании с пониманием преобразования энергии в различных явлениях. Во-вторых, требуется понимание описания давления света на языке фотонной теории света.

Пример 4.15. При облучении металлической пластинки фотоэффект имеет место только в том случае, если импульс p падающих на нее фотонов превышает $9 \cdot 10^{-28}$ кг · м/с. С какой скоростью будут покидать пластинку электроны, если облучать ее светом, частота которого вдвое выше?

Решение. Соотношение между импульсом фотона и частотой соответствующей волны:

$$p_{\phi} = \frac{h\nu_1}{c}.$$

Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта для случая, когда энергии фотона во хватает только на то, чтобы сделать электрон свободным (с нулевой кинетической энергией):

$$h\nu_1 = A_{\text{вых}}.$$

Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта во втором случае ($\nu_2 = 2\nu_1$):

$$2h\nu_1 = A_{\text{вых}} + \frac{mv^2}{2}.$$

Решая эту систему уравнений, получим:

$$v = \sqrt{\frac{2p_{\phi}c}{m}} \approx 770 \text{ км/с}.$$

Пример 4.16. При какой температуре газа средняя энергия теплового движения атомов одноатомного газа будет равна энергии электронов, выбиваемых из металлической пластинки с работой выхода $A_{\text{вых}} = 2$ эВ при облучении монохроматическим светом с длиной волны 300 нм?

Решение. Средняя кинетическая энергия теплового движения атомов:

$$E_{\text{ср_тепл}} = \frac{3}{2} kT.$$

Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта:

$$\frac{hc}{\lambda} = A_{\text{вых}} + E_{\text{к}}.$$

По условию $E_{\text{ср_тепл}} = E_{\text{к}}$, поэтому:

$$\frac{3}{2} kT = \frac{hc}{\lambda} - A_{\text{вых}}.$$

Откуда:

$$T = \frac{\frac{hc}{\lambda} - A_{\text{вых}}}{\frac{3}{2} k} \approx 16 \cdot 10^3 \text{ К}.$$

Пример 4.17. Электромагнитное излучение с длиной волны $3,3 \cdot 10^{-7}$ м используется для нагревания воды. Какую массу воды можно нагреть за 700 с на 10°C , если источник излучает 10^{20} фотонов за $\tau = 1$ с? Считать, что излучение полностью поглощается водой.

Решение. Энергии одного фотона:

$$E_1 = h\nu = \frac{hc}{\lambda},$$

Энергия всех фотонов, излучаемых за время $t=700$ с:

$$E = \frac{hc}{\lambda} \cdot \frac{N}{\tau} \cdot t.$$

Количество теплоты, необходимое для нагревания воды с удельной теплоемкостью $c_{y\partial}$ массой m на ΔT градусов:

$$Q = c_{y\partial} m \Delta T.$$

Из закона сохранения энергии:

$$E = Q \quad \Rightarrow$$

$$\frac{hc}{\lambda} \frac{N}{\tau} t = c_{y\partial} m \Delta T.$$

Откуда

$$m = \frac{hcNt}{c_{y\partial}\lambda\tau\Delta T} \approx 1 \text{ (кг)}$$

Пример 4.18. Источник в монохроматическом пучке параллельных лучей за время $\Delta t = 8 \cdot 10^{-4}$ с излучает $N = 5 \cdot 10^{14}$ фотонов. Лучи падают по нормали на площадку $S = 0,7 \text{ см}^2$ и создают давление $p_{\text{свет}} = 1,5 \cdot 10^{-5}$ Па. При этом 40% фотонов отражается, а 60% поглощается. Определите длину волны излучения.

Решение. Мощность излучения падающего на площадку площади S

$$P = \frac{Nh\nu}{S\Delta t}$$

Выражение для давления света с частично отраженным, частично поглощенным светом при мощности излучения падающего на площадку S

$$P_{\text{свет}} = P_{\text{отр_свет}} + P_{\text{погл_свет}} = 0,4 \cdot \frac{2P}{c} + 0,6 \cdot \frac{P}{c} = 1,4 \cdot \frac{P}{c}$$

Тогда

$$P_{\text{свет}} = 1,4 \cdot \frac{P}{c} = \frac{1,4Nh}{cS\Delta t} \cdot \nu = \frac{1,4Nh}{cS\Delta t} \cdot \frac{c}{\lambda} = \frac{1,4Nh}{S\Delta t} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

Откуда

$$\lambda = \frac{1,4Nh}{P_{\text{свет}}S\Delta t} \approx 5,5 \cdot 10^{-7} \text{ (м)} = 550 \text{ (нм)}.$$

Пример 4.19. Для разгона космических аппаратов и коррекции их орбит предложено использовать солнечный парус – скрепленный с аппаратом легкий экран большой площади из тонкой пленки, которая зеркально отражает солнечный свет. Найдите ускорение, сообщаемое аппарату массой 500 кг (включая массу паруса), если парус имеет форму квадрата 100 м × 100 м. Мощность W солнечного излучения, падающего на 1 м² поверхности, перпендикулярной солнечному свету, составляет 1370 Вт/м².

Решение. Давление света при зеркальном отражении от поверхности связано с мощностью излучения, приходящейся на единицу поверхности

$$P_{\text{отр_свет}} = \frac{2W}{c}$$

Давление света определяет силу, действующую на квадратный парус площади $S=10^4 \text{ м}^2$

$$F = P_{\text{отр_свет}} S = \frac{2WS}{c}$$

По второму закону Ньютона ускорение корабля

$$a = \frac{F}{m} = \frac{2WS}{mc} \approx 1,8 \cdot 10^{-4} (\text{м} / \text{с}^2)$$

Атом Бора

На основе результатов своих исследований Резерфорд предложил *планетарную модель строения атома*, согласно которой строение атома подобно строению Солнечной системы. В центре каждого атома имеется положительно заряженное ядро радиусом порядка 10^{-14} м, а вокруг него на расстояниях около 10^{-10} м, подобно планетам, обращающимся вокруг Солнца, по круговым орбитам движутся электроны. Почти вся масса атома сосредоточена в атомном ядре.

Соединив идеи Резерфорда с представлениями о фотоне как кванте энергии, Бор предложил отказаться от привычных классических представлений о движении частиц при рассмотрении микрочастиц, из которых состоит атом. Для объяснения свойств атомов было предложено несколько *постулатов Бора* об атомных системах:

1. Атом может находиться лишь в определенных стационарных состояниях, каждому из которых соответствует определенная энергия E . Говорят, что энергия атома *квантуется*. В стационарных состояниях атом не излучает энергию.

2. Излучение или поглощение энергии происходит только при переходе атома из одного стационарного состояния в другое. Энергия излученного или поглощенного кванта электромагнитного излучения при переходе атома из стационарного состояния с энергией E_m в состояние с энергией E_n равна модулю разности энергий атома в этих состояниях:

$$h\nu_{mn} = |E_m - E_n|,$$

где m и n – номера стационарных состояний.

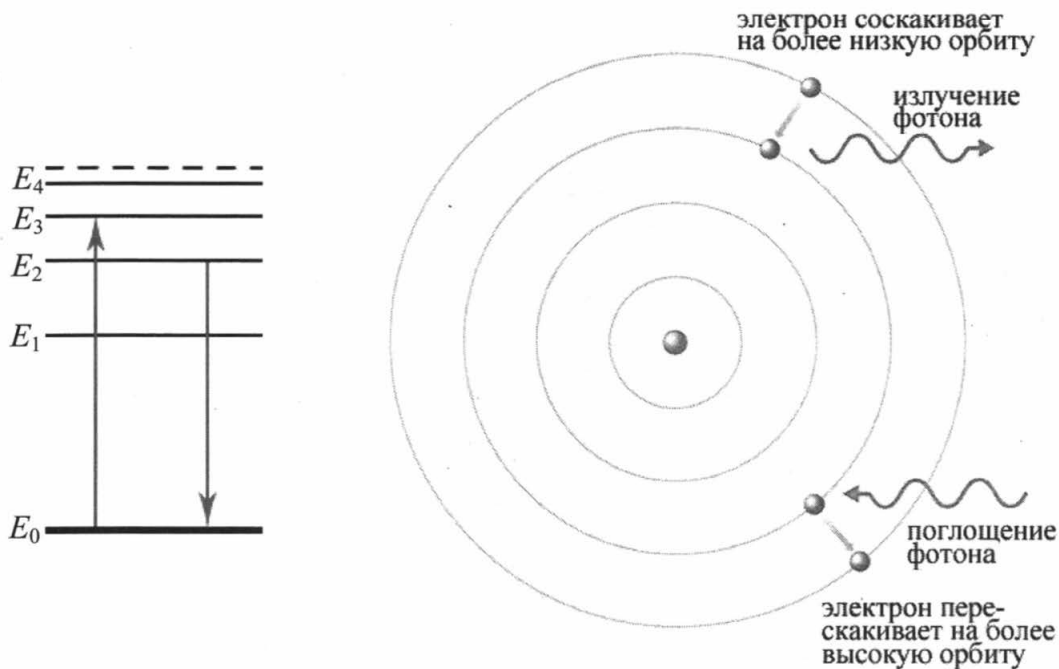


Рис. 25

Стационарное состояние атома с минимальным запасом энергии называется *основным состоянием*, все остальные стационарные состояния называются *возбужденными состояниями*. В основном состоянии атом может находиться бесконечно долго, в возбужденном состоянии он находится 10^{-9} - 10^{-7} с.

Стационарные состояния наглядно представляются энергетической диаграммой атома (рис. 25 а), на которой они обозначаются горизонтальными линиями – *энергетическими уровнями*. Расстояния между линиями диаграммы пропорциональны разностям энергий стационарных состояний. Переход атома из стационарного состояния с меньшим запасом энергии в состояние с большим запасом энергии сопровождается поглощением энергии и обозначается стрелкой, направленной вверх; переход атома из состояния с большей энергией в состояние с меньшей энергией сопровождается выделением энергии и обозначается стрелкой, направленной вниз (см. рис. 25 б).

Согласно модели Бора каждому состоянию с энергией E_1 , E_2 т.д. соответствует орбита по которой движется электрон. Особого успеха Бор добился при описании атома водорода, в составе которого ядро из одного протона и один электрон.

Было показано, что энергетические уровни атома водорода описываются с использованием мировых констант и целого числа n :

$$E_n = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2} = -\frac{13,6 \text{ эВ}}{n^2}.$$

За нуль отсчета принимается энергия покоящихся протона и электрона, удаленных друг от друга на большое расстояние. Знание энергий уровней позволяет описать спектр водорода, то есть рассчитать частоту излучения или энергию фотонов, поглощаемых или излучаемых атомом, вычитая из энергии одного уровня энергию другого, согласно постулатам Бора.

В основном состоянии атом водорода $E_1 = -13,6$ эВ. Для того, чтобы атом перешел на первый возбужденный уровень ему надо сообщить энергию (например, столкнув его с другим атомом или заставив поглотить фотон с энергией

$$h\nu = E_2 - E_1 = 13,6 \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{13,6 \cdot 3}{4} = 10,2 \text{ эВ}.$$

Зная энергию фотона можно посчитать его частоту или длину волны, соответствующего ему излучения.

При сообщении атому водорода в основном состоянии энергии 13,6 эВ атом ионизуется, электрон покидает протон и становится свободным. Эту энергию называют *энергией ионизации* $E_{\text{ион}}$. При сообщении энергии более 13,6 эВ свободный электрон приобретает еще и кинетическую энергию.

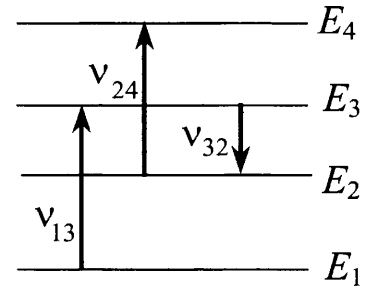
Для других атомов, ситуация оказывается более сложной и рассчитать теоретически набор фотонов, которые может излучать или поглощать атом того или иного элемента сложно. Однако экспериментально эти спектры зарегистрированы и служат персональным опознавательным знаком атомов каждого химического элемента в газообразном состоянии.

Задания, требующие развернутого ответа в рамках данной тематики предполагают умения:

- проанализировать из какого в какое энергетическое состояние переходит атом в том или ином процессе;
- рассчитать энергию фотонов, поглощаемых или испускаемых атомом;
- рассчитать энергию и импульс атома при испускании фотона;
- рассчитать энергию электрона в ходе ионизации;
- скомбинировать эти знания со знанием других разделов физики.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 4.20. На рисунке представлены несколько энергетических уровней электронной оболочки атома и указаны частоты фотонов, излучаемых и поглощаемых при переходах между этими уровнями. Какова минимальная длина волны фотонов, излучаемых атомом при любых возможных переходах между уровнями E_1 , E_2 , E_3 и E_4 , если $\nu_{13} = 7 \cdot 10^{14}$ Гц, $\nu_{24} = 5 \cdot 10^{14}$ Гц, $\nu_{32} = 3 \cdot 10^{14}$ Гц?



Решение. Минимальная длина волны соответствует максимальной частоте. Частота фотона, испускаемого атомом при переходе с одного уровня энергии на другой, пропорциональна разности энергий этих уровней.

Комбинируя энергии переходов, частота которых задана, получим:

$$h\nu_{13} = E_2 - E_1$$

$$h\nu_{24} = E_4 - E_2$$

$$h\nu_{32} = E_3 - E_2$$

Частота ν_{41} и длина волны λ_{41} требуемого перехода может быть получена, если найти разницу энергий $E_4 - E_1$. Ее можно скомбинировать из приведенных разниц энергий

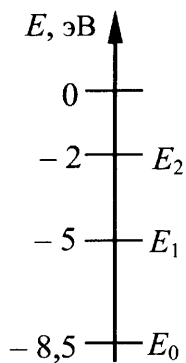
$$E_4 - E_1 = (E_4 - E_2) - (E_3 - E_2) + (E_3 - E_1)$$

Откуда искомая частота равна ν_{41} ,

$$\nu_{41} = \nu_{13} + \nu_{24} - \nu_{32}$$

и длина волны

$$\lambda_{14} = \frac{c}{\nu_{14}} = \frac{c}{\nu_{13} + \nu_{24} - \nu_{32}} \approx 3,3 \cdot 10^{-7} (\text{м}) = 330 (\text{нм})$$



Пример 4.21. Предположим, что схема энергетических уровней атомов некоего вещества имеет вид, показанный на рисунке.

Электрон, движущийся с кинетической энергией 1,5 эВ, столкнулся с атомом, который находился в состоянии с энергией E_1 и отскочил, приобретя некоторую дополнительную энергию. Определите импульс электрона после столкновения, считая, что до столкновения атом покоился. Возможностью испускания света атомом при столкновении с электроном пренебречь.

Решение. Если при столкновении с атомом электрон приобрел энергию, то значит атом потерял эту энергию. Свою энергию атом может изменить только на определенную величину, перейдя в состояние E_0 . Следовательно, после столкновения кинетическая энергия электрона стала

$$E = 1,5 \text{ эВ} + 3,5 \text{ эВ} = 5 \text{ эВ} \approx 8 \cdot 10^{-19} \text{ Дж.}$$

Импульс p электрона связан с его кинетической энергией соотношением

$$p^2 = m^2 v^2 = 2mE,$$

где m — масса электрона. Следовательно

$$p = \sqrt{2mE} \approx 1,2 \cdot 10^{-24} \text{ (кг·м/с)}.$$

Пример 4.22. В сосуде находится разреженный атомарный водород. Атом водорода в основном состоянии ($E_1 = -13,6$ эВ) поглощает фотон и ионизируется. Электрон, вылетевший из атома в результате ионизации, движется вдали от ядра со скоростью $v = 1000$ км/с. Какова частота поглощенного фотона? Энергией теплового движения атомов водорода пренебречь.

Решение. При поглощении фотона и ионизации атома должны соблюдаться закон сохранения импульса и энергии. Судя по условию задачи, можно считать, что в первоначальном состоянии атом покоился. Энергия фотона не меньше энергии ионизации $E_{\text{ион}} = |E_1| = 13,6 \text{ эВ}$, поэтому его импульс не

менее $p_\phi = \frac{h\nu}{c} > \frac{13,6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{3 \cdot 10^8} \approx 7,25 \cdot 10^{-27} \text{ кг·м/с}$. Импульс вылетающего электрона $mv = 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^6 = 9,1 \cdot 10^{-25} \text{ кг·м/с} \gg p_\phi$. Поэтому с хорошей точностью можно принять модель процесса, когда начальный импульс системы «атом+фотон» примерно равен нулю, а после их взаимодействия импульс электрона равен по модулю и противоположно направлен импульсу образовавшегося при ионизации иона.

Также можно пренебречь кинетической энергией образующегося иона по сравнению кинетической энергией электрона, поскольку при $p_\phi \approx p_{\text{ион}}$

$$E_{\text{кин_эл}} = \frac{p_{\text{эл}}^2}{m} \gg \frac{p_{\text{ион}}^2}{M} = E_{\text{кин}},$$

так как масса иона много больше массы электрона. Тогда согласно закону сохранения энергии,

$$E_{\text{кин_эл}} = h\nu - E_{\text{ион}}$$

Соответственно,

и

$$h\nu = E_{\text{кин_эл}} + E_{\text{ион}} = \frac{mv^2}{2} + |E_1|,$$

$$\nu = \frac{mv^2}{2h} + \frac{|E_1|}{h} \approx 4 \cdot 10^{15} \text{ (Гц)}.$$

Пример 4.23. Уровни энергии электрона в атоме водорода задаются формулой $E_n = -\frac{13,6}{n^2} \text{ эВ}$, где $n = 1, 2, 3, \dots$. При переходе атома из состояния E_2 в состояние E_1 атом испускает фотон. Попад на поверхность фотокатода, фотон выбивает фотоэлектрон. Частота света, соответствующая красной границе фотоэффекта для материала поверхности фотокатода, $\nu_{\text{кр}} = 6 \cdot 10^{14} \text{ Гц}$. Чему равна максимально возможная скорость фотоэлектрона?

Решение. Энергия фотона

$$h\nu = E_2 - E_1 = -\frac{13,6 \text{ эВ}}{4} - (-13,6 \text{ эВ}) = 10,2 \text{ эВ} = 1,63 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}.$$

Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта:

$$h\nu = h\nu_{\text{кр}} + \frac{m_e v_{\text{max}}^2}{2}.$$

Отсюда

$$v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2}{m_e} [(E_2 - E_1) - h\nu_{\text{кр}}]} \approx 1,65 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Пример 4.24. Электрон, имеющий импульс $p = 2 \cdot 10^{-24} \text{ кг}\cdot\text{м/с}$, сталкивается с покоящимся протоном, образуя атом водорода в состоянии с энергией E_n ($n = 2$). В процессе образования атома излучается фотон. Найдите частоту ν этого фотона, пренебрегая кинетической энергией атома. Уровни энергии электрона в атоме водорода задаются формулой $E_n = -\frac{13,6}{n^2} \text{ эВ}$, где $n = 1, 2, 3, \dots$.

Решение. По условию задачи кинетической энергией образовавшегося атома следует пренебречь. Поэтому кинетическая энергия электрона до столкновения $\frac{p^2}{2m}$ и энергия излученного фотона $h\nu$ согласно закону сохранения энергии связаны соотношением:

$$\frac{p^2}{2m} = E_2 + h\nu$$

Откуда

$$\nu = \frac{1}{h} \left(\frac{p^2}{2m} - E_2 \right) = \frac{1}{6,6 \cdot 10^{-34}} \left(\frac{(2 \cdot 10^{-24})^2}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} + \frac{13,6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{2^2} \right) \approx 4,15 \cdot 10^{15} \text{ Гц}.$$

Пример 4.25. Покоящийся атом излучает фотон с энергией $16,32 \cdot 10^{-19}$ Дж в результате перехода электрона из возбуждённого состояния в основное. Атом в результате отдачи начинает двигаться поступательно в противоположном направлении с кинетической энергией $8,81 \cdot 10^{-27}$ Дж. Найдите массу атома. Скорость атома считать малой по сравнению со скоростью света.

Решение. При излучении фотона с энергией E_ϕ и импульсом $p_\phi = \frac{E_\phi}{c}$ выполняется закон сохранения импульса для системы «атом + фотон»:

$$\vec{p}_\phi + m\vec{v} = 0$$

Для модулей импульсов

$$p_\phi = mv$$

Кинетическая энергия атома после излучения

$$E_{\text{кин.}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{p_\phi^2}{2m} = \frac{E_\phi^2}{2mc^2}.$$

Отсюда

$$m = \frac{E_\phi^2}{2E_{\text{кин.}} \cdot c^2} \approx 1,68 \cdot 10^{-27} \text{ (кг)}.$$

Ядерная физика

Задания, проверяющие знание состава ядра, применения закона сохранения заряда и массового числа для написания ядерных реакций, закона радиоактивного распада и даже энергетики ядерных реакций, связанной с дефектом масс ядер, проверяются в ЕГЭ в заданиях с выбором ответа. К сложным заданиям по ядерной физике, проверяемым в виде заданий с развернутым ответом, отнесены задания, где требуется использовать законы сохранения энергии и импульса в приложении к ядерным реакциям.

При этом кинетическая энергия частиц, образующихся при радиоактивном распаде, может переходить во внутреннюю энергию радиоактивного образца или контейнера, внутренняя энергия образца радиоактивного образца преобразовываться в электроэнергию, производимую атомной электростанцией, энергия связи нуклонов преобразовываться в кинетическую энергию образующихся в ядерной реакции частиц.

При взаимодействии ядер с образованием новых частиц, радиоактивном распаде ядер или элементарных частиц обязательно выполняется закон сохранения импульса: ядро испытывает «отдачу» при выбросе частицы, векторная сумма импульсов двух частиц, образующихся из одной неподвижной, обязательно равна нулю и т.д.

Кроме того, частицы, образующиеся в ходе радиоактивного распада, могут быть заряженными и попадать в электрические и магнитные поля, сталкиваться с другими заряженными частицами. Тогда задание по ядерной физике проверяет умение комбинировать знания в этой области со знаниями по электродинамике и механике.

Чаще всего в задаче оговаривается, что скорости частиц малы или их можно считать нерелятивистскими. Однако в ряде случаев (см. *Примеры 4.31 и 4.32*) требуется использование закона сохранения энергии в релятивистском смысле ($E = mc^2$, т.е. масса – эквивалент энергии).

В заданиях, требующих развернутого ответа, по данной тематике также может использоваться термин *активность радиоактивного образца*, означающий число частиц образующихся в ходе радиоактивного распада всех ядер, входящих в образец. Эта характеристика зависит, естественно от массы образца и от периода полураспада (чем меньше период полураспада, тем больше активность образца), поэтому активность может меняться со временем. Однако обычно в этих заданиях (хотя и не всегда) имеются в виду образцы, в которых радиоактивный компонент имеет большой период полураспада, поэтому его активность в течение промежутка времени, рассматриваемого в задаче, считается постоянной.

Рассмотрим примеры.

Пример 4.26. Препарат активностью $1,7 \cdot 10^{11}$ частиц в секунду помещен в медный контейнер массой 0,5 кг. За какое время температура контейнера повышается на 1 К, если известно, что данное радиоактивное вещество испускает α -частицы энергией 5,3 МэВ? Считать, что энергия всех α -частиц полностью переходит во внутреннюю энергию. Теплоемкостью препарата и теплообменом с окружающей средой пренебречь.

Решение. В ходе процесса, описанного в задаче, образующиеся α -частицы поглощаются самим препаратом и контейнером, и кинетическая энергия частиц переходит во внутреннюю энергию образца. Это эквивалентно передаче за время Δt образцу и контейнеру количества теплоты:

$$Q = A \cdot \varepsilon \cdot \Delta t,$$

где A – активность препарата, ε – энергия α -частицы.

Пренебрегая массой радиоактивного образца по сравнению с массой контейнера и теплообменом контейнера с внешней средой можно считать, что вся эта энергия идет на нагревание контейнера:

$$Q = c \cdot m \cdot \Delta T,$$

где c – удельная теплоемкость меди, m – масса контейнера, ΔT – изменение температуры контейнера.

Отсюда

$$\Delta t = \frac{cm\Delta T}{A\varepsilon} = \frac{380 \cdot 0,5 \cdot 1}{1,7 \cdot 10^{11} \cdot 5,3 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 13,2 \cdot 10^2 (с) \approx 22 (мин).$$

Пример 4.27. Образец, содержащий радий, за 1 с испускает $3,7 \cdot 10^{10}$ α -частиц. За 1 ч выделяется энергия 100 Дж. Каков средний импульс α -частиц? Масса α -частиц равна $6,7 \cdot 10^{-27}$ кг. Энергией отдачи ядер, γ -излучением и релятивистским эффектами пренебречь.

Решение. Энергия одной α -частицы:

$$E_1 = \frac{p^2}{2m}.$$

Если активность образца $A = 3,7 \cdot 10^{10}$ частиц в секунду не меняется во времени, то за $\Delta t = 1 \text{ час} = 3600 \text{ с}$ в образце выделяется энергия:

$$E = E_1 \cdot A \cdot \Delta t = \frac{p^2}{2m} \cdot A \Delta t.$$

Откуда импульс α -частицы:

$$p = \sqrt{\frac{2mE}{A\Delta t}} \approx 1 \cdot 10^{-19} (\text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}).$$

Теперь приведем один пример задания, в котором активность радиоактивного образца меняется в ходе наблюдаемых явлений.

Пример 4.28 Пациенту ввели внутривенно дозу раствора, содержащего изотоп $^{24}_{11}\text{Na}$. Активность 1 см³ этого раствора $A_0 = 2000$ распадов в секунду. Период полураспада изотопа $^{24}_{11}\text{Na}$ равен $T = 15,3$ ч. Через $t = 3$ ч 50 мин активность 1 см³ крови пациента стала $A = 0,28$ распадов в секунду. Каков объем введенного раствора, если общий объем крови пациента $V = 6$ л? Переходом ядер изотопа $^{24}_{11}\text{Na}$ из крови в другие ткани организма пренебречь.

Решение. В данном случае регистрируемая прибором активность, активность пробы крови пациента, уменьшается по сравнению с активностью исходной порции раствора радиоактивного вещества за счет двух факторов:

- 1) распад радиоактивного вещества в значительной степени, так что его количество в крови уменьшается;
- 2) разбавление раствора радиоактивного вещества объемом крови

Первый фактор приводит к уменьшению активности в соответствии с законом радиоактивного распада, пропорционально числу N оставшихся радиоактивных ядер или их суммарной массе m ($A \sim N \sim m$):

$$N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} \text{ или } m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} \text{ или } A = A_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}},$$

где T – период полураспада.

За счет разбавления активность снижается в $\frac{V}{V_0}$ раз, где V – объем крови пациента, V_0 – объем введенной пробы. Таким образом, конечная активность образца крови A_1 , соотносится с начальной активностью вводимого в кровь образца A_0 следующим образом:

$$A_1 = \frac{V_0}{V} \cdot A_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$$

Откуда

$$V_0 = \frac{A_1 V}{A_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}} = \frac{A_1 V \cdot 2^{\frac{t}{T}}}{A_0} = \frac{0,28 \cdot 6000 \cdot 2^{\frac{230 \text{ мин}}{918 \text{ мин}}}}{2000} = 1 (\text{см}^3)$$

В следующих двух примерах ядерные реакции рассматриваются, как источники частиц к которым применимы законы классической механики и электродинамики.

Пример 4.29. При облучении металлической пластинки быстрыми α -частицами небольшая часть этих частиц в результате упругого взаимодействия с ядрами атомов меняет направление скорости на противоположное (аналог опыта Резерфорда). Найдите заряд

ядра, если минимальное расстояние, на которое сближались ядро и частица, составило $5 \cdot 10^{-13}$ см. Масса и скорость α -частиц составляют соответственно $7 \cdot 10^{-27}$ кг и $26 \cdot 10^3$ км/с. (Частицу считать точечной, а ядро – точечным и неподвижным. Релятивистским эффектом пренебречь. Потенциальная энергия ядра и α -частицы $E_{\text{пот}} = \frac{kq_{\alpha}q_{\text{ядра}}}{r}$, где r – расстояние между ядром и α -частицей).

Решение. Если ядро остается неподвижным при приближении α -частицы, то потенциальная энергия взаимодействия точечных зарядов при максимальном их сближении на расстояние r :

$$E_{\text{пот}} = \frac{kq_{\alpha}q_{\text{ядра}}}{r},$$

где $k = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$ – постоянная в законе Кулона.

При большом расстоянии между частицами альфа частица обладает только кинетической энергией, при максимальном сближении только потенциальной. Из закона сохранения энергии

$$\frac{m_{\alpha}v_{\alpha}^2}{2} = \frac{kq_{\alpha}q_{\text{ядра}}}{r}$$

Откуда

$$q_{\text{ядра}} = \frac{rm_{\alpha}v_{\alpha}^2}{2kq_{\alpha}} = \frac{10^{-15} \cdot 7 \cdot 10^{-27} \cdot (2,6 \cdot 10^7)^2}{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 0,82 \cdot 10^{-18} (\text{Кл}) = 8,2 \cdot 10^{-19} (\text{Кл}) \approx 5e$$

Пример 4.30. Ядро покоящегося нейтрального атома, находясь в однородном магнитном поле, испытывает α -распад. При этом рождаются α -частица и тяжелый ион нового элемента. Выделившаяся при α -распаде энергия ΔE целиком переходит в кинетическую энергию продуктов реакции. Трек α -частицы находится в плоскости, перпендикулярной направлению магнитного поля. Начальная часть трека напоминает дугу окружности радиусом r . Масса α -частицы равна m_{α} , ее заряд равен $2e$, масса тяжелого иона равна M . Найдите индукцию B магнитного поля.

Решение. Применим для α -распада ядра покоящегося нейтрального атома законы сохранения энергии и импульса в проекции на ось, направленную в направлении скорости α -частицы:

$$\begin{cases} \frac{m_{\alpha}v^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} = \Delta E, \\ m_{\alpha}v - Mu = 0. \end{cases}$$

Если α -частица, имеющая заряд $2e$, движется в магнитном поле по окружности, можно считать, что сила Лоренца $2evB$ сообщает ей центростремительное ускорение $\frac{v^2}{r}$. Тогда по второму закону Ньютона:

$$\frac{m_{\alpha}v^2}{r} = 2evB.$$

Выражая из трех уравнений ΔE , получим:

$$\Delta E = \frac{(2eBr)^2}{2m_{\alpha}} \cdot \left(1 + \frac{m_{\alpha}}{M}\right)$$

откуда

$$B = \frac{1}{2er} \cdot \sqrt{\frac{2m_{\alpha}\Delta E}{1 + \frac{m_{\alpha}}{M}}}.$$

В заключении рассмотрим две задачи, в которых неизбежно приходится использовать представления релятивистской механики о наличии массовых и безмассовых частиц, об эквивалентности массы и энергии при превращении массовых частиц в безмассовые.

Пример 4.31. π^0 -мезон массой $2,4 \cdot 10^{-28}$ кг распадается на два γ -кванта. Найдите модуль импульса одного из образовавшихся γ -квантов в системе отсчета, где первичный π^0 -мезон покоится.

Решение. В соответствии с законом сохранения импульса в системе отсчета, где пион покоился, при распаде π^0 -мезона фотоны должны разлететься в противоположные стороны с равными по модулю импульсами:

$$|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = p.$$

Импульс каждого фотона связан с величиной его энергии

$$p = \frac{h\nu}{c}.$$

Значит энергии фотонов, их частоты также одинаковы.

Согласно релятивистскому закону сохранения энергии, в распаде

$$mc^2 = 2h\nu.$$

Следовательно, $mc^2 = 2pc$ и

$$p = \frac{mc}{2} = 3,6 \cdot 10^{-20} \text{ кг} \cdot \text{м} / \text{с}.$$

Пример 4.32. Свободный пион (π^0 -мезон) с энергией покоя 135 МэВ движется со скоростью v , которая значительно меньше скорости света. В результате его распада образовались два γ -кванта, причём один из них распространяется в направлении движения пиона, а второй – в противоположном направлении. Энергия первого кванта на 10% больше, чем второго. Чему равна скорость пиона до распада?

Решение. Поскольку скорость пиона до распада много меньше скорости света для решения не требуется применение релятивистских соотношений для скорости, массы, импульса.

Частица, движущаяся со скоростью v , обладает импульсом

$$p \approx mv \text{ (при } v \ll c)$$

и полной энергией

$$E \approx mc^2 \text{ (при } v \ll c),$$

где m – масса пиона.

Энергия γ -кванта E_{γ} и его импульс p_{γ} связаны соотношением

$$p_{\gamma} = \frac{E_{\gamma}}{c}.$$

При распаде пиона на два кванта с энергиями $E_1 = 1,1 \cdot E_2$ сохраняются энергия системы и ее импульс:

$$mc^2 = E_1 + E_2,$$

$$mv = \frac{E_1}{c} - \frac{E_2}{c}.$$

Разделив второе уравнение на первое, получим:

$$\frac{v}{c} = \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2} = \frac{0,1E_2}{2,1E_2} = \frac{1}{21}.$$

Откуда

$$v = \frac{c}{21} \approx 1,43 \cdot 10^7 \text{ м/с}.$$

МЕХАНИКА

1. Мимо остановки по прямой улице проезжает грузовик со скоростью 10 м/с . Через 5 с от остановки вдогонку грузовику отъезжает мотоциклист, движущийся с ускорением 3 м/с^2 . На каком расстоянии от остановки мотоциклист догонит грузовик?

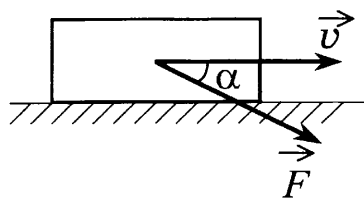
2. Небольшой камень, брошенный с ровной горизонтальной поверхности земли под углом к горизонту, упал обратно на землю через 2 с в 20 м от места броска. Чему равна минимальная скорость камня за время полёта?

3. Тело, свободно падающее с некоторой высоты без начальной скорости, за время $\tau = 1 \text{ с}$ после начала движения проходит путь в $n = 5$ раз меньший, чем за такой же промежуток времени в конце движения. Найдите полное время движения.

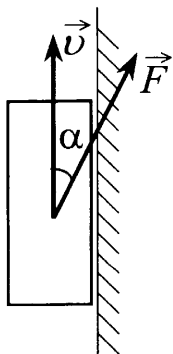
4. Небольшой камень бросили с ровной горизонтальной поверхности земли под углом к горизонту. На какую максимальную высоту поднялся камень, если ровно через 1 с после броска его скорость была направлена горизонтально?

5. Небольшой камень, брошенный с ровной горизонтальной поверхности земли под углом к горизонту, упал обратно на землю в 20 м от места броска. Сколько времени прошло от броска до того момента, когда его скорость была направлена горизонтально и равна 10 м/с ?

6. Маленький шарик падает сверху на наклонную плоскость и упруго отражается от неё. Угол наклона плоскости к горизонту равен 30° . На какое расстояние по горизонтали перемещается шарик между первым и вторым ударами о плоскость? Скорость шарика в момент первого удара направлена вертикально вниз и равна 1 м/с .



7. Тело массой 1 кг движется по горизонтальной плоскости. На тело действует сила $F = 10 \text{ Н}$ под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту (см. рисунок). Коэффициент трения между телом и плоскостью равен $0,4$. Каков модуль силы трения, действующей на тело?

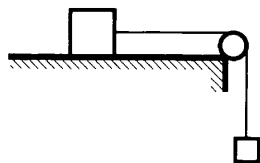


8. Брусок массой m прижат к вертикальной стене силой F , направленной под углом α к вертикали (см. рисунок). Коэффициент трения между бруском и стеной равен μ . При какой величине силы F брусок будет двигаться по стене вертикально вверх с постоянной скоростью?

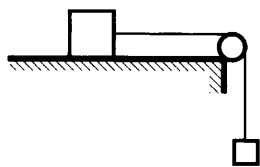
9. Два груза, связанные нерастяжимой и невесомой нитью, движутся по гладкой горизонтальной поверхности под действием силы $\vec{F}$, приложенной к грузу массой $M_1 = 1$ кг (см. рисунок). Минимальная сила F , при которой нить обрывается, равна 12 Н. Известно, что нить может выдержать нагрузку не более 8 Н. Чему равна масса второго груза?



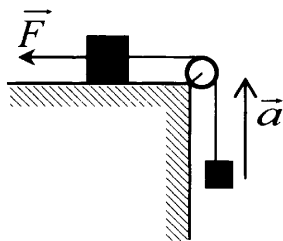
10. По горизонтальному столу из состояния покоя движется брусок массой 0,7 кг, соединенный с грузом массой 0,3 кг невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через гладкий невесомый блок (см. рисунок). Коэффициент трения бруска о поверхность стола равен 0,2. Чему равно ускорение бруска?



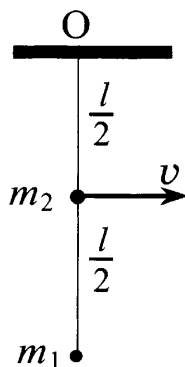
11. По горизонтальному столу из состояния покоя движется брусок массой 0,9 кг, соединённый с грузом массой 0,3 кг невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через гладкий невесомый блок (см. рисунок). Коэффициент трения бруска о поверхность стола равен 0,2. Чему равно натяжение вертикальной части нити?



12. Груз, лежащий на столе, связан легкой нерастяжимой нитью, переброшенной через идеальный блок, с грузом массой 0,25 кг. На первый груз действует горизонтальная постоянная сила F , равная 9 Н (см. рисунок). Второй груз начал двигаться с ускорением 2 м/с^2 , направленным вверх. Трением между грузом и поверхностью стола пренебречь. Какова масса первого груза?



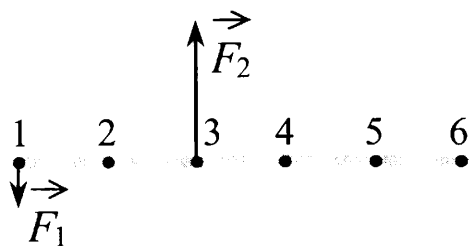
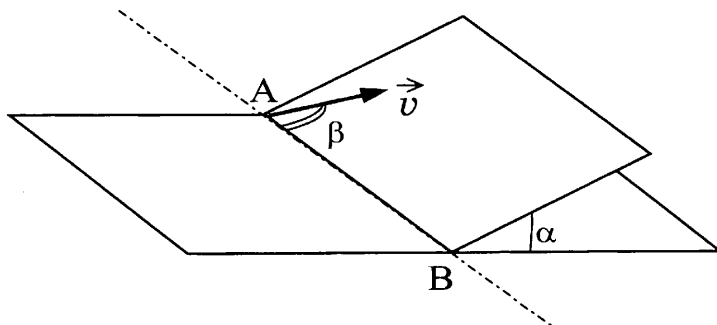
13. Грузики с точечными массами $m_1 = 0,25$ кг и $m_2 = 0,5$ кг прикреплены к невесомому стержню длиной $l = 1$ м (см. рисунок). Стержень может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку О. Грузик m_2 в нижней точке траектории имеет скорость $v = 2$ м/с. Определите силу, с которой стержень действует на грузик m_1 в этот момент времени.



14. Автомобиль совершает поворот на горизонтальной дороге по дуге окружности радиуса 81 м. Какова максимальная скорость автомобиля при коэффициенте трения автомобильных шин о дорогу 0,4?

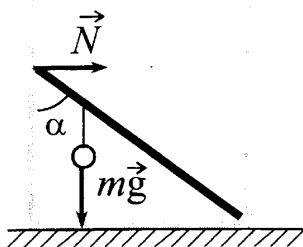
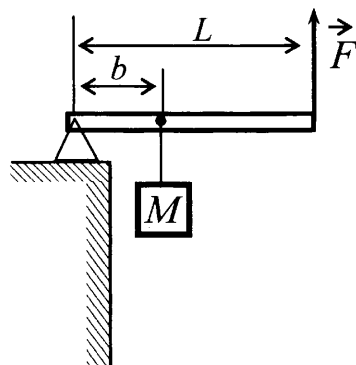
15. Масса Марса составляет 0,1 от массы Земли, диаметр Марса вдвое меньше, чем диаметр Земли. Каково отношение периодов обращения искусственных спутников Марса и Земли $\frac{T_M}{T_Z}$, двигающихся по круговым орбитам на небольшой высоте?

16. Наклонная плоскость пересекается с горизонтальной плоскостью по прямой АВ. Угол между плоскостями $\alpha = 30^\circ$. Маленькая шайба начинает движение вверх по наклонной плоскости из точки А с начальной скоростью $v_0 = 2$ м/с под углом $\beta = 60^\circ$ к прямой АВ. В ходе движения шайба съезжает на прямую АВ в точке В. Пренебрегая трением между шайбой и наклонной плоскостью, найдите расстояние АВ.



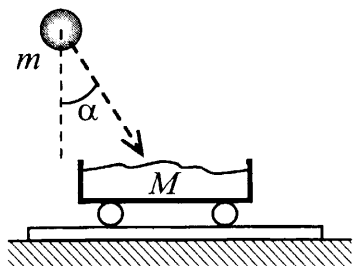
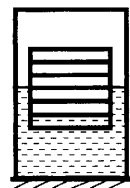
17. На рисунке изображен тонкий невесомый стержень, к которому приложены силы $F_1 = 100$ Н и $F_2 = 300$ Н. Через какую точку должна проходить ось вращения, чтобы стержень находился в равновесии?

18. Груз массой 100 кг удерживают на месте с помощью рычага, приложив вертикальную силу 350 Н (см. рисунок). Рычаг состоит из шарнира без трения и однородного массивного стержня длиной 5 м. Расстояние от оси шарнира до точки подвеса груза равно 1 м. Чему равна масса стержня?



19. Невесомый стержень длиной 1 м, находящийся в ящике с гладкими дном и стенками, составляет угол $\alpha = 45^\circ$ с вертикалью (см. рисунок). К стержню на расстоянии 25 см от его левого конца подвешен на нити шар массой 2 кг (см. рисунок). Каков модуль силы N , действующей на стержень со стороны левой стенки ящика?

20. Шесть одинаковых брусков толщиной $h = 5$ см каждый, связанные в стопку, плавают в воде так, что уровень воды приходится на границу между двумя средними брусками. Как изменится глубина погружения стопки, если из нее убрать один брусок?



21. Камень массой $m = 4$ кг падает под углом $\alpha = 30^\circ$ к вертикали со скоростью 10 м/с в тележку с песком общей массой $M = 16$ кг, покоящуюся на горизонтальных рельсах. Чему равна скорость тележки с камнем после падения в нее камня?

22. Снаряд массой 2 кг, летящий со скоростью 100 м/с, разбивается на два осколка. Один из осколков летит под углом 90° к первоначальному направлению. Под каким углом к этому направлению полетит второй осколок, если его масса 1 кг, а скорость 400 м/с?

23. Снаряд, летящий с некоторой скоростью, разбивается на два осколка. Первый осколок летит под углом 90° к первоначальному направлению со скоростью 50 м/с, а второй – под углом 30° со скоростью 100 м/с. Найдите отношение массы первого осколка к массе второго осколка.

24. Тело массой 0,1 кг брошено горизонтально со скоростью 4 м/с с высоты 2 м относительно поверхности Земли. Какова кинетическая энергия тела в момент его приземления? Сопротивление воздуха не учитывать.

25. Снаряд массой 200 г, выпущенный под углом 30° к горизонту, поднялся на высоту 4 м. Какой будет кинетическая энергия снаряда непосредственно перед его падением на Землю? Сопротивлением воздуха пренебречь.

26. Автомобиль, двигаясь с выключенным двигателем, на горизонтальном участке дороги имеет скорость 20 м/с. Какое расстояние он проедет до полной остановки вверх по склону горы под углом 30° к горизонту? Трением пренебречь.

27. Горизонтально расположенная невесомая пружина с жёсткостью $k = 1000$ Н/м находится в недеформированном состоянии. Один её конец закреплён, а другой касается бруска массой $M = 0,1$ кг, находящегося на горизонтальной поверхности. Брусок сдвигают, сжимая пружину, и отпускают. На какую длину Δx была сжата пружина, если после отпускания бруска его скорость достигла величины $v = 1$ м/с? Трение не учитывать.

28. Мальчик на санках (их общая масса 50 кг) спустился с ледяной горы и проехал по горизонтали до остановки 50 м. Коэффициент трения при его движении по горизонтальной поверхности равен 0,2. С какой высоты спустился мальчик? Считать, что по склону горы санки скользили без трения.

29. Скорость брошенного мяча непосредственно перед ударом о стену была вдвое больше его скорости сразу после удара. Найдите кинетическую энергию мяча перед ударом, если при ударе выделилось количество теплоты, равное 15 Дж.

30. Брусок массой $m_1 = 500$ г соскальзывает по наклонной поверхности с высоты $h = 0,8$ м и, двигаясь по горизонтальной поверхности, сталкивается с неподвижным бруском массой $m_2 = 300$ г. Считая столкновение абсолютно неупругим, определите изменение кинетической энергии первого бруска в результате столкновения. Трением при движении пренебречь. Считать, что наклонная плоскость плавно переходит в горизонтальную.

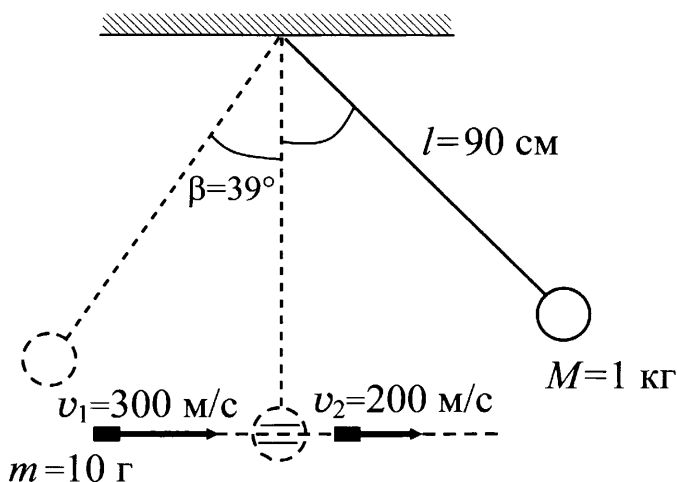
31. Кусок пластилина сталкивается со скользящим навстречу по горизонтальной поверхности стола бруском и прилипает к нему. Скорости пластилина и бру-

ска перед ударом направлены противоположно и равны $v_{пл} = 15 \text{ м/с}$ и $v_{бр} = 5 \text{ м/с}$. Масса бруска в 4 раза больше массы пластилина. Коэффициент трения скольжения между бруском и столом $\mu = 0,17$. На какое расстояние переместятся слипшиеся брусок с пластилином к моменту, когда их скорость уменьшится на 30%?

32. Начальная скорость снаряда, выпущенного из пушки вертикально вверх, равна 500 м/с . В точке максимального подъема снаряд разорвался на два осколка. Первый упал на землю вблизи точки выстрела, имея скорость в 2 раза больше начальной скорости снаряда, а второй в этом же месте – через 100 с после разрыва. Чему равно отношение массы первого осколка к массе второго осколка? Сопротивлением воздуха пренебречь.

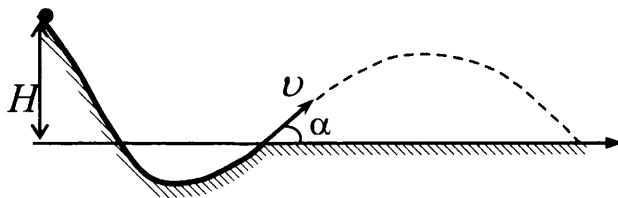
33. Пуля летит горизонтально со скоростью $v_0 = 150 \text{ м/с}$, пробивает стоящий на горизонтальной поверхности льда брусок и продолжает движение в прежнем направлении со скоростью $\frac{v_0}{3}$. Масса бруска в 10 раз больше массы пули. Коэффициент трения скольжения между бруском и льдом $\mu = 0,1$. На какое расстояние s сместится брусок к моменту, когда его скорость уменьшится на 10%?

34. Шар массой 1 кг , подвешенный на нити длиной 90 см , отводят от положения равновесия и отпускают. В момент прохождения шаром положения равновесия в него попадает пуля массой 10 г , летящая навстречу шару со скоростью 300 м/с . Она пробивает его и вылетает горизонтально со скоростью 200 м/с , после чего шар, продолжая движение в прежнем направлении, отклоняется на угол 39° . Определите начальный угол отклонения шара. (Массу шара считать неизменной, диаметр шара – пренебрежимо малым по сравнению с длиной нити, $\cos 39^\circ = \frac{7}{9}$.)

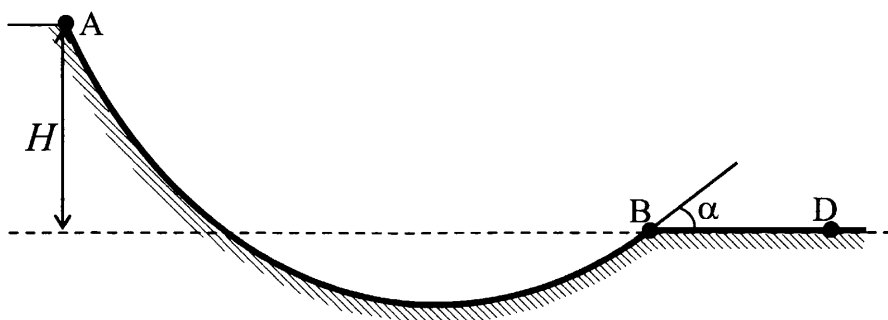


35. Снаряд массой 4 кг , летящий со скоростью 400 м/с , разрывается на две равные части, одна из которых летит в направлении движения снаряда, а другая – в противоположную сторону. В момент разрыва суммарная кинетическая энергия осколков увеличилась на величину ΔE . Скорость осколка, летящего по направлению движения снаряда, равна 900 м/с . Найдите ΔE .

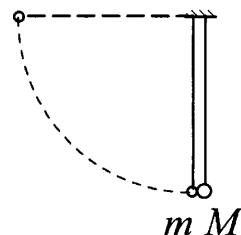
36. При выполнении трюка «Летающий велосипедист» гонщик движется по гладкому трамплину под действием силы тяжести, начиная движение из состояния покоя с высоты H (см. рисунок). На краю трамплина скорость гонщика направлена под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. Пролетев по воздуху, он приземлился на горизонтальный стол на той же высоте, что и край трамплина. Каково время полета?



37. Шайба массой m начинает движение по желобу АВ из точки А из состояния покоя. Точка А расположена выше точки В на высоте $H = 6$ м. В процессе движения по желобу механическая энергия шайбы из-за трения уменьшается на $E = 2$ Дж. В точке В шайба вылетает из желоба под углом $\alpha = 15^\circ$ к горизонту и падает на землю в точке D, находящейся на одной горизонтали с точкой В (см. рисунок). $BD = 4$ м. Найдите массу шайбы m . Соппротивлением воздуха пренебречь.

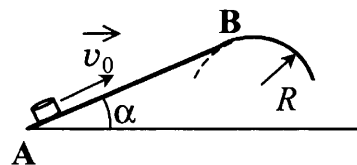


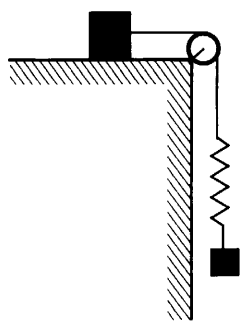
38. Два шарика, массы которых $m = 0,1$ кг и $M = 0,2$ кг, висят, соприкасаясь, на вертикальных нитях длиной $l = 1,5$ м (см. рисунок). Левый шарик отклоняют на угол 90° и отпускают без начальной скорости. Какое количество теплоты выделится в результате абсолютно неупругого удара шариков?



39. Шарик скользит без трения по наклонному желобу, а затем движется по «мертвой петле» радиуса R . С какой силой шарик давит на желоб в нижней точке петли, если масса шарика равна 100 г, а высота, с которой его отпускают, равна $4R$?

40. Небольшая шайба после удара скользит вверх по наклонной плоскости из точки А (см. рисунок). В точке В наклонная плоскость без излома переходит в наружную поверхность горизонтальной трубы радиусом R . Если в точке А скорость шайбы превосходит $v_0 = 4$ м/с, то в точке В шайба отрывается от опоры. Длина наклонной плоскости $AB = L = 1$ м, угол $\alpha = 30^\circ$. Коэффициент трения между наклонной плоскостью и шайбой $\mu = 0,2$. Найдите внешний радиус трубы R .





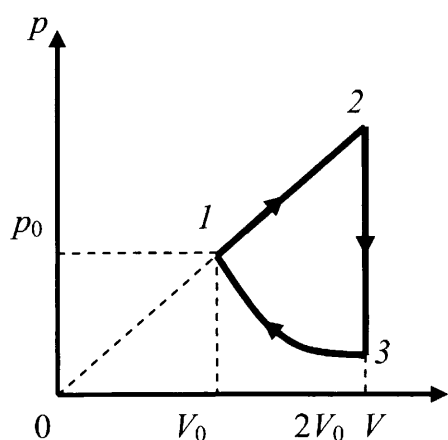
41. Брусок, покоящийся на горизонтальном столе, и пружинный маятник, состоящий из грузика и легкой пружины, связаны легкой нерастяжимой нитью через идеальный блок (см. рисунок). Коэффициент трения между основанием бруска и поверхностью стола равен 0,2. Отношение массы бруска к массе грузика равно 8. Грузик маятника совершает колебания вдоль вертикали, совпадающей с вертикальным отрезком нити. Максимально возможная амплитуда этих колебаний, при которой они остаются гармоническими, равна 1,5 см. Чему равен период этих гармонических колебаний?

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

42. В горизонтальном цилиндрическом сосуде, закрытом подвижным поршнем, находится одноатомный идеальный газ. Давление окружающего воздуха $p = 10^5$ Па. Трение между поршнем и стенками сосуда пренебрежимо мало. В процессе медленного охлаждения от газа отведено количество теплоты $|Q| = 75$ Дж. При этом поршень передвинулся на расстояние $x = 10$ см. Чему равна площадь поперечного сечения поршня?

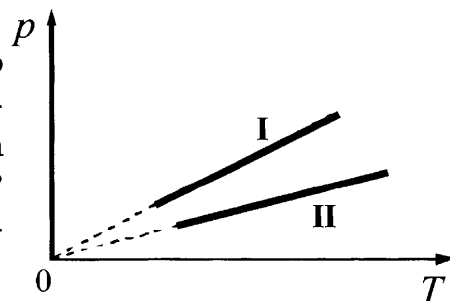
43. Один моль одноатомного идеального газа переводят из состояния 1 в состояние 2 таким образом, что в ходе процесса давление газа возрастает прямо пропорционально его объёму. В результате плотность газа уменьшается в $\alpha = 2$ раза. Газ в ходе процесса получает количество теплоты $Q = 20$ кДж. Какова температура газа в состоянии 1?

44. Один моль аргона, находящийся в цилиндре при температуре $T_1 = 600$ К и давлении $p_1 = 4 \cdot 10^5$ Па, расширяется и одновременно охлаждается так, что его температура при расширении обратно пропорциональна объёму. Конечное давление газа $p_2 = 10^5$ Па. На какую величину изменилась внутренняя энергия аргона в результате расширения?



45. Над одноатомным идеальным газом проводится циклический процесс, показанный на рисунке. На участке 1–2 газ совершает работу $A_{12} = 1000$ Дж. Участок 3–1 – адиабата. Количество теплоты, отданное газом за цикл холодильнику, равно $|Q_{\text{хол}}| = 3370$ Дж. Количество вещества газа в ходе процесса не меняется. Найдите работу $|A_{31}|$ внешних сил на адиабате.

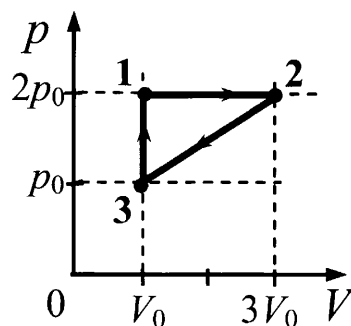
46. Две порции одного и того же идеального газа нагреваются в сосудах одинакового объёма. Графики процессов представлены на рисунке. Почему изохора I лежит выше изохоры II? Ответ поясните, указав, какие физические закономерности Вы использовали для объяснения.



47. Сферическую оболочку воздушного шара делают из материала, квадратный метр которого имеет массу 1 кг. Шар наполняют гелием при атмосферном давлении 10^5 Па. Определите минимальную массу оболочки, при которой шар начнет поднимать сам себя. Температура гелия и окружающего воздуха одинакова и равна 0°C . (Площадь сферы $S = 4\pi r^2$, объем шара $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.)

48. Газонепроницаемая оболочка воздушного шара имеет массу 400 кг. Шар заполнен гелием. Он может удерживать груз массой 225 кг в воздухе на высоте, где температура воздуха 17°C , а давление 10^5 Па. Какова масса гелия в оболочке шара? Оболочка шара не оказывает сопротивления изменению объема шара, объем груза пренебрежимо мал по сравнению с объемом шара.

49. С одноатомным идеальным газом неизменной массы происходит циклический процесс, показанный на рисунке. За цикл газ совершает работу $A_{\text{ц}} = 5$ кДж. Какое количество теплоты газ получает за цикл от нагревателя?



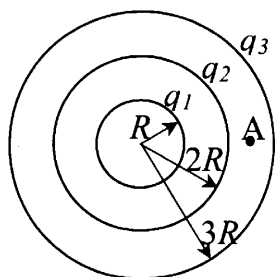
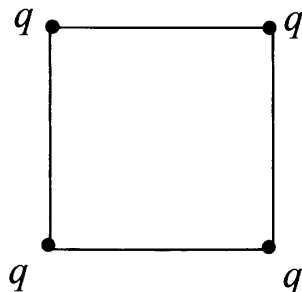
50. В сосуде объемом $V = 0,02$ м³ с жесткими стенками находится одноатомный газ при атмосферном давлении. В крышке сосуда имеется отверстие площадью s , заткнутое пробкой. Максимальная сила трения покоя F пробки о края отверстия равна 100 Н. Пробка выскакивает, если газу передать количество теплоты не менее 15 кДж. Определите значение s , полагая газ идеальным.

51. В цилиндрическом сосуде под поршнем длительное время находятся вода и ее пар. Поршень начинают выдвигать из сосуда. При этом температура воды и пара остается неизменной. Как будет меняться при этом масса жидкости в сосуде? Ответ поясните, указав, какие физические закономерности вы использовали для объяснения.

52. В вакууме закреплен горизонтальный цилиндр. В цилиндре находится 0,1 моль гелия, запертого поршнем. Поршень массой 90 г удерживается упорами и может скользить влево вдоль стенок цилиндра без трения. В поршень попадает пуля массой 10 г, летящая горизонтально со скоростью 400 м/с, и застревает в нем. Как изменится температура гелия в момент остановки поршня в крайнем левом положении? Считать, что за время движения поршня газ не успевает обменяться теплом с сосудом и поршнем.

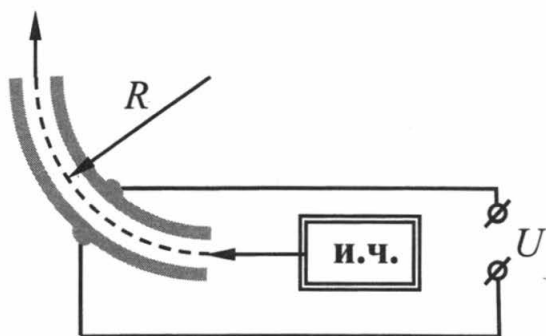
53. В калориметре находится 1 кг льда при температуре -5°C . Какую массу воды, имеющей температуру 20°C , нужно добавить в калориметр, чтобы температура его содержимого после установления теплового равновесия оказалась -2°C ? Теплообменом с окружающей средой и теплоемкостью калориметра пренебречь.

54. Четыре одинаковых заряда q расположены на плоскости в вершинах квадрата и удерживаются в равновесии связывающими их, не проводящими ток нитями (см. рисунок). Натяжение нитей $T = 2,7 \cdot 10^{-3}$ Н. Чему равна сила F_0 , действующая на каждый из зарядов со стороны другого ближайшего заряда?



55. Точечный заряд q создает на расстоянии R от него электрическое поле с потенциалом $\phi_1 = 10$ В. Три концентрические сферы радиусами R , $2R$ и $3R$ имеют равномерно распределенные по их поверхностям заряды $q_1 = +2q$, $q_2 = -q$ и $q_3 = +q$ соответственно (см. рисунок). Каков потенциал поля в точке А, отстоящей от центра сфер на расстоянии $2,5 R$?

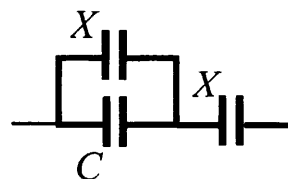
56. Полый металлический шарик массой 2 г подвешен на шелковой нити и помещен над положительно заряженной плоскостью, создающей однородное вертикальное электрическое поле напряженностью 10^6 В/м. Шарик имеет положительный заряд 10 нКл. Период малых колебаний шарика 1 с. Какова длина нити?



57. На рисунке показана схема устройства для предварительного отбора заряженных частиц с целью последующего детального исследования. Устройство представляет собой конденсатор, пластины которого изогнуты дугой радиуса $R \approx 50$ см. Предположим, что в промежуток между обкладками конденсатора из источника заряженных частиц (и. ч.) влетают, как показано на рисунке, ионы с зарядом e . Напряжённость электрического поля в конденсаторе по модулю равна 50 кВ/м. При каком значении кинетической энергии ионы пролетят сквозь конденсатор, не коснувшись его пластин? Считать, что расстояние между обкладками конденсатора мало, напряжённость электрического поля в конденсаторе всюду одинакова по модулю, а вне конденсатора электрическое поле отсутствует. Влиянием силы тяжести пренебречь.

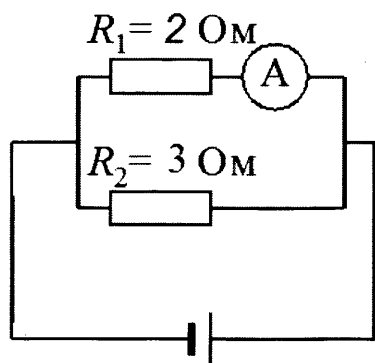
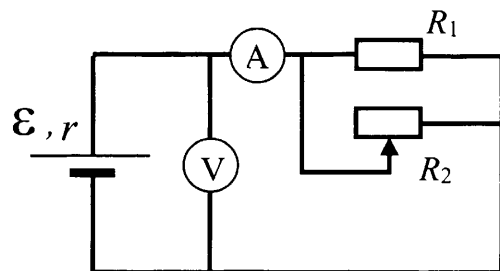
58. Отрицательно заряженная пластина, создающая вертикально направленное однородное электрическое поле напряженностью $E = 10^4$ В/м, укреплена на горизонтальной плоскости. На нее с высоты $h = 10$ см падает шарик массой $m = 20$ г, имеющий положительный заряд $q = 10^{-5}$ Кл. Какой импульс шарик передаст пластине при абсолютно упругом ударе?

59. К конденсатору, электрическая емкость которого $C = 16$ пФ, подключают два одинаковых конденсатора емкостью X : один – параллельно, а второй – последовательно (см. рисунок). Емкость образовавшейся батареи конденсаторов равна емкости C . Какова емкость X ?



60. Конденсатор, электрическая емкость которого $C_1 = 5$ мкФ, заряжен так, что разность потенциалов между его пластинами $U_1 = 120$ В. Второй конденсатор, электрическая емкость которого $C_2 = 7$ мкФ, имеет разность потенциалов между пластинами $U_2 = 240$ В. Одноименно заряженные пластины конденсаторов попарно соединили проводниками. Каков модуль разности потенциалов U между пластинами каждого конденсатора?

61. На рисунке показана принципиальная схема электрической цепи, состоящей из источника тока с отличным от нуля внутренним сопротивлением, резистора, реостата и измерительных приборов – идеального амперметра и идеального вольтметра. Используя законы постоянного тока, проанализируйте эту схему и выясните, как будут изменяться показания приборов при перемещении движка реостата *вправо*.



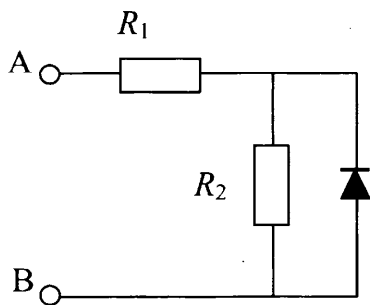
62. В цепь, изображённую на рисунке включен источник с внутренним сопротивлением $0,67$ Ома. Идеальный амперметр показывает 2 А.

Определите по этим данным ЭДС источника

63. В цепь последовательно соединены гальванический элемент, ключ, переменный резистор и амперметр. Параллельно резистору подключен вольтметр. При двух положениях ручки переменного резистора сила тока оказалась равной $0,9$ А и 3 А, при этом вольтметр показывал напряжение $3,6$ В и $1,5$ В, соответственно. Какая максимальная мощность может выделяться на переменном резисторе в этой цепи?

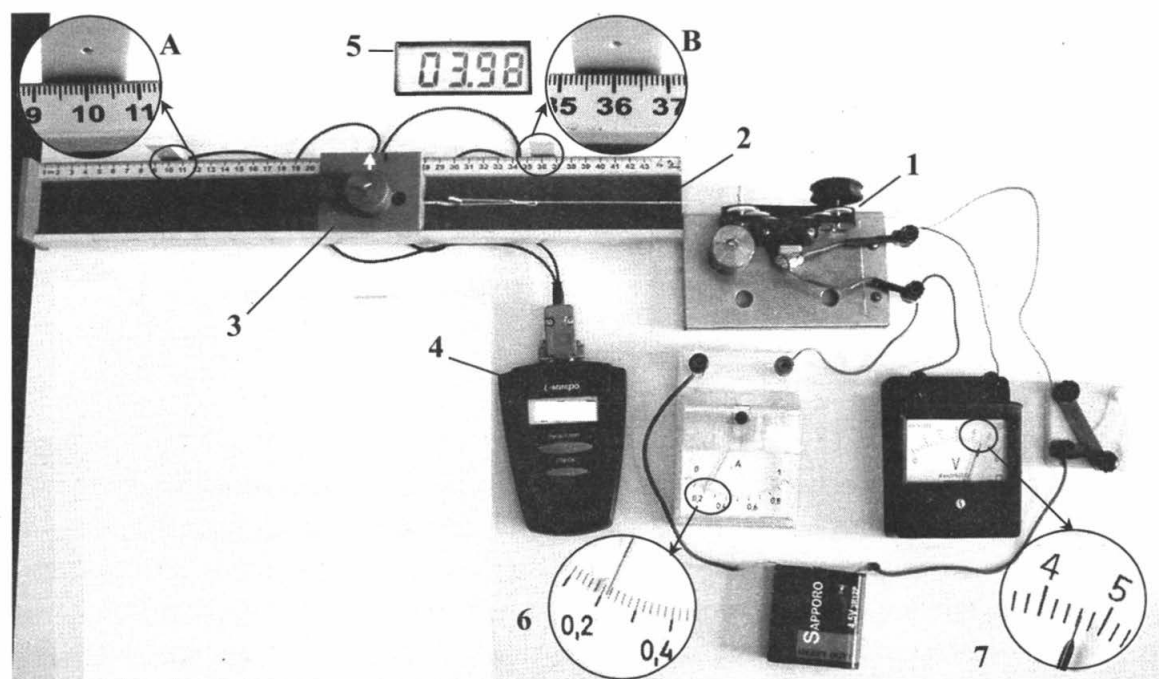
64. Конденсаторы, электрическая емкость которых 2 мкФ и 10 мкФ, заряжают до напряжения 5 В каждый, а затем «плюс» одного из них подключают к «минусу» другого и соединяют свободные выводы резистором 1000 Ом. Какое количество теплоты выделится в резисторе?

65. Конденсатор, электрическая емкость которого 1000 мкФ, заряжают до напряжения 50 В, к его выводам подключают цепочку из трех резисторов 100 Ом, 200 Ом и 400 Ом, соединенных параллельно. Какое количество теплоты выделится в резисторе 200 Ом?

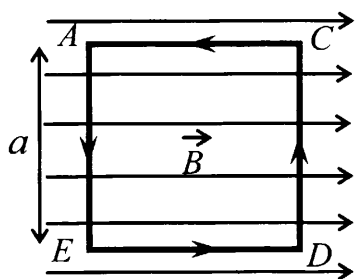


66. В цепи, изображённой на рисунке, сопротивление диода в прямом направлении пренебрежимо мало, а в обратном – многократно превышает сопротивление резисторов. При подключении к точке А – положительного, а к точке В – отрицательного полюса батареи с ЭДС 12 В и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением, потребляемая мощность равна 4,8 Вт. При изменении полярности подключения батареи потребляемая мощность оказалась равной 14,4 Вт. Укажите условия протекания тока через диод и резисторы в обоих случаях и определите сопротивление резисторов в этой цепи.

67. На фотографии представлена установка, в которой электродвигатель (1) с помощью нити (2) равномерно перемещает каретку (3) вдоль направляющей горизонтальной линейки. При прохождении каретки мимо датчика А секундомер (4) включается, а при прохождении каретки мимо датчика В секундомер выключается.



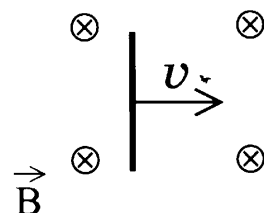
После измерения силы тока (6), напряжения (7) и времени (дисплей 5) ученик с помощью динамометра измерил силу трения скольжения каретки по направляющей. Она оказалась равной 0,4 Н. Рассчитайте отношение α работы силы упругости нити к работе электрического тока во внешней цепи.



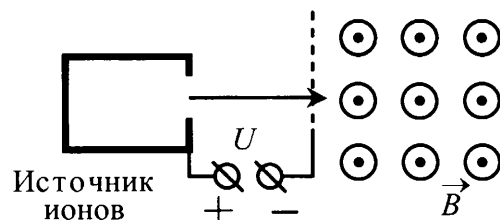
68. На непроводящей горизонтальной поверхности стола лежит жёсткая рамка массой m из однородной тонкой проволоки, согнутая в виде квадрата $ACDE$ со стороной a (см. рисунок). Рамка находится в однородном горизонтальном магнитном поле, вектор индукции $\vec{B}$ которого перпендикулярен сторонам AE и CD и равен по модулю B . По рамке течёт ток в направлении, указанном стрелками (см. рисунок).

При какой минимальной силе тока рамка начнет поворачиваться вокруг стороны CD ?

69. Горизонтально расположенный проводник длиной 1 м движется равноускоренно в вертикальном однородном магнитном поле, индукция которого направлена перпендикулярно проводнику и скорости его движения (см. рисунок). При начальной скорости проводника, равной нулю, и ускорении 8 м/с^2 , он переместился на 1 м. Какова индукция магнитного поля, в котором двигался проводник, если ЭДС индукции на концах проводника в конце движения равна 2 В?

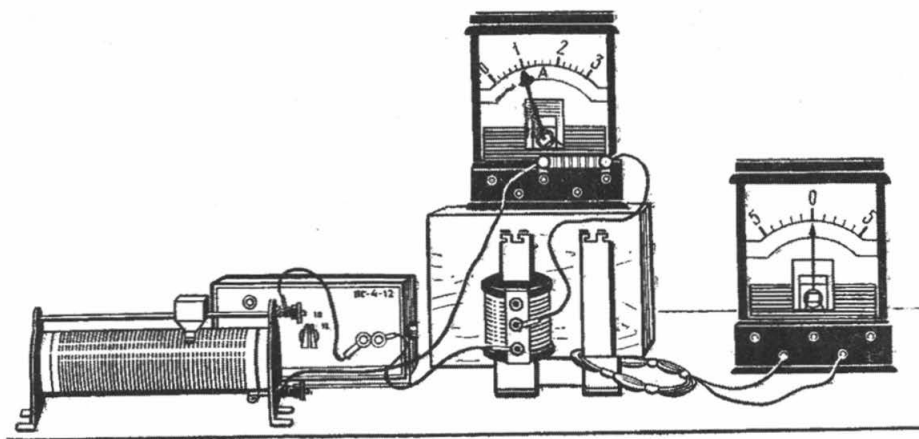


70. Ион ускоряется в электрическом поле с разностью потенциалов $U = 10 \text{ кВ}$ и попадает в однородное магнитное поле перпендикулярно к вектору его индукции $\vec{B}$ (см. рисунок). Радиус траектории движения иона в магнитном поле $R = 0,2 \text{ м}$, модуль индукции магнитного поля равен $0,5 \text{ Тл}$.



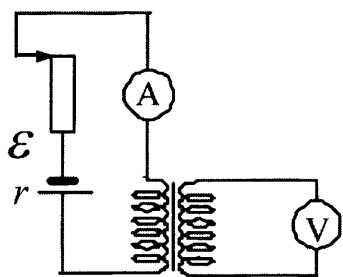
Определите отношение массы иона к его электрическому заряду $\frac{m}{q}$. Кинетической энергией иона при его вылете из источника пренебрегите.

71. На рисунке изображены две изолированные друг от друга электрические цепи. Первая содержит последовательно соединенные источник тока, реостат, катушку индуктивности и амперметр, а вторая – проволочный моток, к концам которого присоединен гальванометр, изображенный на рисунке справа. Катушка и моток надеты на железный сердечник.



Как будут изменяться показания приборов, если катушку, присоединенную к источнику тока, плавно перемещая вверх, снять с сердечника? Ответ поясните, указав, какие физические закономерности вы использовали для объяснения.

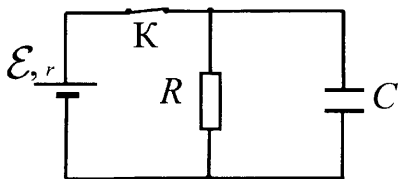
72. Медный куб с длиной ребра $a = 0,1 \text{ м}$ скользит по столу с постоянной скоростью $v = 10 \text{ м/с}$, касаясь стола одной из плоских поверхностей. Вектор индукции магнитного поля $B = 0,2 \text{ Тл}$ направлен вдоль поверхности стола и перпендикулярно вектору скорости куба. Найдите модуль вектора напряженности электрического поля, возникающего внутри металла, и модуль разности потенциалов между центром куба и одной из его вершин.



73. На рисунке приведена электрическая цепь, состоящая из гальванического элемента, реостата, трансформатора, амперметра и вольтметра. В начальный момент времени ползунок реостата установлен в крайнее верхнее положение и неподвижен. Опираясь на законы электродинамики, объясните, как будут изменяться показания приборов в процессе перемещения ползунка реостата вниз. ЭДС самоиндукции пренебречь по сравнению с $\mathcal{E}$.

74. Медное кольцо из провода диаметром 2 мм расположено в однородном магнитном поле, магнитная индукция которого меняется по модулю со скоростью 1,09 Тл/с. Плоскость кольца перпендикулярна вектору магнитной индукции. Каков диаметр кольца, если возникающий в нём индукционный ток равен 10 А? Удельное сопротивление меди $\rho_{\text{Cu}} = 1,72 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$.

75. В идеальном колебательном контуре в момент времени t напряжение на конденсаторе равно 1,2 В, а сила тока в катушке индуктивности равна 4 мА. Амплитуда колебаний напряжения на конденсаторе 2,0 В. Найдите амплитуду колебаний силы тока в катушке.



76. В электрической схеме, показанной на рисунке, ключ К замкнут. ЭДС батареи $\mathcal{E} = 12 \text{ В}$, ёмкость конденсатора $C = 0,2 \text{ мкФ}$. После размыкания ключа К в результате разряда конденсатора на резисторе выделяется количество теплоты $Q = 10 \text{ мкДж}$. Найдите отношение внутреннего сопротивления батареи к сопротивлению резистора $\frac{r}{R}$.

77. К колебательному контуру подсоединили источник тока, на клеммах которого напряжение гармонически меняется с частотой ν . Индуктивность L катушки колебательного контура можно плавно менять от максимального значения L_{max} до минимального L_{min} , а ёмкость его конденсатора постоянна. Ученик постепенно уменьшал индуктивность катушки от максимального значения до минимального и обнаружил, что амплитуда силы тока в контуре всё время возрастала. Опираясь на свои знания по электродинамике, объясните наблюдения ученика

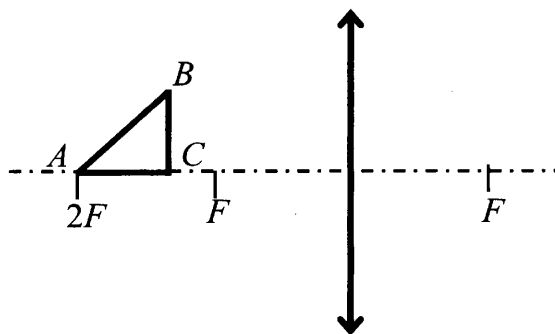
78. В дно водоема глубиной 3 м вертикально вбита свая, скрытая под водой. Высота сваи 2 м. Угол падения солнечных лучей на поверхность воды равен 30° . Определите длину тени сваи на дне водоема. Коэффициент преломления воды $n = \frac{4}{3}$.

79. На поверхности воды плавает прямоугольный надувной плот длиной 6 м. Небо затянуто сплошным облачным покровом, полностью рассеивающим солнечный свет. Глубина тени под плотом равна 2,3 м. Определите ширину плота. Глубиной погружения плота и рассеиванием света водой пренебречь. Показатель преломления воды относительно воздуха принять равным $\frac{4}{3}$.

80. Линза, фокусное расстояние которой 15 см, даёт на экране изображение предмета с пятикратным увеличением. Экран пододвинули к линзе вдоль её главной оптической оси на 30 см. Затем при неизменном положении линзы передвинули предмет так, чтобы изображение снова стало резким. На какое расстояние сдвинули предмет относительно его первоначального положения?

81. На экране с помощью тонкой линзы получено изображение предмета с пятикратным увеличением. Экран передвинули на 30 см вдоль главной оптической оси линзы. Затем при неизменном положении линзы передвинули предмет, чтобы изображение снова стало резким. В этом случае получилось изображение с трехкратным увеличением. На сколько пришлось передвинуть предмет относительно его первоначального положения?

82. Равнобедренный прямоугольный треугольник ABC расположен перед тонкой собирающей линзой оптической силой 2,5 дптр так, что его катет AC лежит на главной оптической оси линзы (см. рисунок). Вершина прямого угла C лежит ближе к центру линзы, чем вершина острого угла A . Расстояние от центра линзы до точки A равно удвоенному фокусному расстоянию линзы, $AC = 4$ см. Постройте изображение треугольника и найдите площадь получившейся фигуры.



83. Объективы современных фотоаппаратов имеют переменное фокусное расстояние. При изменении фокусного расстояния «наводка на резкость» не сбивается. Условимся считать изображение на плёнке фотоаппарата резким, если вместо идеального изображения в виде точки на плёнке получается изображение пятна диаметром не более 0,05 мм. Поэтому если объектив находится на фокусном расстоянии от плёнки, то резкими считаются не только бесконечно удалённые предметы, но и все предметы, находящиеся дальше некоторого расстояния d . Оказалось, что это расстояние равно 5 м, если фокусное расстояние объектива 50 мм. Как изменится это расстояние, если, не меняя «относительного отверстия» изменить фокусное расстояние объектива до 25 мм? («Относительное отверстие» — это отношение фокусного расстояния к диаметру входного отверстия объектива.) При расчётах считать объектив тонкой линзой. Сделайте рисунок, поясняющий образование пятна.

84. Груз массой 0,1 кг, прикрепленный к пружине жесткостью 0,4 Н/м, совершает гармонические колебания с амплитудой 0,1 м. При помощи собирающей линзы с фокусным расстоянием 0,2 м изображение колеблющегося груза проецируется на экран, расположенный на расстоянии 0,5 м от линзы. Главная оптическая ось линзы перпендикулярна траектории груза и плоскости экрана. Определите максимальную скорость изображения груза на экране.

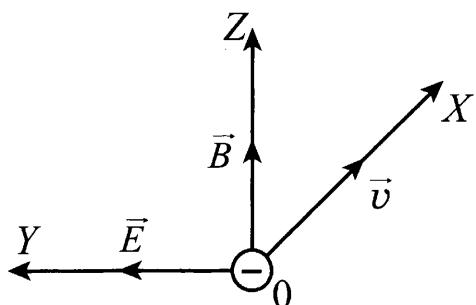
85. На оси Ox в точке $x_1 = 0$ находится оптический центр тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = 30$ см, а в точке $x_2 = 15$ см — тонкой рассеивающей линзы. Главные оптические оси обеих линз лежат на оси Ox . На со-

бирающую линзу по оси Ox падает параллельный пучок света из области $x < 0$. Пройдя оптическую систему, пучок остается параллельным. Найдите фокусное расстояние F_2 рассеивающей линзы.

КВАНТОВАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

86. Красная граница фотоэффекта для вещества фотокатода $\lambda_0 = 450$ нм. При облучении катода светом с длиной волны λ фототок прекращается при напряжении между анодом и катодом $U = 1,4$ В. Определите длину волны λ .

87. Фотокатод освещается светом с длиной волны $\lambda = 300$ нм. Вылетевшие из катода электроны попадают в однородное магнитное поле с индукцией $B = 2 \cdot 10^{-4}$ Тл перпендикулярно линиям индукции этого поля и движутся по окружностям. Максимальный радиус такой окружности $R = 2$ см. Какова работа выхода $A_{\text{вых}}$ для вещества фотокатода?



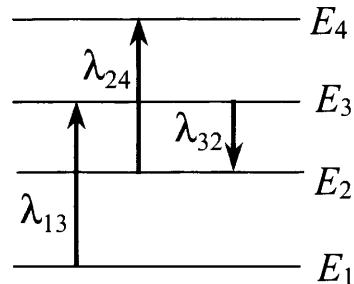
88. Электроны, вылетевшие в положительном направлении оси OX с катода фотоэлемента под действием света, попадают в электрическое и магнитное поля (см. рисунок). Какой должна быть напряжённость электрического поля E , чтобы самые быстрые электроны отклонялись в положительном направлении оси OY ? Работа выхода для вещества катода $2,39$ эВ, частота света $6,4 \cdot 10^{14}$ Гц, индукция магнитного поля 10^{-3} Тл.

89. Электромагнитное излучение используется для нагревания воды массой 1 кг. За время 700 с температура воды увеличивается на 10°C . Какова длина волны излучения, если источник испускает 10^{20} фотонов за 1 с? Считать, что излучение полностью поглощается водой.

90. Для разгона космических аппаратов и коррекции их орбит предложено использовать солнечный парус – скрепленный с аппаратом легкий экран большой площади из тонкой пленки, которая зеркально отражает солнечный свет. Каково добавочное изменение скорости космического аппарата массой 500 кг (включая массу паруса) за 24 часа за счет паруса размерами 100 м $\times$ 100 м? Мощность W солнечного излучения, падающего на 1 м² поверхности, перпендикулярной солнечным лучам, составляет 1370 Вт/м².

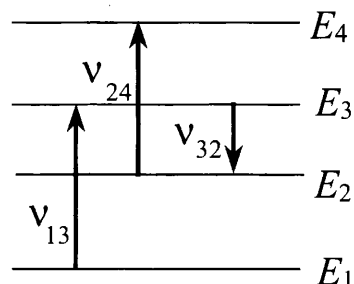
91. Для разгона космических аппаратов и коррекции их орбит предложено использовать солнечный парус – скрепленный с аппаратом легкий экран большой площади из тонкой пленки, которая зеркально отражает солнечный свет. Мощность W солнечного излучения, падающего на 1 м² поверхности, перпендикулярной солнечным лучам, составляет вблизи Земли 1370 Вт/м². Во сколько раз ближе к Солнцу, чем Земля, находится аппарат массой 500 кг (включая массу паруса), снабженный парусом размерами 100 м $\times$ 100 м, если давление солнечных лучей сообщает ему дополнительное ускорение $10^{-4} g$?

92. На рисунке изображены энергетические уровни атома и указаны длины волн фотонов, излучаемых и поглощаемых при переходах с одного уровня на другой. Какова длина волны для фотонов, излучаемых при переходе с уровня E_4 на уровень E_1 , если $\lambda_{13} = 400$ нм, $\lambda_{24} = 500$ нм, $\lambda_{32} = 600$ нм?



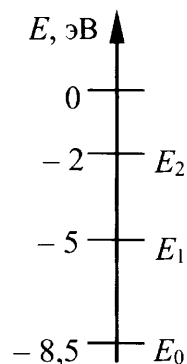
93. Уровни энергии электрона в атоме водорода задаются формулой $E_n = -\frac{13,6}{n^2}$ эВ, где $n = 1, 2, 3, \dots$. При переходе атома из состояния E_2 в состояние E_1 атом испускает фотон. Попад на поверхность фотокатода, фотон выбивает фотоэлектрон. Длина волны света, соответствующая красной границе фотоэффекта для материала поверхности фотокатода, $\lambda_{\text{кр}} = 300$ нм. Чему равна максимально возможная кинетическая энергия фотоэлектрона?

94. На рисунке представлены энергетические уровни электронной оболочки атома и указаны частоты фотонов, излучаемых и поглощаемых при некоторых переходах между ними. Какова максимальная длина волны фотонов, излучаемых атомом при любых возможных переходах между уровнями E_1, E_2, E_3 и E_4 , если $\nu_{13} = 7 \cdot 10^{14}$ Гц, $\nu_{24} = 5 \cdot 10^{14}$ Гц, $\nu_{32} = 3 \cdot 10^{14}$ Гц?



95. Металлическая пластина облучается светом частотой $\nu = 1,6 \cdot 10^{15}$ Гц. Работа выхода электронов из данного металла равна 3,7 эВ. Вылетающие из пластины фотоэлектроны попадают в однородное электрическое поле напряжённостью 130 В/м, причём вектор напряжённости $\vec{E}$ направлен к пластине перпендикулярно её поверхности. Какова максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов на расстоянии 10 см от пластины?

96. Предположим, что схема энергетических уровней атомов некоего вещества имеет вид, показанный на рисунке, и атомы находятся в состоянии с энергией E_1 . Электрон, столкнувшись с одним из таких атомов, отскочил, приобретя некоторую дополнительную энергию. Импульс электрона после столкновения с покоящимся атомом оказался равным $1,2 \cdot 10^{-24}$ кг·м/с. Определите кинетическую энергию электрона до столкновения. Возможностью испускания света атомом при столкновении с электроном пренебречь.



97. Покоящийся атом водорода в основном состоянии ($E_1 = -13,6$ эВ) поглощает в вакууме фотон с длиной волны $\lambda = 80$ нм. С какой скоростью движется вдали от ядра электрон, вылетевший из атома в результате ионизации? Кинетической энергией образовавшегося иона пренебречь.

98. Уровни энергии электрона в атоме водорода задаются формулой $E_n = -\frac{13,6}{n^2}$ эВ, где $n = 1, 2, 3, \dots$. При переходе атома из состояния E_2 в состояние E_1 атом ис-

пускает фотон. Попад на поверхность фотокатода, фотон выбивает фотоэлектрон. Длина волны света, соответствующая красной границе фотоэффекта для материала поверхности фотокатода, $\lambda_{\text{кр}} = 300$ нм. Чему равна максимальная возможная скорость фотоэлектрона?

99. Ядро покоящегося нейтрального атома, находясь в однородном магнитном поле индукцией B , испытывает α -распад. При этом рождаются α -частица и тяжелый ион нового элемента. Трек тяжелого иона находится в плоскости, перпендикулярной направлению магнитного поля. Начальная часть трека напоминает дугу окружности радиусом R . Выделившаяся при α -распаде энергия ΔE целиком переходит в кинетическую энергию продуктов реакции. Масса α -частицы равна m_α , ее заряд равен $2e$. Найдите модуль отношения заряда к массе $\left| \frac{q}{M} \right|$ для тяжелого иона.

100. Радиоактивный препарат помещен в медный контейнер массой 0,5 кг. За 2 ч температура контейнера повысилась на 5,2 К. Известно, что данный препарат испускает α -частицы энергией 5,3 МэВ, причем энергия всех α -частиц полностью переходит во внутреннюю энергию. Найдите активность препарата A , т.е. количество α -частиц, рождающихся в нем за 1 с. Теплоемкостью препарата и теплообменом с окружающей средой пренебречь.

101. В массивном образце, содержащем радий, за 1 с испускается $3,7 \cdot 10^{10}$ α -частиц, движущихся со скоростью $1,5 \cdot 10^7$ м/с. Найдите энергию, выделяющуюся за 1 ч. Масса α -частицы равна $6,7 \cdot 10^{-27}$ кг. Энергией отдачи ядер, γ -излучением и релятивистскими эффектами пренебречь.

102. Препарат, активность которого равна $1,7 \cdot 10^{12}$ частиц в секунду, помещен в калориметр, заполненный водой при 293 К. Сколько времени потребуется, чтобы довести до кипения 10 г воды, если известно, что данный препарат испускает α -частицы энергией 5,3 МэВ, причем энергия всех α -частиц полностью переходит во внутреннюю энергию? Теплоемкостью препарата, калориметра и теплообменом с окружающей средой пренебречь.

ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. 150 м
2. 10 м/с
3. 2,5 с
4. 5 м
5. 1 с
6. $\approx 0,17$ м
7. 6 Н
8. $\frac{mg}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}$
9. 2 кг
10. 1,6 м/с²
11. 2,7 Н
12. 3,0 кг
13. 2,7 Н
14. 18
15. 1,11
16. $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ (м)
17. 4
18. 30 кг
19. 15 Н
20. уменьшится на 2,5 см
21. 2,0 м/с
22. 60°
23. 1
24. 2,8 Дж
25. 32 Дж
26. 40 м
27. 1 см
28. 10 м
29. 20 Дж
30. - 2,44 Дж
31. 0,15 м
32. 0,43
33. 9,5 м
34. 60°
35. 0,5 МДж
36. $\sqrt{\frac{6H}{g}}$
37. 0,1 кг
38. 1 Дж
39. 9 Н
40. 0,3 м
41. 0,31 с
42. 30 см².
43. 400 К
44. 3740 Дж
45. 3370 Дж
46. Количество вещества в первой порции газа меньше, чем во второй.
47. 92 кг
48. 100 кг
49. 57,5 кДж
50. $2 \cdot 10^{-4}$ м²
51. Масса жидкости в сосуде будет уменьшаться.
52. Увеличится на 64 К
53. 15 г
54. 0,002 Н
55. 7,3 В
56. 0,13 м
57. $2 \cdot 10^{-15}$ Дж
58. 0,07 кг·м/с
59. 26 пФ
60. 190 В
61. Напряжение, измеренное вольтметром, уменьшается, а ток через амперметр растет.
62. 6,7 В
63. ≈ 5 Вт
64. 83 мкДж
65. 0,36 Дж
66. $R_1=10$ Ом; $R_2=20$ Ом
67. $\approx 3\%$
68. $I > \frac{mg}{2aB}$.
69. 0,5 Тл
70. $0,5 \cdot 10^{-7}$ кг/Кл

71. Во время перемещения катушки вверх и снятия с сердечника показания амперметра будут оставаться неизменными, а гальванометр будет регистрировать ток в цепи второй катушки

72. 2 В/м; 0,2 В

73. Во время перемещения движка реостата показания амперметра будут плавно увеличиваться, а вольтметр будет регистрировать напряжение на концах вторичной обмотки трансформатора только в момент перемещения движка

74. 0,2 м

75. 5 мА

76. 0,2

77. Ученик, уменьшая индуктивность катушки от $L_{\max}$ до $L_{\min}$, увеличивал собственную частоту колебаний контура, что привело к смещению резонансной кривой в сторону больших частот. Это могло произойти, если частота генератора лежала справа от максимума резонансной кривой.

78. $\approx 0,8$ м

79. $\approx 5,2$ м

80. На 2 см

81. На 2 см.

82. $\approx 9,9$ см²

83. Станет равным 1,25 м

84. 0,3 м/с

85. 15 см

86. 300 нм

87. $21,8 \cdot 10^{-25}$ кг·м/с

88. ≈ 300 В/м

89. $3,3 \cdot 10^{-7}$ м

90. 15,8 м/с

91. $\approx 2,3$ раза

92. 350 нм

93. $\approx 9,7 \cdot 10^{-19}$ Дж

94. $\approx 1,5 \cdot 10^{-6}$ м

95. 15,9 эВ

96. $2,3 \cdot 10^{-19}$ Дж

97. ≈ 811 км/с

98. $\approx 1,46 \cdot 10^6$ м/с

99. $\frac{2e}{m_\alpha} \cdot \left[\frac{2m_\alpha \Delta E}{(2eBR)^2} - 1 \right]$

100. $\approx 1,7 \cdot 10^{11}$ с⁻¹

101. ≈ 100 Дж

102. ≈ 2330 с

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Механика	6
Глава 2. Молекулярная физика и термодинамика	72
Глава 3. Электродинамика	99
Глава 4. Квантовая и ядерная физика	174
Глава 5. Задания для самостоятельной работы	198
Ответы к заданиям для самостоятельной работы	215