

▪ Составители:

Борткевич Л.К., методист МБУ ГЦОКО
 Сорокина С.А., учитель математики МОУ лицея № 17
 Коваль Л.Н., учитель математики МОУ лицея № 17
 Шорохова С.А., учитель математики МОУ лицея № 17
 Григорьева И.В. учитель математики МОУ лицея № 17
 Ерохова Е.Г., учитель математики МОУ гимназии № 28
 Горохова О.В., учитель математики МОУ СОШ № 29
 Потапова М.Н., учитель математики МОУ лицея № 32
 Соколова М.С., учитель математики МОУ лицея № 32
 Соколова Т.В., учитель математики МОУ лицея № 32
 Бывших Т.А., учитель математики МОУ лицея № 34
 Медведева М.В., учитель математики МОУ лицея № 34
 Курочкина С.В., учитель математики МОУ лицея № 34

Порядок проведения олимпиады в школе

Школьная олимпиада по математике проходит одновременно во всех школах города Костромы **22 октября 2010 года**. Сведения по итогам школьной олимпиады включаются в общий отчёт общеобразовательного учреждения «Итоги I (школьного) этапа олимпиады».

- На основании МЕТОДИЧЕСКИХ РЕКОМЕНДАЦИЙ по разработке заданий для школьного этапа Всероссийской олимпиады школьников, подготовленных Центральной предметно-методической комиссией по математике, рекомендуемое время проведения олимпиады: **для 5-6 классов – 2 урока, для 7-8 классов – 3 урока, для 9-11 классов – 4 урока.**
- Сроком до **25.10.2010** руководители МО учителей математики **высылают ДОПОЛНИТЕЛЬНО** отчёт о победителях и призёрах школьной олимпиады по математике по форме Excel (смотрите приложение в рассылке и на странице «Сопровождение преподавания математики Интернет-представительства МБУ города Костромы «Городской центр обеспечения качества образования») на E-mail: gc_oko_matem@mail.ru. Данные необходимы для формирования сборника «Школьная олимпиада по математике 2010»

Рекомендации по проведению школьной олимпиады

В первом этапе Всероссийской олимпиады имеет право участвовать каждый школьник, поэтому не должно быть никаких ограничений при допуске к участию.

Во время решения жюри олимпиады должно отвечать на вопросы школьников только по условиям предложенных задач и не имеет право комментировать решения участников. Если вопрос, заданный школьником, существенно влияет на понимание задачи, то ответ на него необходимо дать всем участникам.

В соответствии с регламентом проведения математических олимпиад школьников каждая задача оценивается из **7 баллов**.

Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако решение содержит существенные ошибки либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев,

	или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри.

В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Технические ошибки, если они не влияют на ход решения, следует относить к недочетам. Не следует снимать баллы за нерациональность решения, нетиповые рассуждения, неряшливое оформление, исправления, грязь.

После проведения олимпиады и проверки работ **рекомендуется проведение разбора задач**, на котором школьники должны узнать, за какие решения (факты в решениях) сколько баллов начисляло жюри.

После разбора проводится просмотр работ, во время которого каждый из участников олимпиады имеет право узнать претензии к своим решениям и увидеть распределение баллов в своей работе.

Если школьник не согласен с оценкой его работы в рамках оглашенных на разборе задач норм оценок, то жюри должно рассмотреть его претензии на апелляции. Во время апелляции недопустимо изменение общих норм оценок и рассмотрение дополнительных фактов, приводимых школьником, но отсутствующих в работе. После всех апелляций жюри уже не имеет право изменять оценки работ.

Участники школьного этапа олимпиады, набравшие наибольшее количество баллов, признаются **победителями школьного этапа** олимпиады при условии, что **количество набранных ими баллов превышает половину максимально возможных баллов**.

В случае, когда победители не определены, в школьном этапе олимпиады определяются только призеры.

Призерами школьного этапа олимпиады в пределах установленной квоты признаются все участники школьного этапа олимпиады, следующие в итоговой таблице за победителями.

В случае, когда у участника, определяемого в пределах установленной квоты в качестве призера, оказывается количество баллов такое же, как и у следующих за ним в итоговой таблице, решение по данному участнику и всем участникам, имеющим равное с ним количество баллов, определяется следующим образом:

- все участники признаются призерами, если набранные ими баллы больше половины максимально возможных;
- все участники не признаются призерами, если набранные ими баллы не превышают половины максимально возможных.

Задания носят **рекомендательный** характер. При замене заданий руководитель МО должен предоставить в Муниципальное бюджетное учреждение «Городской центр обеспечения качества образования» тексты заданий, предложенных образовательным учреждением, в электронном и печатном виде.

5 класс

Задание № 1

В ряд выписаны цифры: 1234567890. Вставим между ними (в некоторых местах) знак «+» так, чтобы в сумме получилось трехзначное число. Какое наибольшее трехзначное число может получиться?

Задание № 2

Из деревни Простоквашино в город выехал кот Матроскин на тракторе «тр-тр Митя» со скоростью 25 км/ч, и одновременно с ним из города в Простоквашино выехал на своём велосипеде почтальон Печкин со скоростью 19 км/ч. Когда Матроскин приехал в город, Печкину осталось проехать ещё 30 км. Какое расстояние от города до деревни?

Задание № 3

Кот Матроскин нашёл в лесу 40 грибов (рыжиков и груздей) и сказал дяде Фёдору, что среди любых 22 грибов имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 20 грибов – хотя бы один груздь. Сколько рыжиков и сколько груздей в корзине?

Задание № 4

Как разрезать прямоугольник 4×8 на 9 квадратов?

Задание № 5

Бился Иван Царевич со Змеем Горынычем, трехглавым и треххвостым. Одним ударом он мог срубить либо одну голову, либо один хвост, либо две головы, либо два хвоста. Но, если срубить один хвост, то вырастут два; если срубить два хвоста – вырастет голова; если срубить голову, то вырастает новая голова, а если срубить две головы, то не вырастет ничего. Объясните, как должен действовать Иван Царевич, чтобы срубить Змею все головы и все хвосты как можно быстрее.

6 класс

Задание № 1

К числу **2011** слева и справа припишите по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на **45**. Запишите все возможные варианты.

Задание № 2

Башенные часы за 12 секунд делают 4 удара. Сколько ударов сделают часы за 24 секунды?

Задание № 3

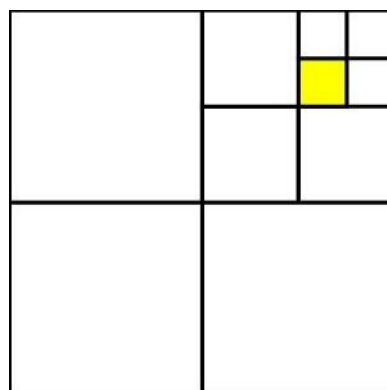
В классе 21 человек. Никакие две девочки не дружат с одинаковым количеством мальчиков из своего класса. Какое наибольшее количество девочек может быть в этом классе?

Задание № 4

Среди 12 монет имеется 1 фальшивая. Найдите её за три взвешивания на чашечных весах без гирь, если неизвестно, легче она или тяжелее других.

Задание № 5

Какая часть квадрата закрашена?



7 класс

Задание № 1

Решите уравнение

$$1993 = 1 + 8 : (1 + 8 : (1 - 8 : (1 + 4 : (1 - 4 : (1 - 8 : x)))))).$$

Задание № 2

Несколько одинаковых по численности бригад сторожей спали одинаковое число ночей. Каждый сторож проспал больше ночей, чем сторожей в бригаде, но меньше, чем число бригад. Сколько сторожей в бригаде, если все сторожа вместе проспали 1001 человеко-ночь?

Задание № 3

У Вани было некоторое количество печенья, он сколько-то съел, а потом к нему в гости пришла Таня, и оставшееся печенье они разделили поровну. Оказалось, что Ваня съел в пять раз больше печенья чем Таня. Какую долю от всего печенья Ваня съел к моменту Таниного прихода?

Задание № 4

В квадрате 4×4 клетки левой половины покрашены в черный цвет, а остальные - в белый. За одну операцию разрешается перекрасить в противоположный цвет все клетки внутри любого прямоугольника. Как за три операции из первоначальной раскраски получить шахматную.

Задание № 5

У подводного царя служат осьминоги с шестью, семью или восемью ногами. Те, у кого 7 ног, всегда лгут, а у кого 6 или 8 ног, всегда говорят правду. Встретились четыре осьминога. Синий сказал: «Вместе у нас 28 ног», зелёный: «Вместе у нас 27 ног», жёлтый: «Вместе у нас 26 ног», красный: «Вместе у нас 25 ног». У кого сколько ног?

8 класс

Задание № 1

Найти угол между часовой и минутной стрелками в 7 ч. 38 мин.

Задание № 2

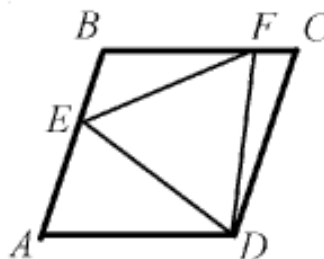
В шкатулке разбойника лежит несколько драгоценных камней (но не больше 1000). Известно, что $\frac{2}{9}$ всех камней составляют алмазы, $\frac{4}{11}$ – рубины, $\frac{1}{7}$ – сапфиры, а остальные – изумруды. Сколько изумрудов в этой шкатулке?

Задание № 3

Можно ли в таблице 3×3 расставить числа 3, 4, 5, ..., 11 так, чтобы произведение чисел первой строки было равно произведению чисел первого столбца, произведение чисел второй строки было равно произведению чисел второго столбца, и, наконец, произведение чисел третьей строки было равно произведению чисел третьего столбца?

Задание № 4

Точки E и F лежат, соответственно, на сторонах AB и BC ромба $ABCD$, причем $AE = 5 \cdot BE$, $BF = 5 \cdot CF$. Известно, что треугольник DEF – равносторонний. Найдите величину угла BAD .



Задание № 5

Каких пятизначных чисел больше: четных с суммой цифр, равной 36, или нечетных с суммой цифр, равной 38?

9 класс

Задание № 1

Разложите на множители: $x^2 - 2y^2 - xy - y - x$.

Задание № 2

Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми равно 8 км, одновременно вышли два лыжника. Скорость одного из них на 4 км/ч меньше скорости другого. Лыжник, который первым прибыл в B , сразу же повернул обратно и встретил другого лыжника через 45 минут после выхода из A . На каком расстоянии от пункта B произошла встреча?

Задание № 3

Корни уравнения $x^2 + ax + 1 = b$ — целые, отличные от нуля, числа. Докажите, что число $a^2 + b^2$ является составным.

Задание № 4

Дан остроугольный треугольник ABC . Высоты AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O . Основания высот соединены. Найдите все пары подобных треугольников. Ответ обосновать.

Задание № 5

После того, как учительница Марьяванна пересадит Вовочку с первого ряда на второй, Ванечку — со второго ряда на третий, а Машеньку — с третьего ряда на первый, средний возраст учеников, сидящих в первом ряду, увеличился на неделю, сидящих во втором ряду — увеличился на две недели, а сидящих в третьем ряду — уменьшился на четыре недели. Известно, что на первом и на втором ряду сидят по 12 человек. Сколько человек сидят в третьем ряду?

10 класс

Задание № 1

В начале года в сбербанк было внесено 1640 рублей, а в конце года было взято обратно 882 рубля. Еще через год на вкладе снова оказалось 882 рубля. Сколько процентов сбербанк начисляет в год?

Задание № 2

Поезд проходит мимо столба за 5с. За какое время в секундах пройдут мимо друг друга поезд и электричка, если скорость поезда в 2 раза больше скорости электрички, а длина поезда в три раза больше длины электрички?

Задание № 3

Даны действительные числа a, b, c , причем $a > b > c$. Докажите неравенство $a^2b + b^2c + c^2a > b^2a + a^2c + c^2b$.

Задание № 4

В трапеции $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O . Площадь $\triangle BOC$ равна 4, площадь $\triangle AOD$ равна 16. Найти площадь трапеции.

Задание № 5

Решите уравнение $\frac{x-1}{x} + \frac{x-2}{x} + \frac{x-3}{x} + \dots + \frac{1}{x} = 3$, где x - целое положительное число.

11 класс

Задание № 1

Докажите, что уравнение $x^{2010} + 3x^2 - 3^{\frac{1}{2}} \cdot x + 1 = 0$ не имеет действительных корней.

Задание № 2

К графику функции $f(x) = -x^2 - 8x$ проведены две касательные в точках с абсциссами -6 и 1. Найти площадь треугольника, образованного осью ординат и этими касательными.

Задание № 3

Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} 2y - x = \sin x - \sin 2y \\ \cos x + 5 \sin y = 4 \end{cases}.$$

Задание № 4

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 6$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостями ACD_1 и $A_1 B_1 C_1$.

Задание № 5

Группу школьников нужно перевезти из летнего лагеря одним из двух способов: либо двумя автобусами типа A за несколько рейсов, либо тремя автобусами типа B за несколько рейсов, причём в этом случае число рейсов каждого автобуса типа B будет на один меньше, чем рейсов каждого автобуса типа A . В каждом из случаев автобусы заполняются полностью. Какое максимальное количество школьников можно перевезти при указанных условиях, если в автобус типа B входит на 7 человек меньше, чем в автобус типа A ?

5 класс

Задание № 1

В ряд выписаны цифры: 1234567890. Вставим между ними (в некоторых местах) знак «+» так, чтобы в сумме получилось трехзначное число. Какое наибольшее трехзначное число может получиться?

Решение

$$999 = 1 + 2 + 34 + 5 + 67 + 890.$$

Ответ: 999

Задание № 2

Из деревни Простоквашино в город выехал кот Матроскин на тракторе «тр-тр Митя» со скоростью 25 км/ч, и одновременно с ним из города в Простоквашино выехал на своём велосипеде почтальон Печкин со скоростью 19 км/ч. Когда Матроскин приехал в город, Печкину осталось проехать ещё 30 км. Какое расстояние от города до деревни?

Решение

Матроскин каждый час проезжает на 6 км больше, чем Печкин. Когда он проехал всё расстояние, то оказалось, что он проехал на 30 км больше, чем почтальон. Следовательно, всё расстояние от деревни до города Матроскин проедет за $30:6=5$ часов, а само расстояние будет $25 \cdot 5=125$ км.

Ответ: 125 км

Задание № 3

Кот Матроскин нашёл в лесу 40 грибов (рыжиков и груздей) и сказал дяде Фёдору, что среди любых 22 грибов имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 20 грибов – хотя бы один груздь. Сколько рыжиков и сколько груздей в корзине?

Решение

Так как среди любых 22 грибов хотя бы один – рыжик, то груздей не больше 21. Так как среди любых 20 грибов хотя бы один – груздь, то рыжиков не больше 19. А так как всего в

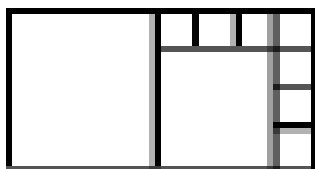
корзине 40 грибов получаем, что груздей ровно 21, а рыжиков ровно 19.

Ответ: в корзине 19 рыжиков и 21 груздь

Задание № 4

Как разрезать прямоугольник 4×8 на 9 квадратов?

Решение



Задание № 5

Бился Иван Царевич со Змеем Горынычем, трехглавым и треххвостым. Одним ударом он мог срубить либо одну голову, либо один хвост, либо две головы, либо два хвоста. Но, если срубить один хвост, то вырастут два; если срубить два хвоста – вырастет голова; если срубить голову, то вырастает новая голова, а если срубить две головы, то не вырастет ничего. Объясните, как должен действовать Иван Царевич, чтобы срубить Змею все головы и все хвосты как можно быстрее.

Решение

Так как рубить головы по одной не имеет смысла, а при рубке хвостов, рано или поздно появляются новые головы, то Иван Царевич должен действовать так, чтобы у Змея не осталось хвостов, а количество голов стало четным. Для этого, надо сначала три раза срубить по одному хвосту, и их станет шесть. Затем, три раза срубить по два хвоста, и у Змея станет шесть голов, а потом три раза срубить по две головы, и тогда, у Змея не останется ни хвостов, ни голов. Возможен также вариант, когда Иван Царевич сначала срубает две головы, а потом действует так же, как и в предыдущем случае, тогда на последнем этапе у Змея будет не шесть голов, а четыре. Общее количество ударов, которое должен сделать Иван Царевич (девять), при этом не изменяется.

Ответ: три раза срубить по одному хвосту, три раза срубить по два хвоста, три раза срубить по две головы.

6 класс

Задание № 1

К числу **2011** слева и справа припишите по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на **45**. Запишите все возможные варианты.

Решение

Ответ: 920115; 520110

Задание № 2

Башенные часы за 12 секунд делают 4 удара. Сколько ударов сделают часы за 24 секунды?

Решение

Заметим, что между четырьмя ударами в течение 12 секунд было три промежутка, длительность каждого 4 секунды. За 24 секунды таких промежутков будет 6. Значит, ударов будет на 1 больше, то есть 7.

Ответ: 7 ударов

Задание № 3

В классе 21 человек. Никакие две девочки не дружат с одинаковым количеством мальчиков из своего класса. Какое наибольшее количество девочек может быть в этом классе?

Решение

Если в классе 11 девочек, то мальчиков 10. Тогда 1 из девочек не дружит ни с одним из мальчиков, вторая с одним, третья – с двумя, и т.д. Если предположить, что девочек будет больше 11, то мальчиков – меньше 10, и тогда разное количество друзей–мальчиков меньше 11, обязательно хотя бы две какие-то девочки будут иметь одинаковое количество друзей-мальчиков.

Ответ: 11 девочек

Задание № 4

Среди 12 монет имеется 1 фальшивая. Найдите её за три взвешивания на чашечных весах без гирь, если неизвестно, легче она или тяжелее других.

Решение

Занумеруем монеты числами от 1 до 12. сначала положим на левую чашку весов монеты 1, 2, 3, 4, а на правую – 5, 6, 7, 8. рассмотрим два случая:

- а. Весы в равновесии. Значит, фальшивая монета среди оставшихся (с 9 по 12) монет. Этот случай довольно прост. Сравниваем монеты 9 и 10 с 1 и 2:

если их вес одинаков, то фальшивая монета 11 или 12 (за одно взвешивание она находится);

если нет, то фальшивая монета – 9 или 10 (причем известно даже, легче она или тяжелее настоящей).

- б. Левая чашка легче. Фальшивая монета среди взвешиваемых. Положим на левую чашку монеты 9, 10, 11 и 4, а на правую – 1, 2, 3 и 8. Разберём все три случая:

левая чашка по-прежнему легче, тогда фальшивая одна из двух монет – 4 или 8 (для её обнаружения достаточно одного взвешивания);

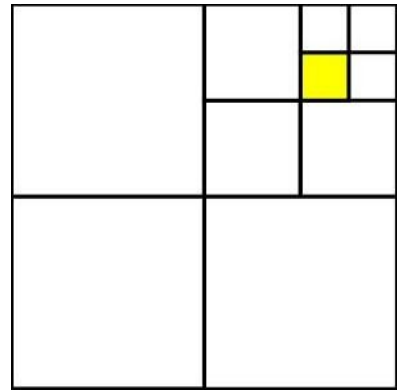
весы уравнились, значит, фальшивая одна из монет: 5, 6, 7, причём она тяжелее настоящей (остальное понятно);

легче стала правая чашка, значит, фальшивая одна из монет: 1, 2, 3 – и она легче.

- с. Третий случай, когда при первом взвешивании перевесила левая чашка по сути ничем не отличается от второго.

Задание № 5

Какая часть квадрата закрашена?



Ответ: 1/64

7 класс

Задание № 1

Решите уравнение

$$1993 = 1 + 8 : (1 + 8 : (1 - 8 : (1 + 4 : (1 - 4 : (1 - 8 : x))))).$$

Решение

Будем упрощать уравнение "снаружи" скобок, а не изнутри.

Ответ: 9

Задание № 2

Несколько одинаковых по численности бригад сторожей спали одинаковое число ночей. Каждый сторож проспал больше ночей, чем сторожей в бригаде, но меньше, чем число бригад. Сколько сторожей в бригаде, если все сторожа вместе проспали 1001 человеко-ночь?

Решение

Обозначим через s число сторожей в бригаде, через b число бригад, а через n — число ночей, которые проспал один сторож. Тогда $s \cdot b \cdot n = 1001$. Но $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, причём числа 7, 11, 13 — простые. Учитывая, что по условию $s < n < b$, получаем $s = 7$.

Ответ: 7.

Задание № 3

У Вани было некоторое количество печенья, он сколько-то съел, а потом к нему в гости пришла Таня, и оставшееся печенье они разделили поровну. Оказалось, что Ваня съел в

пять раз больше печенья чем Таня. Какую долю от всего печенья Ваня съел к моменту Таниного прихода?

Решение

Пусть Таня съела x печенья, тогда Ваня съел $5x$ печенья, из которых $5x - x = 4x$ печенья он съел до прихода Тани. Так как всего печенья было $5x + x = 6x$, то до Таниного прихода Ваня съел $4x/6x = 2/3$ всего печенья.

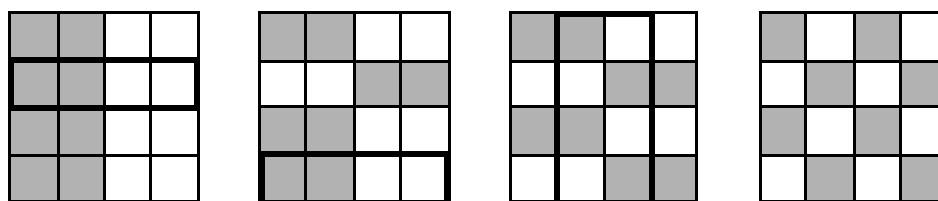
Ответ: $2/3$ всего печенья

Задание № 4

В квадрате 4×4 клетки левой половины покрашены в черный цвет, а остальные - в белый. За одну операцию разрешается перекрасить в противоположный цвет все клетки внутри любого прямоугольника. Как за три операции из первоначальной раскраски получить шахматную.

Решение

Одно из решений



Задание № 5

У подводного царя служат осьминоги с шестью, семью или восемью ногами. Те, у кого 7 ног, всегда лгут, а у кого 6 или 8 ног, всегда говорят правду. Встретились четыре осьминога. Синий сказал: «Вместе у нас 28 ног», зелёный: «Вместе у нас 27 ног», жёлтый: «Вместе у нас 26 ног», красный: «Вместе у нас 25 ног». У кого сколько ног?

Решение

Так как осьминоги противоречат друг другу, то возможны два случая: либо все осьминоги лгут, либо ровно один из них говорит правду. Если все осьминоги лгут, то у каждого из них по 7 ног. Значит, вместе у них 28 ног. Но тогда синий осьминог сказал правду — противоречие. Если

же три осьминога солгали, а четвёртый сказал правду, то у солгавших осьминогов должно быть по 7 ног, а у сказавшего правду — либо 6, либо 8. Поэтому вместе у них либо 27, либо 29 ног, то есть правду сказал зелёный осьминог. Таким образом, у зелёного осьминога 6 ног, а у остальных по 7 ног.

Ответ: у зелёного осьминога 6 ног, а у остальных по 7 ног

8 класс

Задание № 1

Найти угол между часовой и минутной стрелками в 7 ч. 38 мин.

Решение

Часовая стрелка проходит за час 30° , а за минуту — $0,5^\circ$. Значит, к данному моменту времени она прошла $7 \cdot 30^\circ + 38 \cdot 0,5^\circ = 229^\circ$ от положения в полночь. Минутная стрелка проходит за минуту 6° , т.е. за 38 минут — 228° . Значит, искомый угол равен 1° .

Ответ: 1°

Задание № 2

В шкатулке разбойника лежит несколько драгоценных камней (но не больше 1000). Известно, что $\frac{2}{9}$ всех камней составляют алмазы, $\frac{4}{11}$ — рубины, $\frac{1}{7}$ — сапфиры, а остальные — изумруды. Сколько изумрудов в этой шкатулке?

Решение

$\frac{2}{9} + \frac{4}{11} + \frac{1}{7} = \frac{505}{693}$. Число 693 — единственное возможное среди чисел, не превосходящих 1000. Поэтому, общее число камней — 693. Доля изумрудов составляет $1 - \frac{505}{693} = \frac{188}{693}$.

Ответ: 188 изумрудов

Задание № 3

Можно ли в таблице 3×3 расставить числа $3, 4, 5, \dots, 11$ так, чтобы произведение чисел первой строки было равно произведению чисел первого столбца, произведение чисел второй строки было равно произведению чисел второго столбца, и, наконец, произведение чисел третьей строки было равно произведению чисел третьего столбца?

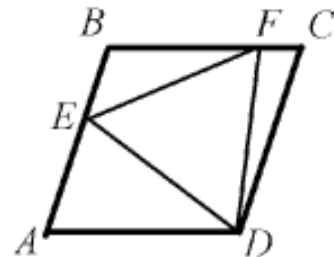
Решение

Да, можно

11	8	5
4	7	6
10	3	9

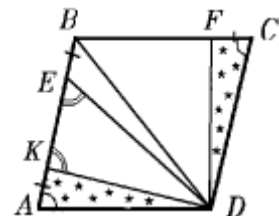
Задание № 4

Точки E и F лежат, соответственно, на сторонах AB и BC ромба $ABCD$, причем $AE = 5 \cdot BE$, $BF = 5 \cdot CF$. Известно, что треугольник DEF – равносторонний. Найдите величину угла BAD .



Решение

Из условия задачи следует, что $BE = CF$. Отложим на стороне AB отрезок AK , равный BE . Треугольники ADK и CDF равны по двум сторонам и углу ($AD = CD$, $AK = CF$, $\angle DAK = \angle DCF$). Значит, $DK = DF = DE$, то есть треугольник DKE – равнобедренный. В частности, равны углы DKE и DEK при его основании. Следовательно, треугольники ADK и BDE равны (по двум сторонам и углу: $AK = BE$, $DK = DE$, $\angle DKA = \angle DEB$). Отсюда $AD = BD$, то есть треугольник ABD – равносторонний. Следовательно, $\angle BAD = 60^\circ$.



Ответ: $\angle BAD = 60^\circ$

Задание № 5

Каких пятизначных чисел больше: четных с суммой цифр, равной 36, или нечетных с суммой цифр, равной 38?

Решение

Пятизначное число с суммой цифр 38 не может иметь в своей записи нулей (в противном случае сумма цифр не превосходила бы суммы четырех девяток, то есть 36). Из каждого нечетного числа с суммой цифр 38 можно получить четное число с суммой цифр 36, уменьшив на 1 две его последние цифры. При этом из разных нечетных чисел получаются разные четные. Однако некоторые четные числа с суммой цифр 36 (например, 99990) не могут быть получены в результате такой операции. Таким образом, установлено взаимно однозначное соответствие между всеми нечетными числами с суммой цифр 38 и некоторыми (но не всеми!) четными числами с суммой цифр 36. Следовательно, первых меньше, чем вторых.

Ответ: больше четных чисел с суммой цифр 36

9 класс

Задание № 1

Разложите на множители: $x^2 - 2y^2 - xy - y - x$.

Решение

$$\begin{aligned}x^2 - 2y^2 - xy - y - x &= x^2 - y^2 - y^2 - xy - y - x = (x - y)(x + y) - y(y + x) - (y + x) = \\&= (x + y)(x - y - y - 1) = (x + y)(x - 2y - 1)\end{aligned}$$

Ответ: $(x + y)(x - 2y - 1)$

Задание № 2

Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми равно 8 км, одновременно вышли два лыжника. Скорость одного из них на 4 км/ч меньше скорости другого. Лыжник, который первым прибыл в B , сразу же повернул обратно и встретил другого лыжника через 45 минут после выхода из A . На каком расстоянии от пункта B произошла встреча?

Решение

	Скорость (км/ч)	Время (ч)	Расстояние (км)
1 лыжник	x	0,75	$0,75 \cdot x$
2 лыжник	$x+4$	0,75	$0,75 \cdot (x+4)$

Получаем уравнение: $0,75x + 0,75(x + 4) = 16$;

$$1,5x = 13; x = \frac{26}{3}.$$

Расстояние, пройденное первым лыжником, $0,75 \cdot \frac{26}{3} = 6,5$ (км), расстояние до пункта B равно $8 - 6,5 = 1,5$ (км).

Ответ: 1,5 (км)

Задание № 3

Корни уравнения $x^2 + ax + 1 = b$ — целые, отличные от нуля, числа. Докажите, что число $a^2 + b^2$ является составным.

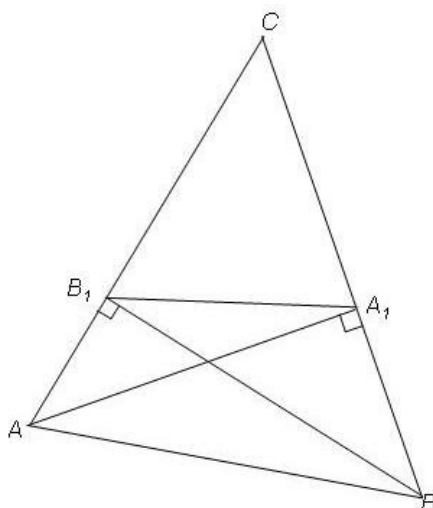
Решение

Запишем данное квадратное уравнение в стандартном виде: $x^2 + ax + (1 - b) = 0$. По теореме Виета: $x_1 + x_2 = -a, x_1 \cdot x_2 = 1 - b$, где x_1 и x_2 — корни данного уравнения. Значит, $a = -(x_1 + x_2), b = 1 - x_1 \cdot x_2$. Следовательно, $a^2 + b^2 = (x_1 + x_2)^2 + (1 - x_1 \cdot x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 1 + x_1^2 \cdot x_2^2 = (x_1^2 + 1) \cdot (x_2^2 + 1)$.

Полученное число является составным, так как, если x_1 и x_2 — целые отличные от нуля, то каждый из множителей принимает целое значение, отличное от единицы.

Задание № 4

Дан остроугольный треугольник ABC . Высоты AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O . Основания высот соединены. Найдите все пары подобных треугольников. Ответ обосновать.



Решение

- 1) $\triangle AOB_1$ подобен $\triangle BOA_1$ по двум углам.
- 2) $\triangle AA_1C$ подобен $\triangle BB_1C$ по двум углам:
 $\angle A_1 = \angle B_1 = 90^\circ$, $\angle C$ — общий.

3) $\triangle AOB_1$ подобен $\triangle ACA_1$ по двум углам: $\angle A$ — общий, $\angle B_1 = \angle A_1 = 90^\circ$.

4) $\triangle BOA_1$ подобен $\triangle BCB_1$ по двум углам: $\angle B$ — общий, $\angle A_1 = \angle B_1 = 90^\circ$.

5) Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C$:

$$\text{из } \triangle ACA_1 \quad \cos \angle C = \frac{CA_1}{AC}$$

$$\text{из } \triangle BB_1C \quad \cos \angle C = \frac{B_1C}{BC}$$

Следовательно: $\frac{CA_1}{AC} = \frac{B_1C}{BC}$. Следовательно $\triangle A_1B_1C$ подобен $\triangle ABC$. (Или эта же пропорция следует из второй пары треугольников). Существуют ещё пары подобных треугольников.

Задание № 5

После того, как учительница Марьяванна пересадила Вовочку с первого ряда на второй, Ванечку — со второго ряда на третий, а Машеньку — с третьего ряда на первый, средний возраст учеников, сидящих в первом ряду, увеличился на неделю, сидящих во втором ряду — увеличился на две недели, а сидящих в третьем ряду — уменьшился на четыре недели. Известно, что на первом и на втором ряду сидят по 12 человек. Сколько человек сидят в третьем ряду?

Решение

Первый способ: Пусть в третьем ряду сидит x человек. Так как средний возраст равен сумме возрастов, деленной на количество человек, то после пересаживания суммарный возраст детей на первом ряду увеличился на 12 недель, на втором ряду — увеличился на 24 недели, а на третьем ряду — уменьшился на $4x$ недель. Поскольку сумма возрастов всех учеников измениться не могла, то $4x = 12 + 24$, то есть, $x = 9$.

Второй способ: Пусть до пересаживания учеников средний возраст сидящих на первом, втором и третьем ряду составил a , b и c недель соответственно. Обозначим также: количество человек, сидящих в третьем ряду — x , возраст Вовочки — V недель, возраст Ванечки — W недель, возраст Машеньки — M недель. Исходя из условия задачи, составим три уравнения:

$$1) \frac{12a + M - V}{12} = 1;$$

$$2) \frac{12b + V - W}{12} = 2;$$

$$3) \frac{xc + W - M}{x} = -4.$$

Упростив эти уравнения и объединив их в систему, получим:

$$\begin{cases} M - V = 12, \\ V - W = 24, \\ W - M = -4x. \end{cases}$$

Сложив все уравнения почленно, получим, что $12+24-4x=0$, то есть, $x = 9$.

Ответ: 9 человек

10 класс

Задание № 1

В начале года в сбербанк было внесено 1640 рублей, а в конце года было взято обратно 882 рубля. Еще через год на вкладе снова оказалось 882 рубля. Сколько процентов сбербанк начисляет в год?

Решение

Пусть x – процент годовых. $1640+16,4x$ – сумма в конце года. $758+16,4x$ – сумма, оставшаяся после снятия 882 руб. $(7,58+0,164x)x$ – сумма, полученная по процентам за последний год. На основании того, что в конце года на вкладе стало снова 882 рубля можно составить уравнение: $758+16,4x + (7,58+0,164x)x = 882$,
 $0,164x^2 + 23,98x - 124 = 0$

Ответ: 5%.

Задание № 2

Поезд проходит мимо столба за 5с. За какое время в секундах пройдут мимо друг друга поезд и электричка, если скорость поезда в 2 раза больше скорости электрички, а длина поезда в три раза больше длины электрички?

Решение

Пусть x_1 (м/с) – скорость поезда, x_2 (м/с) – скорость электрички, l_1, l_2 (м) – длина поезда и электрички соответственно. По условию задачи $x_2 = \frac{1}{2}x_1$; $l_2 = \frac{1}{3}l_1$; $\frac{l_1}{x_1} = 5$.

$$\frac{l_1 + l_2}{x_1 + x_2} = 5 \cdot \frac{l_1 + l_2}{x_1 + x_2} = \frac{l_1 + \frac{1}{3}l_1}{x_1 + \frac{1}{2}x_2} = \frac{40}{9} \text{ (с)}.$$

Ответ: $\frac{40}{9}c$

Задание № 3

Даны действительные числа a, b, c , причем $a > b > c$. Докажите неравенство $a^2b + b^2c + c^2a > b^2a + a^2c + c^2b$.

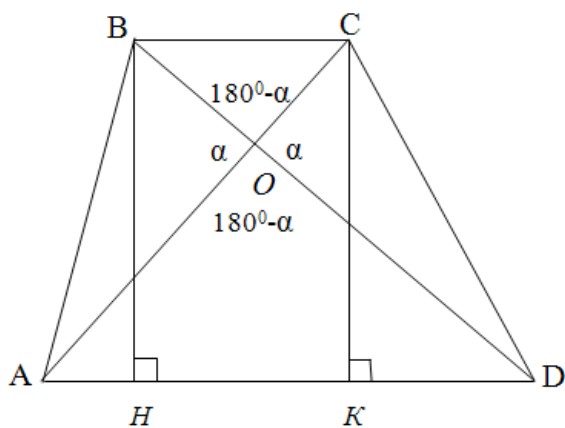
Решение

Перенесем все слагаемые в левую часть:
 $a^2b + b^2c + c^2a - b^2a - a^2c - c^2b = ab(a - b) - c(a^2 - b^2) + c^2(a - b) = (a - b)(ab - ac - bc + c^2) =$
 $(a - b)(b - c)(a - c)$, $(a - b)(b - c)(a - c) > 0$, так как выражение в каждой из скобок положительно.

Задание № 4

В трапеции $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O . Площадь $\triangle BOC$ равна 4, площадь $\triangle AOD$ равна 16. Найти площадь трапеции.

Решение



1) Пусть $\angle AOB = \alpha$

$$S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2} \cdot BO \cdot AO \cdot \sin \alpha$$

$$S_{\triangle COD} = \frac{1}{2} \cdot DO \cdot CO \cdot \sin \alpha, \text{ т.к. } \angle BOA = \angle COD \text{ как вертикальные}$$

$\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ$ как сумма смежных углов. Отсюда следует, что $\angle BOC = \angle AOD = 180^\circ - \alpha$.

$$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} BO \cdot OC \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} BO \cdot OC \cdot \sin \alpha,$$

$$S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2} AO \cdot OD \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} AO \cdot OD \cdot \sin \alpha.$$

Доказали, что $S_{\triangle ABO} \cdot S_{\triangle COD} = S_{\triangle BOC} \cdot S_{\triangle AOD}$.

$$2) S_{\triangle ABO} \cdot S_{\triangle COD} = 4 \cdot 16 = 64$$

3) Построим $BH \perp AD$ и $CK \perp AD$.

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} BH \cdot AD, S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} CK \cdot AD$$

Из того, что $BH = CK$ (расстояние между параллельными прямыми), получим $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD}$.

$$4) \text{ Т. к. } S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD}, \text{ получим } \begin{cases} S_{\triangle ABO} = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle AOD} \\ S_{\triangle OCD} = S_{\triangle ACD} - S_{\triangle AOD} \end{cases} \Rightarrow S_{\triangle ABO} = S_{\triangle OCD}.$$

$$5) \text{ Получили } S_{\triangle ABO} \cdot S_{\triangle COD} = S_{\triangle ABO}^2 = 64$$

$$S_{\triangle ABO} = 8$$

$$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{\triangle ABO} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOD}$$

$$S_{ABCD} = 2 \cdot 8 + 4 + 16 = 36$$

Ответ: 36

Задание № 5

Решите уравнение $\frac{x-1}{x} + \frac{x-2}{x} + \frac{x-3}{x} + \dots + \frac{1}{x} = 3$, где x - целое положительное число.

Решение

Помножим обе части уравнения на x , имеем $(x-1)+(x-2)+(x-3)+\dots+1=3x$.

Левая часть этого уравнения есть сумма членов арифметической прогрессии, у которой $a_1 = x - 1$, $d = -1$, $a_n = 1$.

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{1 - x + 1}{-1} + 1 = x - 1.$$

$$\text{Так как } S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \text{ то } \frac{x-1+1}{2} \cdot (x-1) = 3x, \quad \frac{x}{2} \cdot (x-1) = 3x, \quad \frac{x^2 - x}{2} = 3x,$$

$$x^2 - x = 6x, x^2 = 7x,$$

$$x = 7 (x \neq 0).$$

Ответ: 7

11 класс

Задание № 1

Докажите, что уравнение $x^{2010} + 3x^2 - 3^{\frac{1}{2}} \cdot x + 1 = 0$ не имеет действительных корней.

Решение

1). Т.к. квадратное уравнение $3x^2 - 3^{\frac{1}{2}}x + 1 = 0$ не имеет действительных корней ($D < 0$), а ветви параболы (график функции $y = 3x^2 - 3^{\frac{1}{2}}x + 1$) направлены вверх, то для любого x верно неравенство $3x^2 - 3^{\frac{1}{2}}x + 1 > 0$.

2) $x^{2010} \geq 0$ для любого x .

3) Следовательно, для любого x верно и неравенство $x^{2010} + 3x^2 - 3^{\frac{1}{2}}x + 1 > 0$, т.е. данное уравнение не имеет действительных корней.

Задание № 2

К графику функции $f(x) = -x^2 - 8x$ проведены две касательные в точках с абсциссами -6 и 1. Найти площадь треугольника, образованного осью ординат и этими касательными.

Решение

Уравнение касательной в точке с абсциссой $x_0 = -6$ выглядит так: $y = f(-6) + f'(-6)(x - (-6))$, т.е. $y = 4x + 36$, а в точке с абсциссой $x_0 = 1$ – соответственно $y = -10x + 1$. Касательные пересекаются с осью ординат в точках $y = 36$ и $y = 1$, а друг с другом – в точке с абсциссой, удовлетворяющей уравнению $4x + 36 = -10x + 1 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$. Основание описанного в условии задачи треугольника, лежащее на оси ординат, имеет длину $36 - 1 = 35$, а соответствующая высота, параллельная оси абсцисс, – длину $0 - (-\frac{5}{2}) = 5/2$. Поэтому искомая площадь равна $\frac{1}{2} \cdot 35 \cdot \frac{5}{2} = \frac{175}{4} = 43,75$.

Задание № 3

Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} 2y - x = \sin x - \sin 2y \\ \cos x + 5 \sin y = 4 \end{cases}.$$

Решение

Приведём первое уравнение системы к виду $2y + \sin y = x + \sin x$ и рассмотрим функцию $f(t) = t + \sin t$. Так как $f'(t) = 1 + \cos t$, $f'(t) \geq 0$, то функция $f(t)$ возрастает. Возрастающая функция принимает каждое своё значение ровно один раз, следовательно, $x = 2y$. Решая уравнение $\cos 2y + 5 \sin y = 4$, получим:

$$1 - 2\sin^2 y + 5 \sin y = 4, \quad 2\sin^2 y - 5 \sin y + 3 = 0 \Rightarrow \sin y = 1 \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \pi + 4\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

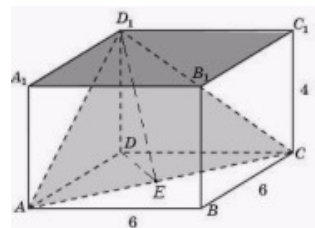
Ответ: $y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \pi + 4\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

Задание № 4

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 6$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостями ACD_1 и $A_1 B_1 C_1$.

Решение

Вместо плоскости $A_1 B_1 C_1$, возьмем параллельную ей плоскость ABC . Пусть E середина AC . $D_1 E \perp AC$, $DE \perp AC$. Значит, угол DED_1 — линейный угол искомого угла. Из прямоугольного треугольника $D_1 DE$ находим:



$$\operatorname{tg} \angle DED_1 = \frac{DD_1}{DE} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $\operatorname{tg} \angle DED_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Задание № 5

Группу школьников нужно перевезти из летнего лагеря одним из двух способов: либо двумя автобусами типа A за несколько рейсов, либо тремя автобусами типа B за несколько рейсов, причём в этом случае число рейсов каждого автобуса типа B будет на один меньше, чем рейсов каждого автобуса типа A . В каждом из случаев автобусы заполняются полностью. Какое максимальное количество школьников можно перевезти при указанных условиях, если в автобус типа B входит на 7 человек меньше, чем в автобус типа A ?

Решение

Пусть в автобус типа B входит k человек, а в автобус типа A входит $k + 7$ человек, и пусть каждый из трёх автобусов типа B сделает по m рейсов, а каждый из двух автобусов типа A по $m + 1$ рейсов. Так как в обоих случаях автобусы перевезут одно и то же количество детей, получаем уравнение:

$$3km = 2(k + 7)(m + 1) \Rightarrow km = 14m + 2k + 14 \Rightarrow m(k - 14) = 2k + 14. \text{ При } k >$$

$$14 \text{ получаем } m = \frac{2k+14}{k-14} \Rightarrow m = 2 + \frac{42}{k-14}.$$

Ч

исло $k-14$ — один из восьми делителей числа 42. Перебирая их по очереди, мы получим все возможные решения (8 пар чисел

k и m). Вот они: $(15;44)$, $(16;23)$, $(17;16)$, $(20;9)$, $(21;8)$, $(28;5)$, $(35;4)$, $(56;3)$. Для каждой пары последовательно находим количества перевозимых детей, равные $3kt$: 1980, 1104, 816, 540, 504, 420 и 504. Из них выбираем наибольшее. Таким образом, 1980 детей перевозятся тремя автобусами типа B (по 15 человек) за 44 рейса или двумя автобусами типа A (по 22 человека) за 45 рейсов.