Муниципальное бюджетное учреждение города Костромы
«Городской центр обеспечения качества образования»

ШКОЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

2011-2012 УЧЕБНЫЙ ГОД

Кострома
2011

Составители:

Борткевич Л.К.	методист МБУ ГЦОКО г. Костромы
Бывших Т.А.	учитель высшей квалификационной категории МОУ лицея №34, Заслуженный учитель России
Горохова О.В.	учитель высшей квалификационной категории МОУ СОШ № 29
Ерохова Е.Г.	учитель высшей квалификационной категории МОУ гимназии №28
Курочкина С.В.	учитель высшей квалификационной категории МОУ лицея №34
Медведева М.В.	учитель высшей квалификационной категории МОУ лицея №34
Потапова М.Н.	учитель высшей квалификационной категории МОУ лицея № 32, Почетный работник общего образования РФ
Соколова М.С.	учитель высшей квалификационной категории МОУ лицея № 32
Соколова Т.В.	учитель высшей квалификационной категории МОУ лицея № 32
Шорохова С.А.	учитель высшей квалификационной категории МОУ лицея № 17, Заслуженный учитель России

Брошюра содержит материалы для проведения школьной олимпиады 2011-2012 учебного года в городе Костроме, решения всех заданий, методические рекомендации по проведению олимпиады.

Порядок проведения олимпиады в школе

Школьная олимпиада по математике проходит одновременно во всех школах города Костромы **21 октября 2011 года.** Сведения по итогам школьной олимпиады включаются в общий отчёт общеобразовательного учреждения «Итоги I (школьного) этапа олимпиады».

На основании МЕТОДИЧЕСКИХ РЕКОМЕНДАЦИЙ по разработке заданий для школьного этапа Всероссийской олимпиады школьников, подготовленных Центральной предметно-методической комиссией по математике, рекомендуемое время проведения олимпиады: **для 5-6 классов – 2 урока, для 7-8 классов – 3 урока, для 9-11 классов – 4 урока.**

Рекомендации по проведению школьной олимпиады

В первом этапе Всероссийской олимпиады имеет право участвовать каждый школьник, поэтому не должно быть никаких ограничений при допуске к участию.

Во время решения жюри олимпиады должно отвечать на вопросы школьников только по условиям предложенных задач и не имеет право комментировать решения участников. Если вопрос, заданный школьником, существенно влияет на понимание задачи, то ответ на него необходимо дать всем участникам.

В соответствии с регламентом проведения математических олимпиад школьников каждая задача оценивается из **7 баллов**.

Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако решение содержит существенные ошибки либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный)

	существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри.

В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Технические ошибки, если они не влияют на ход решения, следует относить к недочетам. Не следует снимать баллы за нерациональность решения, нетиповые рассуждения, неряшливое оформление, исправления, грязь.

После проведения олимпиады и проверки работ **рекомендуется проведение разбора задач**, на котором школьники должны узнать, за какие решения (факты в решениях) сколько баллов начисляло жюри.

После разбора проводится просмотр работ, во время которого каждый из участников олимпиады имеет право узнать претензии к своим решениям и увидеть распределение баллов в своей работе.

Если школьник не согласен с оценкой его работы в рамках оглашенных на разборе задач норм оценок, то жюри должно рассмотреть его претензии на **апелляции**. Во время апелляции недопустимо изменение общих норм оценок и рассмотрение дополнительных фактов, приводимых школьником, но отсутствующих в работе. После всех апелляций жюри уже не имеет право изменять оценки работ.

Участники школьного этапа олимпиады, набравшие наибольшее количество баллов, признаются **победителями школьного этапа** олимпиады при условии, что **количество набранных ими баллов превышает половину максимально возможных баллов**.

В случае, когда победители не определены, в школьном этапе олимпиады определяются только призеры.

Призерами школьного этапа олимпиады в пределах установленной квоты признаются все участники школьного этапа олимпиады, следующие в итоговой таблице за победителями.

В случае, когда у участника, определяемого в пределах установленной квоты в качестве призера, оказывается количество баллов такое же, как и у следующих за ним в итоговой таблице, решение по данному участнику и всем участникам, имеющим равное с ним количество баллов, определяется следующим образом:

1. все участники признаются призерами, если набранные ими баллы больше половины максимально возможных;
2. все участники не признаются призерами, если набранные ими баллы не превышают половины максимально возможных.

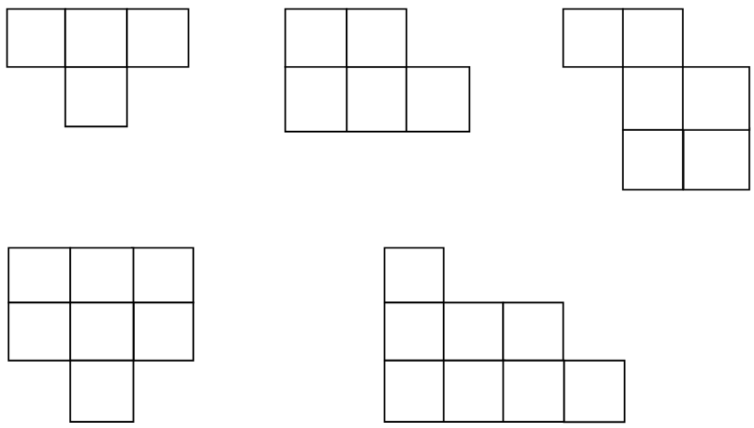
Задания носят **рекомендательный** характер. При замене заданий руководитель МО должен предоставить в Муниципальное бюджетное учреждение города Костромы «Городской центр обеспечения качества образования» тексты заданий, предложенных образовательным учреждением, в электронном и печатном виде.

5 класс

1. В двузначном числе зачеркнули цифру, и оно уменьшилось в 46 раз. Определите, какое это было число и какую цифру зачеркнули?

2. Кот Матроскин принёс с базара несколько яблок и хвастается Шарику: «Я купил в четыре раза больше яблок, чем ты вчера, но заплатил за каждое яблоко вдвое меньше». Сколько денег заплатил Матроскин, если Шарик истратил на яблоки 75 рублей?

3. Сложить квадрат, используя четыре из пяти изображённых фигурок. Какая фигурка останется лишней?



4. В семье четверо детей. Им исполнилось **5**, **8**, **13** и **15** лет. Детей зовут Аня, Миша, Вера и Женя. Одна из девочек ходит в детский сад. Аня старше Миши. Сумма возрастов Ани и Жени делится на **3**. Кто Женя: мальчик или девочка?

5. У пяти пиратов было по 16 монет. Потом первый отдал половину своих монет второму, второй – половину от имеющихся теперь монет третьему, третий половину четвертому, а четвертый – половину пятому. На сколько монет у пятого пирата стало больше, чем у первого?

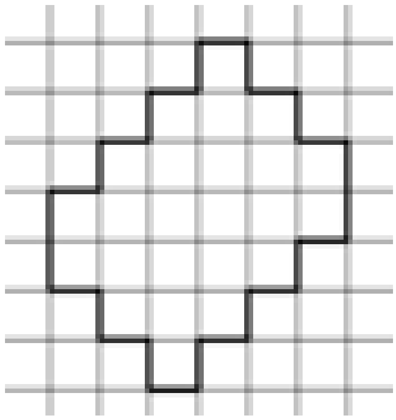
6 класс

1. Замените звёздочки цифрами, чтобы получилось верное равенство $\frac{5}{*} - \frac{\star}{3} = \frac{1}{6}$.

2. Доктор Айболит раздал пяти заболевшим зверям 2011 чудодейственную таблетку. Носорог получил на одну больше, чем крокодил, бегемот на одну больше, чем носорог, а слон – на одну больше, чем бегемот. Удаву досталось столько же таблеток, сколько и крокодилу. Сколько таблеток придётся съесть слону?

3. На новогодний праздник Тянитолкай получил подарок от доктора Айболита. Собака Авва считает, что ему подарили красный бант, попугай Карудо уверен, что это синий бант, а сова Бумба говорит, что подарен белый воздушный шар. Какой подарок получил Тянитолкай, если известно, что каждый из них угадал либо цвет подарка, либо его вид? Ответ обоснуйте.

4. Требуется разрезать по клеточкам, изображенную на рисунке фигуру на несколько равных частей. Сколько частей может получится ? Найдите все возможные ответы и для каждого из них укажите способ разрезания. (Части считаются равными, если они совпадают при наложении.)



5. Среди 101 монеты есть одна фальшивая, которая по весу отличается от настоящей. Но на этот раз неизвестно, в какую сторону. За два взвешивания определите, легче или тяжелее настоящей фальшивая монета. (Саму монету определять не нужно.)

7 класс

1. Решите числовой ребус: **ААА − АА − А = СС**.
2. Незнайка купил в магазине на 134 рубля килограмм конфет: шоколадных и карамелек, но забыл, сколько граммов каждого сорта. Он знает, что килограмм карамелек стоит 65 рублей, а килограмм шоколадных конфет – 180 рублей. Сколько граммов карамелек купил Незнайка?
3. Ковбой Билл зашёл в бар и попросил у бармена кольт за 3 доллара и шесть коробков непромокаемых спичек, цену которых он не знал. Бармен потребовал с него 11 долларов и 80 центов (1 доллар = 100 центов), и в ответ на это Билл вытащил револьвер. Тогда бармен пересчитал стоимость покупки и исправил ошибку. Как Билл догадался, что бармен пытался его обчистить?
4. Составьте из прямоугольников 1×1, 1×2, 1×3,…, 1×13 прямоугольник, каждая сторона которого больше 1.
5. Известно, что среди членов правительства Лимонии (а всего в нём 20 человек) заведомо имеется хотя бы один честный, а также что из любых двух хотя бы один – взяточник. Сколько в правительстве взяточников?

8 класс

1. Что больше $\sqrt{\frac{1997}{1998}}$ или $\sqrt{\frac{1998}{1999}}$?
2. В классе учится менее 50 школьников. За контрольную работу $\frac{1}{7}$ учеников получили пятерки, $\frac{1}{3}$ - четверки; $\frac{1}{2}$ – тройки. Сколько работ оказалось неудовлетворительных?
3. Найти значение выражения $2x^4 + 3x^2 \cdot y^2 + y^2 + y^4$, если известно, что $x^2 + y^2 = 1$.
4. В прямоугольнике $ABCD$на стороне BC взята точка М так, что $\angle AMB = \angle AMD$. Найдите эти углы, если $AD = 2AB$.
5. Одним ударом Шварценеггер может разбить любой кусок бетона на 3 части. Сколько ударов ему понадобится сделать, чтобы разбить бетонную плиту на 2005 частей?

9 класс

1. У Васи есть карточки с цифрами 1, 2, 3 и 4 – по две с каждой цифрой. Он хочет сложить из них число так, чтобы между двумя единицами была одна цифра, между двойками – две цифры, между тройками – три, а между четверками – четыре. Укажите какое-нибудь число, которое может получить Вася.

2. Решите уравнение: $2x^2 + 5y^2 - 4xy - 2y - 4x + 5 = 0$

3. Пусть D – дискриминант приведенного квадратного трехчлена $x^2 + ax + b$. Найдите корни трехчлена, если известно, что они различны и один из них равен D, а другой равен $2D$.

4. Прямоугольный участок выложен квадратными плитками. Если длину и ширину участка увеличить на 7 плиток, то общее число плиток станет в 3,5 раза больше числа плиток, которые будут лежать вдоль периметра участка. Сколько всего плиток на участке?

5. На полке стоят 666 книг по черной и белой магии, причем никакие две книги по белой магии не стоят через 13 книг (т. е. между ними не может стоять 13 книг). Какое наибольшее число книг по белой магии может стоять на полке?

10 класс

1. Найдите a, b, c квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, зная, что этот график пересекает ось Oy в точке (0;–5) и имеет ровно одну общую точку (2;0) с осью Ox. Постройте этот график.
2. Решите неравенство $(x^2 - 6x + 8)^3(x - 8)^2 \leq 0$.
3. На сторонах *AB* и *BC* треугольника *ABC* взяты точки *K* и *M* так, что *AK*:*KB* =*BM*:*MC*=2:3. В каком отношении прямая *KM* делит медиану *BF*?
4. Решить систему неравенств
$$\begin{cases} x^{15} - 3x^{14} + 2x - 5 > 0 \\ (x^2 + 2x - 15)^2 \leq 0 \end{cases}.$$
5. В «портфеле» у начинающего инвестора есть акции нескольких компаний. Если акции первой компании подорожают на 25%, а акции остальных компаний не изменятся в цене, то весь «портфель» подорожает на 15%. Если же акции второй компании подорожают на 25%, а акции остальных компаний не изменяться в цене, то весь «портфель» инвестора подорожает на 10%. Найдите, акции скольких компаний есть в «портфеле» начинающего инвестора, и наименьшую стоимость «портфеля» в начале, если цены акций могут быть только целыми числами.

Муниципальное бюджетное учреждение города Костромы «Городской центр обеспечения качества образования»

11 класс

1. За последний год численность населения города уменьшилась на 4%, а число безработных увеличилось на 5%. Сколько процентов от общего числа жителей на данный момент составляют безработные, если год назад их было 8%?

2. Что больше: $\sqrt{2010}+\sqrt{2012}$ или $2\sqrt{2011}$?

3. Решите уравнение: $|x-2|\cdot\sin x=\frac{1}{2}x\cdot|\sin x|$

4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью (AA_1C) и прямой A_1B, если $AA_1 = 3$, $AB = 4$ и $BC = 3$.

5. Найдите два натуральных числа, если их произведение заключено между числами 120 и 130, а их отношение – между числами 2 и 3. Укажите все решения.

Решение
5 класс

1. В двузначном числе зачеркнули цифру, и оно уменьшилось в 46 раз. Определите, какое это было число и какую цифру зачеркнули?

Ответ: Число 92

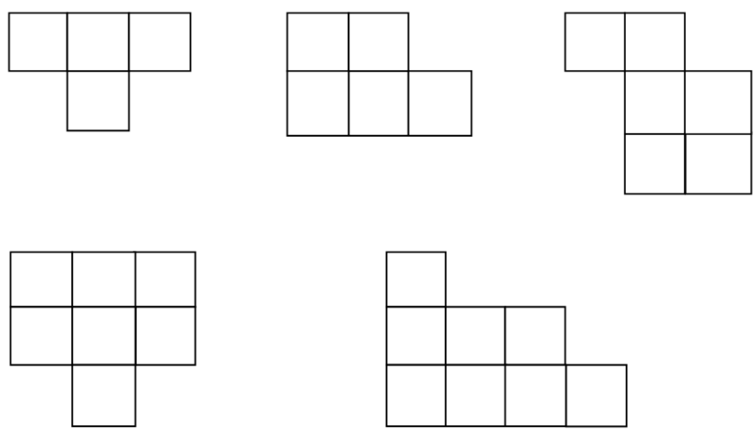
Решение: Зачёркнута цифра 9

2. Кот Матроскин принёс с базара несколько яблок и хвастается Шарику: «Я купил в четыре раза больше яблок, чем ты вчера, но заплатил за каждое яблоко вдвое меньше». Сколько денег заплатил Матроскин, если Шарик истратил на яблоки 75 рублей?

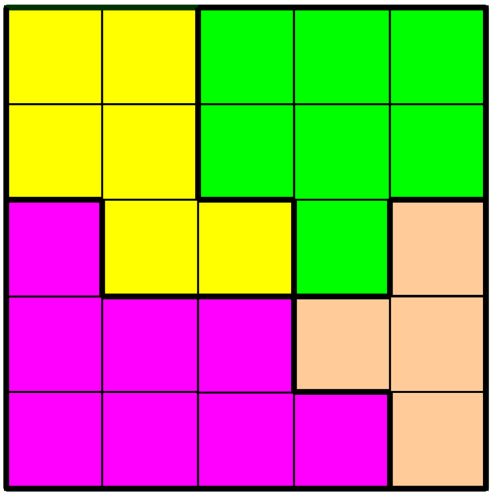
Ответ: 150 рублей

Решение: Если бы Матроскин купил яблоки по той же цене, что Шарик, то заплатил бы за них 75·4=300 рублей. Так как за каждое яблоко он заплатил вдвое меньше, то Матроскин истратил 300:2=150 рублей.

3. Сложить квадрат, используя четыре из пяти изображённых фигурок. Какая фигурка останется лишней?



Ответ:



Решение: сосчитаем, сколько всего клеточек в данных фигурках. 4+5+6+7+8=30. Чтобы получился квадрат, нам надо 25 клеточек, а у нас их 30. Значит, лишней окажется фигурка из 5 клеток.

4. В семье четверо детей. Им исполнилось **5**, **8**, **13** и **15** лет. Детей зовут Аня, Миша, Вера и Женя. Одна из девочек ходит в детский сад. Аня старше Миши. Сумма возрастов Ани и Жени делится на **3**. Кто Женя: мальчик или девочка?

Ответ: Женя — девочка

Решение: Так как в детский сад может ходить только пятилетний ребёнок, то самый младший ребёнок — девочка. Значит, Мише — не пять лет. Аня старше Миши, то есть Ане исполнилось либо 13, либо 15 лет. Так как сумма возрастов Ани и Жени делится на три, то Ане не может быть пятнадцать лет. Следовательно, Ане — тринадцать. Миша её младше, значит, Мише — восемь. Тогда Жене пять лет и она девочка.

5. У пяти пиратов было по 16 монет. Потом первый отдал половину своих монет второму, второй – половину от имеющихся теперь монет третьему, третий половину четвертому, а четвертый – половину пятому. На сколько монет у пятого пирата стало больше, чем у первого?

Ответ: на 24 монеты.

Решение: После того, как первый пират отдал второму половину своих монет, то есть 8, у него осталось 8 монет, а у второго пирата стало 16 + 8 = 24 монеты. Теперь второй отдаёт третьему пирату 24:2 = 12 монет, и у него остается 12 монет, а у третьего 16 + 12 = 28 монет. Когда третий пират отдаст четвёртому 28:2 = 14 монет, то у него останется 14 монет, а у четвёртого станет 16 + 14 = 30 монет. Теперь четвёртый отдаст пятому пирату 30:2 = 15 монет, и у пятого пирата стало 16 + 15 = 31 монета. Итак, у пятого пирата монет стало больше, чем у первого на 31 – 8 = 24 монеты.

6 класс

1. Замените звёздочки цифрами, чтобы получилось верное равенство: $\frac{5}{*} - \frac{\star}{3} = \frac{1}{6}$.

Решение: Достаточно одного примера: $\frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$ или $\frac{5}{30} - \frac{0}{3} = \frac{1}{6}$.

2. Доктор Айболит раздал пяти заболевшим зверям 2011 чудодейственных таблеток. Носорог получил на одну больше, чем крокодил, бегемот на одну больше, чем носорог, а слон – на одну больше, чем бегемот. Удаву досталось столько же таблеток, сколько и крокодилу. Сколько таблеток придётся съесть слону?

Ответ: 404 таблетки

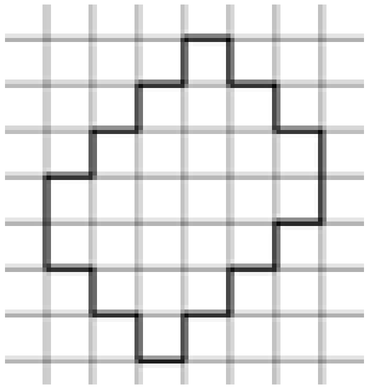
Решение: Пусть x таблеток выдал Айболит крокодилу и столько же удаву. (x+1) таблеток получил носорог, (x+2) таблетки бегемот и (x+3) таблетки слон. $x+x+x+1+x+2+x+3=2011$, $x=401$. Значит, слон получил 404 таблетки.

3. На новогодний праздник Тянитолкай получил подарок от доктора Айболита. Собака Авва считает, что ему подарили красный бант, попугай Карудо уверен, что это синий бант, а сова Бумба говорит, что подарен белый воздушный шар. Какой подарок получил Тянитолкай, если известно, что каждый из них угадал либо цвет подарка, либо его вид. Ответ обоснуйте?

Ответ: белый бант

Решение: Предположим, что сова угадала вид подарка (шарик), тогда собака и попугай угадали его цвет. Поскольку они назвали разные цвета, то такого быть не может. Следовательно сова угадала цвет подарка (белый), а собака и попугай угадали его вид (бант).

4. Требуется разрезать по клеточкам, изображенную на рисунке фигуру на несколько равных частей. Сколько частей может получится? Найти все возможные ответы и для каждого из них укажи способ разрезания. (Части считаются равными, если они совпадают при наложении.)



Решение: Данная фигура содержит 24 клетки. Поскольку её требуется разрезать на равные части, то в каждой должно быть равное количество клеток. Значит количество частей должно быть делителем числа 24. Выпишем все делители числа 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. На одну часть разрезать фигуру нет смысла, поэтому покажем все остальные случаи.

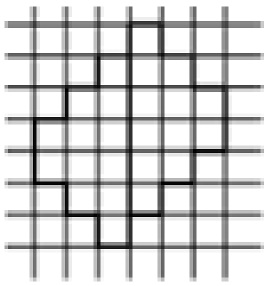


Рис. а

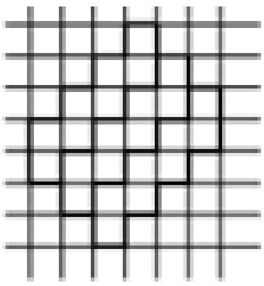


Рис. б

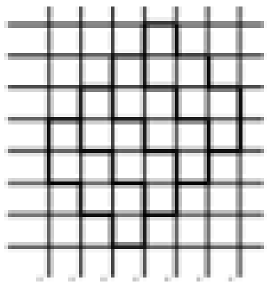


Рис. в

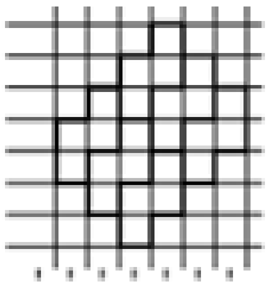


Рис. г

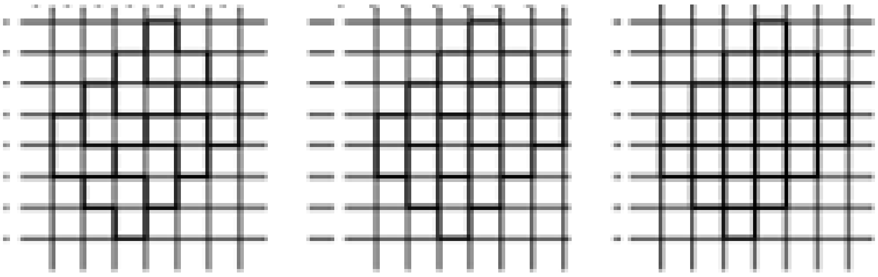


Рис. д **Рис. е** **Рис. ж**

5. Среди 101 монеты есть одна фальшивая, которая по весу отличается от настоящей. Но на этот раз неизвестно, в какую сторону. За два взвешивания определите, легче или тяжелее настоящей фальшивая монета. (Саму монету определять не нужно.)

Ответ: фальшивая тяжелее

Решение. Положим на каждую чашу по 50 монет. Если чаши будут весить одинаково, то оставшаяся монета фальшивая, а монеты, которые лежат на чашах, настоящие. Чтобы узнать, тяжелее или легче весит фальшивая настоящей, достаточно сравнить ее с любой настоящей монетой.

Если же одна из чаш весит больше другой, то возьмем ее и разобьем на две кучки по 25 монет. Если они весят одинаково, то фальшивая монета была на другой чаше, значит, фальшивая легче. Если же одна из чаш перевесит, то фальшивая монета была в этих 50, т. е. фальшивая тяжелее.

7 класс

1. Решите числовой ребус ААА − АА − А = СС. (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры).

Ответ: 11

Решение. ААА − АА = А00. При $А \neq 1$, А00 − А > 100 ≠ СС, поэтому А = 1. 111 − 11 − 1 = 99.

2. Незнайка купил в магазине на 134 рубля килограмм конфет: шоколадных и карамелек, но забыл, сколько граммов каждого сорта. Он знает, что килограмм карамелек стоит 65 рублей, а килограмм шоколадных конфет 180 рублей. Сколько граммов карамелек купил Незнайка?

Ответ: 400 граммов карамели.

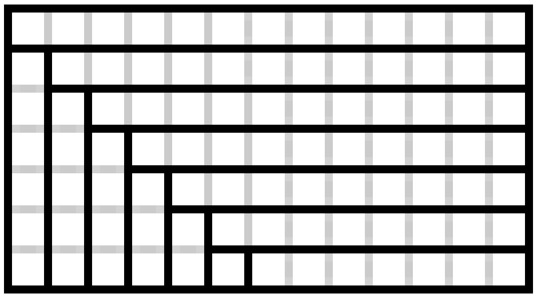
Решение. Пусть Незнайка купил x кг карамели, тогда шоколадных конфет ($1x$) кг. Таким образом, $65x + 180\cdot(1x) = 134$, откуда $x = 0{,}4$.

3. Ковбой Билл зашел в бар и попросил у бармена кольт за 3 доллара и шесть коробков непромокаемых спичек, цену которых он не знал. Бармен потребовал с него 11 долларов 80 центов (1 доллар = 100 центов), и в ответ на это Билл вытащил револьвер. Тогда бармен пересчитал стоимость покупки и исправил ошибку. Как Билл догадался, что бармен пытался его обсчитать?

Решение: Сколько бы ни стоили спички, общая сумма, которую должен заплатить Билл, должна делиться на 3: цена кольта делится на 3, и цена шести коробков спичек тоже делится на 3, даже если цена одного коробка на 3 не делится. Бармен, однако, назвал общую сумму не кратную 3. Значит, сумма была подсчитана неверно.

4. Составьте из прямоугольников 1×1, 1×2, $1\times3,\ldots,1\times13$ прямоугольник, каждая сторона которого больше 1.

Решение. Площадь искомого прямоугольника должна быть равна $1 + 2 + \ldots +13 = 91$. Так как 91 раскладывается только в произведение 7×13, то стороны прямоугольника должны быть равны 7 и 13. Замостить его исходными прямоугольниками можно, например, так:



5. Известно, что среди членов правительства Лимонии (а всего в нём 20 человек) заведомо имеется хотя бы один честный, а также что из любых двух хотя бы один – взяточник. Сколько в правительстве взяточников?

Ответ: в правительстве 19 взяточников.

Решение: Заметим, что в правительстве Лимонии ровно один честный чиновник. Действительно, по условию один честный там есть; но двух честных там быть не может – тогда из них не было бы ни одного взяточника, что противоречит условию. Значит, честный в правительстве ровно один, следовательно, взяточников – 19.

8 класс

1. Что больше $\sqrt{\frac{1997}{1998}}$ или $\sqrt{\frac{1998}{1999}}$?

Ответ: $\sqrt{\frac{1997}{1998}} \langle \sqrt{\frac{1998}{1999}}$

Решение. Сравним $\frac{1997}{1998}$ и $\frac{1998}{1999}$. $1-\frac{1997}{1998}=\frac{1}{1998}$, $1-\frac{1998}{1999}=\frac{1}{1999}$, $\frac{1}{1998}\rangle\frac{1}{1999}$, значит $\frac{1997}{1998}\langle\frac{1998}{1999}$. Следовательно $\sqrt{\frac{1997}{1998}}\langle\sqrt{\frac{1998}{1999}}$

2. В классе учится менее 50 школьников. За контрольную работу $\frac{1}{7}$ учеников получили пятерки, $\frac{1}{3}$ – четверки; $\frac{1}{2}$ – тройки. Сколько работ оказалось неудовлетворительных?

Ответ: одна работа.

Решение. По условию задачи число учеников должно быть кратно 7, 3, 2, а такому условию удовлетворяет лишь число 42, тогда неудовлетворительных работ было 42 – 6 – 14 – 21 = 1

3. Найти значение выражения $2x^4 + 3x^2 \cdot y^2 + y^2 + y^4$, если известно, что $x^2 + y^2 = 1$.

Ответ: 2.

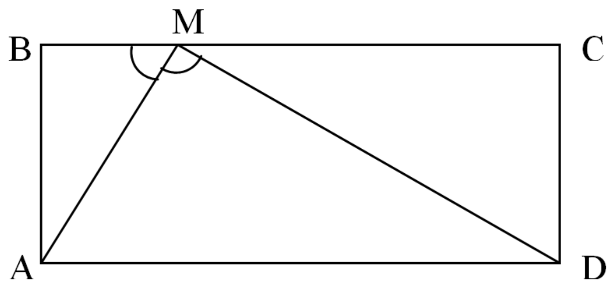
Решение. $2x^4 + 3x^2 \cdot y^2 + y^2 + y^4 = (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) + x^4 + x^2y^2 + y^2 = (x^2 + y^2)^2 + x^2 \cdot (x^2 + y^2) + y^2 = 1^2 + x^2 \cdot 1 + y^2 = 1 + 1 = 2$

4. В прямоугольнике *ABCD* на стороне *BC* взята точка *M* так, что $\angle AMB = \angle AMD$. Найдите эти углы, если *AD* = 2*AB*

Ответ:$\angle AMB = \angle AMD = 75^0$

Решение. Т. к. *ABCD* – прямоугольник, то прямые *BC*|| *AD* по свойству. $\angle AMB$ и $\angle MAD$ накрест лежащие, образованные параллельными прямыми *BC*|| *AD* при секущей AM, то $\angle AMB$ =$\angle MAD$. Из $\angle AMB$ =$\angle AMD$ и $\angle AMB = \angle MAD$ следует $\angle AMD = \angle MAD$. Значит, треугольник ΔAMD– равнобедренный по признаку. Тогда, *AD* = *DM*. Т. к. *ABCD* – прямоугольник, то *AB* = *CD*. По условию *AD* = 2*AB*. Получаем в прямоугольном треугольнике ΔCMD: *MD* = 2*CD*. Следовательно, $\angle CMD = 30^0$.

Т.к. $\angle AMB + \angle AMD + \angle DMC = 180^0$и $\angle AMB = \angle AMD$, $\angle CMD = 30^0$, то $\angle AMB = \angle AMD = (180^0 - 30^0) : 2 = 75^0$



5. Одним ударом Шварценеггер может разбить любой кусок бетона на 3 части. Сколько ударов ему понадобится сделать, чтобы разбить бетонную плиту на 2005 частей?

Ответ: 1002 удара.

Решение. В результате 1 + 3 + 9 + 27 + 81 +243 = 364 ударов было получено 729 камней (1 удар-3 камня;4 удара – 9 камней; 13 ударов – 27 камней;40 ударов – 81 камень; 121 удар – 243 камня; 364 удара – 729 камней), которые необязательно разбивать все, чтобы получить 2005 камней; достаточно разбить лишь 638, то есть сделать еще 638 ударов, получить 1914 камней и добавить к ним оставшиеся (729 – 638 = 91) камни. Всего получится 2005 камней и 364 + 638 = 1002 удара.

9 класс

1. У Васи есть карточки с цифрами 1, 2, 3 и 4 – по две с каждой цифрой. Он хочет сложить из них число так, чтобы между двумя единицами была одна цифра, между двойками – две цифры, между тройками – три, а между четверками – четыре. Укажите какое-нибудь число, которое может получить Вася.

Ответ: 41312432 или 23421314.

2. Решите уравнение:

$$2x^2 + 5y^2 - 4xy - 2y - 4x + 5 = 0$$

Ответ:x=2; y=1

Решение: Преобразуем данное уравнение:

$$(x^2 - 4xy + 4y^2) + (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 2y + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2y)^2 + (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 0$$

Так как каждое слагаемое в левой части принимает только неотрицательные значения, то полученное равенство выполняется тогда, и только тогда, когда каждое слагаемое равно нулю:

$$(y - 1)^2 = 0 \ \Leftrightarrow y = 1$$

$$(x-2)^2 = 0 \ \Leftrightarrow x = 2$$
$$(x-2y)^2 = 0 \ \Leftrightarrow x = 2y$$

При x=2, y=1 последнее равенство верно.

3. Пусть D – дискриминант приведенного квадратного трехчлена $x^2 + ax + b$. Найдите корни трехчлена, если известно, что они различны и один из них равен D, а другой равен $2D$.

Ответ: 1 и 2.

Решение: по теореме Виета $b = D \cdot 2D = 2D^2$

$$a = -(D + 2D) = -3D$$

т.е. трехчлен равен $x^2 - 3Dx + 2D^2$. Его дискриминант $D = (-3D)^2 - 4 \cdot 2D^2$, откуда $D = D^2$, т.е. D=0 (в этом случае оба корня одинаковы и равны 0) или D=1 (в этом случае корни равны 1 и 2).

4. Прямоугольный участок выложен квадратными плитками. Если длину и ширину участка увеличить на 7 плиток, то общее число плиток станет в 3,5 раза больше числа плиток, которые будут лежать вдоль периметра участка. Сколько всего плиток на участке?

Ответ: 35 плиток.

Решение. Пусть $m \times n$размер участка. Тогда после добавления плиток их количество станет равным $(m+7)(n+7)$. Количество плиток, расположенных вдоль периметра, будет равно $2m + 2n + 24$: по $(m+7)$ плиток вдоль двух сторон и по $n+5$ плиток дополнительно вдоль двух оставшихся сторон.

По условию $(m+7)(n+7) = 3{,}5(2m + 2n + 24)$, откуда $mn + 7n + 7m + 49 = 7m + 7n + 84$, то есть $mn = 35$

5. На полке стоят 666 книг по черной и белой магии, причем никакие две книги по белой магии не стоят через 13 книг (т.е. между ними не может стоять 13 книг). Какое наибольшее число книг по белой магии может стоять на полке?

Ответ: 336

Решение. Разобьем книги на цепочки книг, идущих через 13: 1-я, 15-я, 29-я,…; 2-я, 16-я,…; …; 14-я, 28-я,… Из того, что 666 = 14·47+8 = (8+6)·47+8, следует, что мы получим 8 цепочек по 48 книг и 6 цепочек по 47 книг. По условию в каждой из цепочек книги по белой магии не могут быть соседними. Значит, в любой цепочке длины 48 (а таких цепочек восемь) их наибольшее количество равно 24, и в цепочке длины 47 (а таких цепочек шесть) их также может быть 24 (цепочка начинается и заканчивается такой книгой). Всего (8+6)·24=14·24=336 книг.

10 класс

1. Найдите a, b, c квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, зная, что этот график пересекает ось Oy в точке (0; 5) и имеет ровно одну общую точку (2; 0) с осью Ox. Постройте этот график.

Ответ:$y = -\frac{5}{4}x^2 + 5x - 5.$

Решение. Из второго условия следует, что данная функция имеет вид $y = a(x-2)^2$. Коэффициент a найдём подстановкой точкиA (0; 5), принадлежащей графику: $-5 = a(0-2)^2$, откуда $a = -\frac{5}{4}$.

2. Решите неравенство $(x^2 - 6x + 8)^3(x-8)^2 \leq 0$.

Ответ:$x \in \lfloor 2; 4 \rfloor \cup \{8\}$.

Решение. Перепишем неравенство в виде $(x-2)^3(x-4)^3(x-8)^2 \leq 0$ и решим его методом интервалов, учитывая, что функция меняет свой знак при переходе через точки

$x = 4; x = 2$. *Комментарий*. Типичная ошибка: деление обеих частей неравенства на «положительный» квадрат выражения, приводящее в нестрогих неравенствах к потере корня.

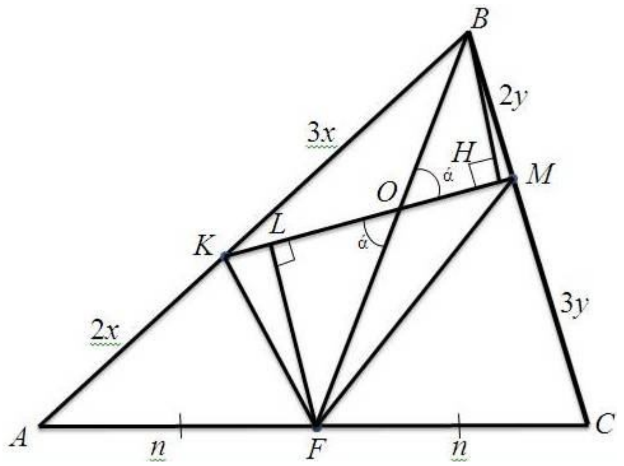
3. На сторонах *AB* и *BC* треугольника *ABC* взяты точки *K* и *M* так, что *AK*:*KB* =*BM*:*MC*=2:3. В каком отношении прямая *KM* делит медиану *BF*?

Ответ: $\frac{BO}{OF} = \frac{12}{13}$.

Решение. Пусть $BF \cap KM = O$. Найдём $\frac{BO}{OF}$. Построим ΔAKF и ΔFMC.

1). $\frac{S_{AKF}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AK \cdot AF \cdot sinA}{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot sinA} = \frac{2x \cdot n}{5x \cdot 2n} = \frac{1}{5} \Rightarrow S_{AFK} = \frac{1}{5} \cdot S_{ABC}$.

$\frac{S_{KBM}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot KB \cdot BM \cdot sinB}{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot sinB} = \frac{3x \cdot 2y}{5x \cdot 5y} = \frac{6}{25} \Rightarrow S_{KBM} = \frac{6}{25} \cdot S_{ABC}$.



$\frac{S_{MCF}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot MC \cdot CF \cdot sinC}{\frac{1}{2} \cdot BC \cdot AC \cdot sinC} = \frac{3y \cdot n}{5y \cdot 2n} = \frac{3}{10} \Rightarrow S_{MCF} = \frac{3}{10} \cdot S_{ABC}$.

2). $S_{KMF} = S_{ABC} - (S_{AKF} + S_{KBM} + S_{MCF}) = S_{ABC} - S_{ABC} - S_{ABC} \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{6}{25} + \frac{3}{10}\right) = S_{ABC} - S_{ABC} \cdot \frac{37}{50} = \frac{13}{50} \cdot S_{ABC}$

3). $\frac{S_{KBM}}{S_{KMF}} = \frac{\frac{1}{2} BH \cdot KM}{\frac{1}{2} FL \cdot KM} = \frac{BH}{FL}$, где BH и FL – высоты треугольников.

4). $\angle LOF = \angle BOH = \propto$, как вертикальные углы.

Рассмотрим ΔBOH: $\frac{BH}{BO} = sin\alpha \Rightarrow BH = BO \cdot sin\alpha$

5). Рассмотрим ΔLOF: $\frac{LF}{OF} = sin\alpha \Rightarrow FL = OF \cdot sin\alpha$

6). $\frac{S_{KBM}}{S_{KMF}} = \frac{BH}{FL} = \frac{BO\cdot sin\alpha}{OF\cdot sin\alpha} = \frac{BO}{OF}$

$$S_{KBM} = \frac{6}{25} \cdot S_{ABC}, \qquad S_{KMF} = \frac{13}{50} \cdot S_{ABC}$$

7). $\frac{BO}{OF} = \frac{6}{25} : \frac{13}{50} = \frac{12}{13}$

4. Решить систему неравенств $\begin{cases} x^{15} - 3x^{14} + 2x - 5 > 0 \\ (x^2 + 2x - 15)^2 \le 0 \end{cases}$

Ответ: 3.

Решение. Квадрат числа не может принимать отрицательные значения, поэтому второе неравенство может выполняться только в случае, когда выражение $x^2 + 2x - 15$ обращается в нуль, откуда $x = 3, x = -5$. Второй корень не удовлетворяет первому неравенству: каждое слагаемое в алгебраической сумме при $x = -5$ отрицательно. Первый корень удовлетворяет первому неравенству, так как при $x = 3,\ x^{15} - 3x^{14} = x^{14}(x - 3), a\ 2x - 5 = 6 - 5 = 1 > 0.$

5. В «портфеле» у начинающего инвестора есть акции нескольких компаний. Если акции первой компании подорожают на 25%, а акции остальных компаний не изменятся в цене, то весь «портфель» подорожает на 15%. Если же акции второй компании подорожают на 25%, а акции остальных компаний не изменяться в цене, то весь «портфель» инвестора подорожает на 10%. Найдите, акции скольких компаний есть в «портфеле» начинающего инвестора, и наименьшую стоимость «портфеля» в начале, если цены акций могут быть только целыми числами.

Ответ: двух компаний.

Решение. Наименьшая стоимость «портфеля» равна 20 единицам. Пусть S, A, B −сответственно стоимости всего «портфеля» акций первой и второй компании. Тогда условие задачи можно записать в виде $\frac{25}{100}A = \frac{15}{100}S$, $\frac{25}{100}B = \frac{10}{100}S$, откуда

$A = \frac{3}{5}S, B = \frac{2}{5}S$. Но тогда $A + B = S$,

поэтому акций других компаний, кроме первой и второй, в портфеле нет. Все числа $A = \frac{3}{5}S, B = \frac{2}{5}S$,

$\frac{15}{100}S = \frac{3}{20}S$,

$\frac{10}{100}S = \frac{1}{10}S$, будут целыми, если S делится на 20. Значит наименьшее возможное значение равно 20.

11 класс

1. За последний год численность населения города уменьшилась на 4%, а число безработных увеличилось на 5%. Сколько процентов от общего числа жителей на данный момент составляют безработные, если год назад их было 8%?

Ответ: 8,75%

Решение.

Пусть x человек – численность населения города первоначально.

Тогда $0{,}08x$ человек – число безработных первоначально.

На данный момент численность населения – $0{,}96x$ человек, а число безработных – $(1{,}05 \cdot 0{,}08x)$ человек.

$(1{,}05 \cdot 0{,}08x \cdot 100): 0{,}96x =$ 8,75% - процент безработных от общего числа жителей на данный момент.

2. Что больше: $\sqrt{2010} + \sqrt{2012}$ или $2\sqrt{2011}$?

Ответ: $2\sqrt{2011} > \sqrt{2010} + \sqrt{2012}$

Решение.

$$\sqrt{2010}+\sqrt{2012}-2\sqrt{2011}$$
$$=\left(\sqrt{2012}-\sqrt{2011}\right)-\left(\sqrt{2011}-\sqrt{2010}\right)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2012}+\sqrt{2011}}-\frac{1}{\sqrt{2011}+\sqrt{2010}}=\frac{\sqrt{2011}+\sqrt{2010}-\sqrt{2012}-\sqrt{2011}}{(\sqrt{2012}+\sqrt{2011})\left(\sqrt{2011}+\sqrt{2010}\right)}=$$
$$\frac{\sqrt{2010}-\sqrt{2012}}{(\sqrt{2012}+\sqrt{2011})\left(\sqrt{2011}+\sqrt{2010}\right)}<0,$$

следовательно, $2\sqrt{2011}>\sqrt{2010}+\sqrt{2012}$.

3. Решите уравнение: $|x-2|\cdot\sin x=\frac{1}{2}x\cdot|\sin x|$

Ответ: $x=\frac{4}{3}$ и $x=\pi n, n\epsilon Z$.

Решение.

$$\left[\begin{array}{l}
\begin{cases} x\ge 2 \\ \sin x\ge 0 \\ (x-2)\cdot\sin x=\frac{1}{2}x\cdot\sin x \end{cases} \quad (1) \\
\begin{cases} x\ge 2 \\ \sin x<0 \\ (x-2)\cdot\sin x=\frac{1}{2}x\cdot(-\sin x) \end{cases} \quad (2) \\
\begin{cases} x<2 \\ \sin x\ge 0 \\ (2-x)\cdot\sin x=\frac{1}{2}x\cdot\sin x \end{cases} \quad (3) \\
\begin{cases} x<2 \\ \sin x<0 \\ (2-x)\cdot\sin x=\frac{1}{2}x\cdot(-\sin x) \end{cases} \quad (4)
\end{array}\right.$$

Решением (1) системы данной совокупности является серия $x=\pi n, n\epsilon N$.

Система (2) решений не имеет, решением (3) системы являются: $\frac{4}{3}$ и $x=\pi n, n\epsilon Z\cup\{0\}$.

Система (4) решений не имеет.

4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью (AA_1C) и прямой A_1B, если $AA_1 = 3$, $AB = 4$ и $BC = 3$.

Ответ: $arcsin\ \frac{12}{25}$.

Решение. Из точки B проведём перпендикуляр BH к прямой AC. Тогда A_1H – проекция отрезка A_1B на плоскость (AA_1C), а значит, нужно найти угол BA_1H.

1) В прямоугольном треугольнике ABC находим: $BH = \frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{12}{5}$.

2) В прямоугольном треугольнике A_1AB находим: $A_1B = 5$.

3) В прямоугольном треугольнике $\mathrm{A_1HB}$ находим $sin\,\mathrm{A}_1 = \frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{A_1B}} = \frac{12}{25}$.

5. Найдите два натуральных числа, если их произведение заключено между числами 120 и 130, а их отношение – между числами 2 и 3. Укажите все решения.

Ответ: 18 и 7

Решение: Обозначим искомые числа через k и n. Тогда $\begin{cases} 120 < kn < 130, \\ 2 < \frac{k}{n} < 3. \end{cases}$

Перемножим эти неравенства: $240 < k^2 < 390$. Кроме того, разделим этинеравенства (т.е. неравенство для kn умножим на неравенство для $\frac{n}{k}$).

Тогда $40 < n^2 < 65$. Получим систему неравенств: $\begin{cases} 240 < k^2 < 390, \\ 40 < n^2 < 65. \end{cases}$

Она является лишь следствием исходной системы, так как любое решение первой системы удовлетворяет второй системе, но вторая система имеет решения, которые не удовлетворяют первоначальной системе, например, k =16, n=7.

Из второго неравенства последней системы следует, что n = 7или n = 8.

1) Пусть n = 7. Получаем: $\begin{cases} 120 < 7k < 130, \\ 2 < \frac{k}{7} < 3, \end{cases}$

2) $\begin{cases} 17\frac{1}{7} < k < 18\frac{4}{7} \\ 14 < k < 21. \end{cases}$ Отсюда k = 18.

3) Пусть n = 8. Будем иметь:

$$\begin{cases} 120 < 8k < 130, \\ 2 < \frac{k}{8} < 3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15 < k < 16\frac{1}{4} \\ 16 < k < 24. \end{cases}$$

Эта система не имеет решений в целых числах

Для заметок

Для заметок

Контактная информация

Муниципальное бюджетное учреждение города Костромы
«Городской центр обеспечения качества образования»
156007, г. Кострома, ул. Ленина, 84
Телефон: (4942) 45–67–41
Email: gc_oko_matem@mail.ru
http://www.koipkro.kostroma.ru/Kostroma_EDU/gcoko